Ⅰ.평면 곡선 1. 이차곡선 학년 반 번

중단원 TEST

이름:

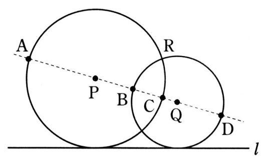
1. 포물선 $y^2+4y-2x+6=0$의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하여라.

2. 다음 중 좌표평면 위에서 점 $\mathrm{F}(3,\ 1)$과 y축으로부터 같은 거리에 있는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 자취의 방정식을 구하여라.

3. 포물선 $y^2-2y-8x-15=0$에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 골라라.

> ㉠ 대칭축은 x축에 평행하다.
> ㉡ 그래프는 왼쪽으로 볼록하다.
> ㉢ 초점은 y축 위에 있다.
> ㉣ 준선의 방정식은 $x=-4$이다.

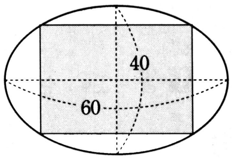
4. 오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q를 중심으로 하는 원의 교점을 R, 공통외접선을 l이라 한다. 그림에서 표시된 점 A, P, B, C, Q, D 중에서 R를 초점으로 하고 직선 l을 준선으로 하는 포물선 위에 있는 점을 구하여라.



5. 좌표평면 위에서 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$로부터 두 정점 $\mathrm{F}(\sqrt{2},\ 0)$, $\mathrm{F}'(-\sqrt{2},\ 0)$에 이르는 거리의 합은 4이고, 점 P로부터 원점에 이르는 거리가 $\sqrt{3}$일 때, x^2-y^2의 값을 구하여라.

6. 이차곡선 $x^2-4x+9y^2-5=0$과 중심이 $(2,\ 0)$이고 반지름의 길이가 a인 원이 서로 다른 네 점에서 만날 때, a의 값의 범위를 구하여라.

7. 장축의 길이가 60, 단축의 길이가 40인 타원에 직사각형을 내접시킬 때, 이 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하여라.



8. 점 (1, 0)을 지나고 기울기가 -1인 직선이 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$과 만나는 두 점 A, B
와 점 C$(-1,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle$ABC의 둘레의 길이를 구하여라.

9. 좌표평면 위의 두 점 A$(3,\ 1)$, B$(-1,\ 1)$로부터의 거리의 차가 2인 점 P$(x,\ y)$의 자취의 방정식을 구하여라.

10. 점 (2, 0)을 지나는 직선이 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$의 $x \geq 0$인 부분과 두 점 A, B에서 만난다고 하자. 점 A, B와 점 C$(-2,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 23일 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하여라.

11. 이차곡선 $3kx^2+(k-4)y^2+2x-6y+1=0$이 쌍곡선이 되는 정수 k의 개수를 구하여라.

12. 집합 $S=\{(x,\ y)|x^2+Ay^2+2x+2By+1=0\}$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 골라라.

ㄱ $A=1,\ B\neq 0$이면 원을 나타낸다.
ㄴ $A=0,\ B\neq 0$이면 포물선을 나타낸다.
ㄷ $A<0,\ B\neq 0$이면 쌍곡선을 나타낸다.
ㄹ $A>0,\ A\neq 1,\ B\neq 0$이면 타원을 나타낸다.

학년 반 번

중단원 TEST

이름:__________

1. 다음 식에서 $\frac{dy}{dx}$를 구하여라.

$$x^3-2xy+y^3=0$$

2. 곡선 $x^3+2y^3=3$에서 $x=1$에서의 순간변화율을 구하여라.

3. 곡선 $x^2-4y^2=1$위의 점 $\left(2,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선의 기울기를 구하여라.

4. 쌍곡선 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점 (3, 1)에서의 접선의 방정식을 구하여라.

5. 곡선 $x^2-y^2=3$ 위의 점 (2, 1)에서의 접선의 기울기를 구하여라.

6. 음함수 $x^3+y^3+axy+b=0$의 그래프 위의 점 (1, 2)에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값이 $\frac{1}{10}$일 때, ab의 값을 구하여라.

7. 곡선 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 위의 임의의 점에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{OQ}}$의 길이를 구하여라. (단, $a>0$)

8. 매개변수 t에 대하여 $x=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2-6t$, $y=\frac{1}{3}t^3-9t$일 때, $t=3$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값을 구하여라.

9. $x=2t$, $y=t^2+t+1$일 때, $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$를 구하여라.

10. 매개변수 t에 대하여 $x=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2-6t$, $y=\frac{1}{3}t^3-9t$일 때, $t=3$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값을 구하여라.

11. $x=t-\frac{1}{t}$, $y=t+\frac{1}{t}$일 때, $t=2$에서의 접선의 기울기를 구하여라.

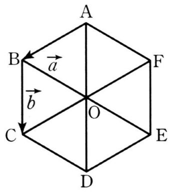
12. 매개변수 t로 나타내어진 곡선 $x=1+t^2$, $y=2-t-t^2$에 대하여 $t=1$에 대응하는 점에서 이 곡선에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

Ⅱ. 평면벡터　　1. 벡터의 연산　　　　학년　반　번

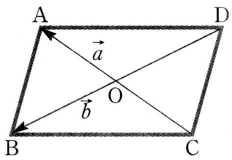
중단원 TEST

이름:

1. 오른쪽 정육각형 ABCDEF 에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$라 할 때, $\overrightarrow{BO}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 이용하여 나타내어라.



2. 평행사변형 ABCD에서 대각선의 교점을 O라 하고, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라 할 때, $\overrightarrow{AD}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.



3. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}$를 간단히 하여라.

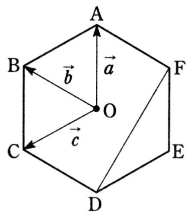
4. 원점 O와 세 점 A, B, C에 대하여
$\overrightarrow{OA}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=4\vec{a}+m\vec{b}$
일 때, 세 점 A, B, C가 일직선 위에 있도
록 하는 실수 m의 값을 구하여라.

5. 식 $4\vec{x}-3\vec{a}=2\vec{b}+\vec{x}$을 만족하는 $\vec{x}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.

6. 영벡터가 아니고, 평행이 아닌 두 벡터 $\vec{x}$, $\vec{y}$에 대하여 $\vec{x}=-2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{y}=3\vec{a}-5\vec{b}$ 일 때, $\vec{a}+\vec{b}=m\vec{x}+n\vec{y}$가 성립할 때, 실수 m, n의 값을 구하여라.

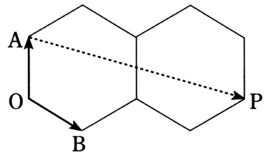
7. $\triangle$ABC의 변 BC의 중점을 D, 무게중심을 G라 하고, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라 할 때, $\overrightarrow{AG}$를 $\vec{a}$와 $\vec{b}$로 나타내어라.

8. 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형의 중심을 O라 하자. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ 일 때, $\overrightarrow{DF}$의 크기를 구하여라.



9. 평면 위에 삼각형 ABC와 점 P가 있다. $2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$가 성립할 때, 점 P의 위치를 말하여라.

10. 오른쪽 그림과 같이 정육각형 두 개가 한 변을 공유하고 있다.



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$
라고 할 때, $\overrightarrow{AP}=m\vec{a}+n\vec{b}$이다. 이때 $m+n$의 값을 구하여라. (단, m, n은 실수이다.)

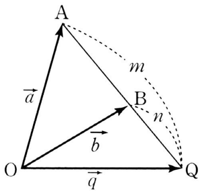
11. 점 O를 시점으로 하고 서로 평행하지 않은 세 개의 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $4\vec{a}+k\vec{b}$의 종점이 한 직선 위에 있을 때, 실수 k의 값을 정하여라.

12. 사각형 ABCD에서
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$가 성립한다.
이때 사각형의 모양을 말하여라.

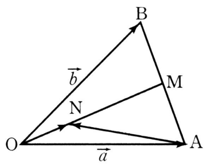
중단원 TEST

이름:

1. 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라 하고, 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점 Q의 위치벡터를 $\vec{q}$라 할 때, $\vec{q}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.

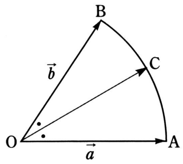


2. 오른쪽 그림과 같은 $\triangle$OAB에서 $\overline{AB}$의 중점을 M이라 하고, $\overline{OM}$을 $1:2$로 내분하는 점을 N이라 한다. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라고 할 때, $\overrightarrow{AN}$을 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.

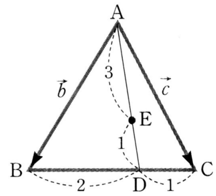


3. $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$인 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{x}=\sqrt{2}\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{y}=-\vec{a}+\sqrt{2}\vec{b}$일 때, $\vec{x}$의 $\vec{y}$ 위로의 정사영의 크기는 $\sqrt{m}$이다. m의 값을 구하여라.

4. 오른쪽 그림과 같이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 OAB에서 $\overline{OC}$는 $\angle$AOB의 이등분선이다. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$일 때 $\overrightarrow{OC}=m\vec{a}+n\vec{b}$이다. 이때 $m+n$의 값을 구하여라.



5. 오른쪽 그림과 같이 $\triangle$ABC의 한 변 BC를 $2:1$로 내분하는 점을 D, 선분 AD를 $3:1$로 내분하는 점을 E라 하고, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$라 할 때, $\overrightarrow{AE}=x\vec{b}+y\vec{c}$이다. 이때 $x+y$의 값을 구하여라.



6. 평면의 두 벡터 $\vec{a}=(9,\ 2t)$, $\vec{b}=(8t,\ 1)$이 서로 평행할 때, 양수 t의 값을 구하여라.

7. 두 벡터 $\vec{a}=(1,\ 3)$, $\vec{b}=(4,\ -1)$에 대하여 $\overrightarrow{OP}=m\vec{a}+n\vec{b}$ (단, $m+n=2$, $m \ge 0$, $n \ge 0$)을 만족시키는 점 P의 자취의 길이를 구하여라. (단, O는 원점)

8. $\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(x,\ 1)$인 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}+2\vec{b}$와 $2\vec{a}-\vec{b}$가 평행할 때, 실수 x의 값을 구하여라.

9. 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$이고 $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{c}|=6$이다. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.

10. 좌표평면 위의 세 점 A$(4,\ 1)$, B$(-1,\ 0)$, C$(0,\ -4)$와 동점 P에 대하여 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$의 크기가 6 이하라고 한다. 이때 점 P가 위치할 수 있는 영역의 넓이를 구하여라.

11. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{a}-2\vec{b}|=6$일 때, 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값을 구하여라.

12. 벡터 $\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(-2,\ 3)$이 $\overrightarrow{OP}=p\vec{a}+q\vec{b}$, $p+q=1$ (p, q는 실수)를 만족시킬 때, $\overrightarrow{OP}$의 종점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하여라.

Ⅱ. 평면벡터　3. 평면 운동　　학년　반　번

중단원 TEST

이름:

1. 시각 t에 대하여 점 P(x, y)의 위치가
$$x = 3t,\ y = -2t^2 + 4t$$
로 주어졌을 때, P의 속도의 크기가 최소가 되는 점 P의 좌표를 구하여라.

2. 좌표평면에서 점 P(x, y)의 시각 t의 함수로 다음과 같이 주어질 때, $t = \frac{\pi}{2}$에서의 속도와 가속도의 크기를 각각 구하여라.
$$x = 2t - 2\sin t,\ y = -2\cos t$$

3. 평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t일 때의 위치 (x, y)가 $x = t^2 - t,\ y = t^3 - 2t + 4$라 한다. 점 P의 속도 $\vec{v}$와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기가 $45°$일 때의 시각을 구하여라.

4. 함수 $y = \sqrt{x}$의 $x = a$와 $x = b$ 사이에서 그래프의 길이를 나타내는 적분식을 구하여라.

5. 동점 P의 시각 t에서의 위치벡터가 $\vec{p} = (x, y) = (t^3,\ 3t^2 - 1)$일 때, $t = 0$에서 $t = \sqrt{5}$까지 점 P가 이동한 거리를 구하여라.

6. 곡선 $y = \frac{2}{3}\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}}$의 길이가 $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$일 때, 양의 정수 a의 값을 구하여라. (단, $0 \le x \le 1$)

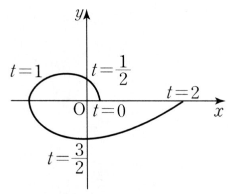
7. 곡선 $y=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$의 $x=-1$에서 $x=1$까지의 길이 l을 구하여라.

8. 평면 위의 동점 P의 t초 후의 위치가 $(x,\ y)=(\cos\pi t,\ \sin\pi t)$로 주어질 때, 점 P의 속력을 구하여라.

9. 평면 위의 동점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 시각 t일 때의 위치는 $x=\cos(t^2+4t)$, $y=\sin(t^2+4t)$이다. 이때 출발 후 3초 동안 점 P가 실제로 움직인 거리를 구하여라.

10. 평면 위에 $x=2\sqrt{2}\sin t$, $y=\dfrac{1}{2}\sin 2t$로 나타내어진 곡선의 길이를 구하여라. $\left(\text{단, } -\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2}\right)$

11. 동점 P의 좌표 $(x,\ y)$가 시각 t의 함수로서 $\begin{cases} x=e^{t}\cos\pi t \\ y=e^{t}\sin\pi t\end{cases}$일 때, $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 경과거리를 구하여라.



12. 평면 위에 좌표 $(3\cos t+\cos 3t,\ 3\sin t-\sin 3t)$로 나타내어지는 점 Q가 있다. t가 $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$의 범위에서 변할 때, 점 Q가 나타내는 곡선의 길이를 구하여라.

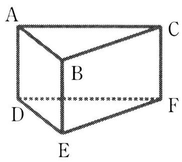
Ⅲ. 공간도형과 공간좌표 1. 공간도형

학년 반 번

중단원 TEST

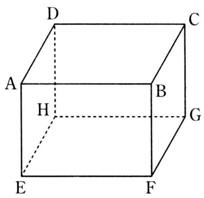
이름:

1. 오른쪽 그림과 같은 삼각기둥에서 모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리를 모두 말하여라.



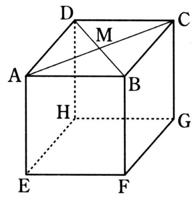
2. 한 직육면체에서 한 모서리와 평행한 모서리의 개수를 a, 한 정사면체에서 한 모서리와 꼬인 위치에 있는 모서리의 개수를 b라 할 때, a, b의 값을 각각 구하여라.

3. 오른쪽 그림과 같은 정육면체 ABCD−EFGH에서 두 직선 AF와 BG가 이루는 각의 크기를 구하여라.

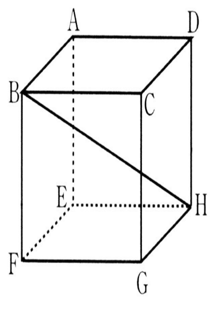


4. 서로 직교하는 세 선분 OA, OB, OC의 길이가 각각 1, 2, 3일 때, △ABC의 넓이를 구하여라.

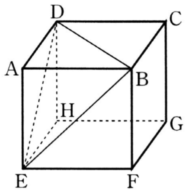
5. 오른쪽 그림과 같은 정육면체 ABCD−EFGH에 대하여 윗면의 두 대각선 AC, BD의 교점을 M이라
고 하자. 이때 두 직선 FH와 EM이 이루는 각의 크기를 구하여라.



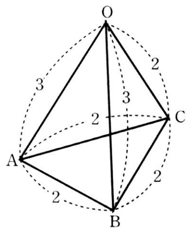
6. 오른쪽 그림과 같은 직육면체 ABCD−EFGH에서 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=\sqrt{3}$, $\overline{CG}=2$일 때, $\overline{BH}$와 $\overline{CD}$가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\cos\theta$의 값을 구하여라.



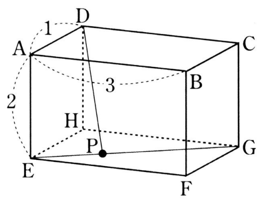
7. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{BC}=2$인 직육면체가 있다. 평면 ABCD와 평면 BDE가 이루는 이면각의 크기가 $60°$일 때 $\overline{AE}$의 길이를 구하여라.



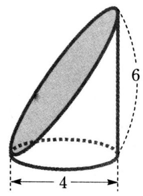
8. 오른쪽 그림과 같은 사면체 OABC에서 $\overline{OA}=\overline{OB}=3$, $\overline{OC}=2$, $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=2$이다. 평면 OAB와 평면 ABC가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.



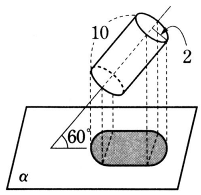
9. 오른쪽 그림과 같이 모서리 AD, AE, AB의 길이가 각각 1, 2, 3인 직육면체 모양의 상자가 있다. 꼭짓점 D와 밑면의 대각선 EG 위의 한 점 P에 구멍을 뚫어 DP를 실로 연결하려고 한다. 이때 실의 길이를 가장 짧게 하는 점 P의 E로부터의 거리를 구하여라.



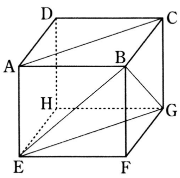
10. 밑면의 지름의 길이가 4인 원기둥을 오른쪽 그림과 같이 자를 때, 어두운 단면의 넓이를 구하여라.



11. 반지름의 길이가 2, 높이가 10인 원기둥이 오른쪽 그림과 같이 평면 α와 $60°$의 각을 이루고 비스듬히 놓여 있다. 이 원기둥의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 구하여라.



12. 한 모서리의 길이가 6인 정육면체 ABCD−EFGH에서 $\triangle ABC$의 평면 BEG 위로의 정사영의 넓이를 구하여라.



Ⅲ. 공간도형과 공간좌표 2. 공간좌표

학년 반 번

중단원 TEST

이름:

1. 점 P$(5,\ 3,\ -4)$의 xy평면에 대한 대칭점을 Q, 원점에 대한 대칭점을 R라 할 때, 두 점 Q, R의 좌표를 구하여라.

2. 좌표공간의 세 점 A$(a,\ b,\ 1)$, B$(3,\ 2a,\ b)$, C$(2b,\ k,\ a)$를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심이 G$(4,\ 2,\ -1)$일 때, 실수 k의 값을 구하여라.

3. 좌표공간의 세 점 A$(3,\ 1,\ 2)$, B$(-1,\ 5,\ 2)$, C$(2,\ -1,\ 1)$로부터 같은 거리에 있는 xy평면 위의 점을 P$(a,\ b,\ c)$라 할 때 $a+b+c$의 값을 구하여라.

4. 세 점 A$(1,\ 2,\ 1)$, B$(2,\ 3,\ -1)$, C$(0,\ 4,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.

5. 점 P$(3,\ 4,\ 6)$의 xy평면에 대한 대칭점을 Q, z축에 대한 대칭점을 R라 할 때, $\triangle$PQR의 넓이를 구하여라.

6. 좌표공간에서 두 점 O$(0,\ 0,\ 0)$, A$(1,\ 0,\ 0)$이 있고, 점 P$(x,\ y,\ z)$는 $\triangle$OAP의 넓이가 2가 되도록 움직인다. $0 \le x \le 1$일 때, 점 P가 나타내는 도형을 평면 위에 펼쳤을 때의 넓이를 구하여라.

7. 좌표공간에서 점 $A(2,\ 3,\ 4)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P, 점 A를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 할 때, 선분 PQ를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표를 구하여라.

8. 두 점 $A(2,\ -1,\ 1)$, $B(0,\ 1,\ -1)$을 이은 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점 P와 외분하는 점 Q에 대하여 두 점 P, Q의 중점 M의 좌표를 구하여라.

9. 구 $x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+k=0$이 평면 $z=1$과 만나서 생기는 도형의 넓이가 25π일 때, k의 값을 구하여라.

10. 두 개의 구

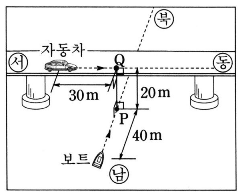
$x^2+y^2+z^2-6=0$,

$x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-3=0$

이 만나서 생기는 교선을 품고 원점을 지나는 구의 반지름의 길이를 구하여라.

11. 구 $x^2+y^2+z^2-4x+8y-10z=19$가 xy평면과 만나서 생기는 원의 넓이를 구하여라.

12. 보트가 남쪽에서 북쪽으로 10m/s의 일정한 속도로 호수 위를 지나가고 있다. 수면 위 20m의 높이에 동서로 놓인 다리 위를 자동차가 서쪽에서 동쪽으로 20m/s의 일정한 속도로 달리고 있다. 위의 그림과 같이 지금 보트는 수면 위의 점 P에서 남쪽 40m, 자동차는 다리 위의 점 Q에서 서쪽 30m 지점에 각각 위치해 있다. 보트와 자동차 사이의 거리가 최소가 될 때의 거리를 구하여라. (단, 자동차와 보트의 크기는 무시하고, $\overline{PQ}$는 자동차와 보트의 경로에 각각 수직이다.)



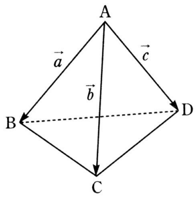
Ⅲ. 공간도형과 공간좌표 3. 공간벡터

학년 반 번

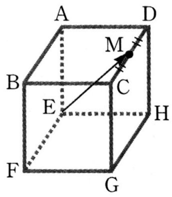
중단원 TEST

이름:

1. 한 모서리의 길이가 $10\sqrt{6}$ 인 정사면체 A$-$BCD에서, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$로 놓을 때, $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$의 값을 구하여라.



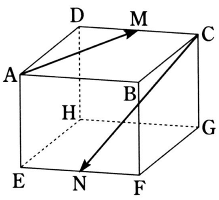
2. 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정육면체 ABCD$-$EFGH에서 $\overline{CD}$의 중점을 M이라 하자. $\overrightarrow{EM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{BC}+z\overrightarrow{AE}$가 성립할 때, $x+y+z$의 값을 구하여라.



3. 크기가 4이고 x축, y축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 각각 60°, 45°인 공간벡터 $\vec{a}$를 구하여라.

4. 두 벡터 $\vec{a}=(2,\ 2,\ 1)$, $\vec{b}=(2,\ -3,\ -4)$에 모두 수직이고, 크기가 3인 벡터 $\vec{x}$를 모두 구하여라.

5. 한 모서리의 길이가 1인 정육면체 ABCD$-$EFGH에서 모서리 CD의 중점을 M, EF의 중점을 N이라고 한다. 이때 두 벡터 $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{CN}$의 내적 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CN}$의 값을 구하여라.



6. 좌표공간에서 두 직선

$$l_1 : \frac{x+4}{2}=\frac{y-1}{\sqrt{3}}=\frac{z-2}{a},$$

$$l_2 : \frac{x+1}{2\sqrt{3}}=y+1=\frac{z+1}{\sqrt{3}}$$

이 이루는 각의 크기가 30°일 때, 실수 a의 값을 구하여라. (단, $a\ge 1$)

7. 점 $A(1, 2, 3)$을 지나고 $\overrightarrow{u}=(-2, 1, 2)$에 평행한 직선의 방정식을 구하여라.

8. 점 $P(1, 2, 3)$을 지나고 직선 $2-x=\dfrac{y-1}{2}=z+3$에 수직인 평면의 법선 벡터를 구하여라.

9. 구 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$ 위의 점에서 평면 $x+y+z=10$에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

10. 다음 두 평면이 이루는 각의 크기를 구하여라.

$$3x+4y+5z=1,\ -x+7y+10z=5$$

11. 두 평면 $3x-3y-2z+5=0,\ 2x-y-z+2=0$의 교선과 수직이고 $(2, 1, -1)$을 지나는 평면의 방정식을 구하여라.

12. 세 점 $A(1, -1, 1)$, $B(1, -2, 0)$ $C(-1, 3, 2)$를 지나는 평면의 방정식을 구하여라.

중단원 TEST 풀이

1. $y^2+4y-2x+6=0$에서

$(y+2)^2=2(x-1)$

이것은 포물선 $y^2=2x$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 포물선이다.

$y^2=2x=4\times\frac{1}{2}x$의

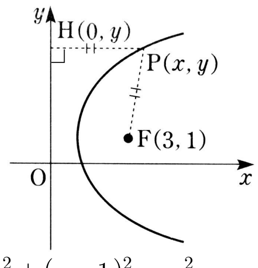
초점은 $\mathrm{F}\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, 준선은 $x=-\frac{1}{2}$

이므로 구하는 포물선의 초점과 준선은

$\left(\frac{3}{2},\ -2\right)$, $x=\frac{1}{2}$

<답> $\left(\frac{3}{2},\ -2\right)$, $x=\frac{1}{2}$

2. 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에서 y축에 내린 수선의 발 H는 $\mathrm{H}(0,\ y)$이고 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$이므로 $\overline{\mathrm{PF}}^2=\overline{\mathrm{PH}}^2$이고, $\overline{\mathrm{PH}}=|x|$이다.



$\therefore\ (x-3)^2+(y-1)^2=x^2$

이것을 정리하면

$y^2-6x-2y+10=0$

<답> $y^2-6x-2y+10=0$

3. $y^2-2y-8x-15=0$에서

$y^2-2y+1=8x+16$

$(y-1)^2=8(x+2)$

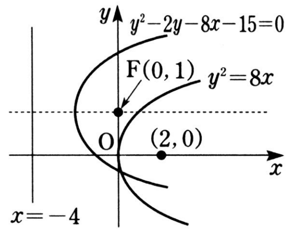
이것은 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 포물선이다.

$y^2=8x$의 초점은 (2, 0), 준선은 $x=-2$

이므로 주어진 포물선의 초점은 (0, 1), 준

선은 $x=-4$이다.

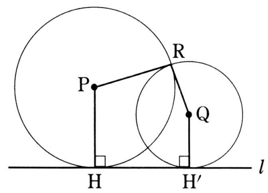
또 대칭축은 x축에 평행한 직선 $y=1$이고, 그래프는 왼쪽으로 볼록한 포물선이므로 보기 중 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣이다.



<답> ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

4. 다음 그림의 P, Q에서 공통으로 외접하는 선 l에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면 $\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PR}}$, $\overline{\mathrm{QH'}}=\overline{\mathrm{QR}}$

이므로 포물선의 정의에 따라 P, Q는 R를 초점으로 하고 직선 l을 준선으로 하는 포물선 위의 점이다.



<답> P, Q

5. 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$

이라 하면 거리의 합은 장축의 길이이므로

$2a=4 \quad \therefore\ a=2$

초점의 x좌표는 $\pm\sqrt{a^2-b^2}=\pm\sqrt{2}$ 이므로

$4-b^2=2 \quad \therefore\ b^2=2$

따라서 타원의 방정식은

$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또, 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에서 원점에 이르는 거리는

$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3}$

$\therefore\ x^2+y^2=3 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $x^2=2,\ y^2=1$

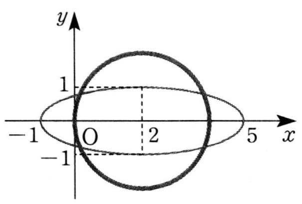
$\therefore\ x^2-y^2=1$

<답> 1

6. 주어진 이차곡선을 표준형으로 정리하면

$(x-2)^2+9y^2=9,\ \dfrac{(x-2)^2}{3^2}+y^2=1$

타원 $\dfrac{x^2}{3^2}+y^2=1$을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 곡선이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 중심이 $(2,\ 0)$인 원과 서로 다른 네 점에서 만나려면 타원과 원이 $(2,\ 1)$, $(2,\ -1)$에서 내접하는 경우의 반지름의 길이가 1이고 $(5,\ 0)$, $(-1,\ 0)$에서 외접하는 경우의 반지름의 길이가 3이므로

$1<a<3$

<답> $1<a<3$

7. 타원의 장축, 단축을 각각 x축, y축으로 하는 좌표평면에서 제1사분면에 있는 직사각형의 꼭짓점을 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$이라고 하면 직사각형의 넓이 S는

$S=4x_1y_1$

타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{30^2}+\dfrac{y^2}{20^2}=1$이고

$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$이 타원 위의 점이므로

$\dfrac{x_1^2}{30^2}+\dfrac{y_1^2}{20^2}=1$

산술 · 기하평균 사이의 관계에서

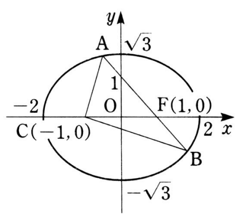
$1=\dfrac{x_1^2}{30^2}+\dfrac{y_1^2}{20^2}\geq 2\sqrt{\dfrac{x_1^2}{30^2}\times\dfrac{y_1^2}{20^2}}=\dfrac{x_1y_1}{300}$

$\therefore\ x_1y_1\leq 300$

따라서 $S=4x_1y_1\leq 1200$이므로 직사각형의 넓이의 최댓값은 1200이다.

<답> 1200

8. 타원 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$의 초점이 $(\pm1,\ 0)$이므로



$(1,\ 0)$을 F라 하면

$\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{AF}}=4$

$\overline{\mathrm{FB}}+\overline{\mathrm{BC}}=4$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}$

$=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{FB}}+\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}=8$

<답> 8

9. $|\overline{\mathrm{PA}}-\overline{\mathrm{PB}}|=2$에서

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}\pm2$이므로

$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$

$=\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}\pm2$

양변을 제곱하여 정리하면

$2x-1=\pm\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

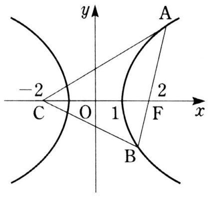
10. 쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$의 초점의 좌표는

$(\pm\sqrt{1^2+3},\ 0)$,

즉 $(\pm 2,\ 0)$

$\mathrm{F}(2,\ 0)$, $\mathrm{C}(-2,\ 0)$에서

쌍곡선의 정의에 의하여



$\overline{\mathrm{AC}}-\overline{\mathrm{AF}}=2$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{BC}}-\overline{\mathrm{BF}}=2$ …… ㉡

주어진 조건에서

$\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{AB}}=23$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$2\overline{\mathrm{AB}}=19 \quad \therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=9.5$

<답> 9.5

11. 이차곡선

$3kx^2+(k-4)y^2+2x-6y+1=0$이 쌍곡선이 되려면 x^2, y^2의 계수가 서로 다른 부호이어야 한다.

$3k(k-4)<0 \quad \therefore\ 0<k<4$

따라서 정수 k는 1, 2, 3의 3개이다.

<답> 3

$3(x-1)^2-(y-1)^2=3$

<답> $3(x-1)^2-(y-1)^2=3$

12. ㉠ $x^2+y^2+2x+2By+1=0$

$(x+1)^2+(y+B)^2=B^2$

즉, 반지름의 길이가 $|B|$인 원이다.

㉡ $x^2+2x+1+2By=0$

$(x+1)^2=-2By$

즉, $B\neq 0$이므로 포물선이다.

㉢ $(x+1)^2+A\left(y^2+\dfrac{2B}{A}y+\dfrac{B^2}{A^2}\right)=\dfrac{B^2}{A}$

$(x+1)^2+A\left(y+\dfrac{B}{A}\right)^2=\dfrac{B^2}{A}$

즉, $A<0$, $B\neq 0$이므로 쌍곡선이다.

㉣ $(x+1)^2+A\left(y+\dfrac{B}{A}\right)^2=\dfrac{B^2}{A}$에서

$A>0$, $A\neq 1$, $B\neq 0$이므로 타원이다.

<답> ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

중단원 TEST 풀이

1. $3x^2-2y-2x\cdot\dfrac{dy}{dx}+3y^2\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

$\dfrac{dy}{dx}(3y^2-2x)=2y-3x^2$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y-3x^2}{3y^2-2x}$

<답> $\dfrac{2y-3x^2}{3y^2-2x}$

2. 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+6y^2\dfrac{dy}{dx}=0$, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x^2}{2y^2}$

$x=1$일 때 $1^3+2y^3=3$에서 $y=1$

$x=1$에서 곡선 $x^3+2y^3=3$의 순간변화율은 $x=1$일 때 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x^2}{2y^2}$이므로

$-\dfrac{1^2}{2\times1^2}=-\dfrac{1}{2}$

<답> $-\dfrac{1}{2}$

3. $x^2-4y^2=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $2x-8y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$ $\quad\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{4y}$

따라서 점 $\left(2,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{2}{4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

<답> $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

4. $\dfrac{1}{3}x-y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$, 즉 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{3y}$이므로

$(3,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{3}{3\times1}=1$이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-1=x-3$, 즉 $y=x-2$

<답> $y=x-2$

5. $x^2-y^2=3$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $2x-2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}$

따라서 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{2}{1}=2$

<답> 2

6. $x^3+y^3+axy+b=0$에서

$\dfrac{d}{dx}(x^3+y^3+axy+b)=0$

$3x^2+3y^2\dfrac{dy}{dx}+ay+ax\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{ay+3x^2}{3y^2+ax}$

점 $(1,\ 2)$에서 $\dfrac{dy}{dx}$의 값이 $\dfrac{1}{10}$이므로

$-\dfrac{2a+3}{12+a}=\dfrac{1}{10}$

$\therefore\ a=-2$

또, 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$1+8-2\times2+b=0 \qquad \therefore\ b=-5$

$a=-2$, $b=-5$이므로

$ab=(-2)\times(-5)=10$

<답> 10

7. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

곡선 위의 임의의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}$

따라서 접선의 방정식은

$y-y_1=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x-x_1)$

$\therefore\ y=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}x+\sqrt{x_1}\sqrt{y_1}+y_1$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(x_1+\sqrt{x_1}\sqrt{y_1},\ 0\right),$

$\mathrm{Q}\left(0,\ \sqrt{x_1}\sqrt{y_1}+y_1\right)$

그런데 점 $(x_1,\ y_1)$은 곡선 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 위의 점이므로 $\sqrt{x_1}+\sqrt{y_1}=\sqrt{a}$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(\sqrt{a}\sqrt{x_1},\ 0\right),\ \mathrm{Q}\left(0,\ \sqrt{a}\sqrt{y_1}\right)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{OQ}}$

$=\sqrt{a}\sqrt{x_1}+\sqrt{a}\sqrt{y_1}$

$=\sqrt{a}\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{y_1}\right)=\sqrt{a}\sqrt{a}=a$

<답> a

8. $\frac{dx}{dt}=t^2-t-6,\ \frac{dy}{dt}=t^2-9$에서

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t^2-9}{t^2-t-6}$

$=\frac{(t-3)(t+3)}{(t-3)(t+2)}=\frac{t+3}{t+2}$

따라서 $t=3$일 때

$\frac{dy}{dx}=\frac{3+3}{3+2}=\frac{6}{5}$

<답> $\frac{6}{5}$

9. $\frac{dx}{dt}=2,\ \frac{dy}{dt}=2t+1$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t+1}{2}$

$\therefore\ \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$

$=\frac{d}{dt}\left(\frac{2t+1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

<답> $\frac{1}{2}$

10. $\frac{dx}{dt}=t^2-t-6,\ \frac{dy}{dt}=t^2-9$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t^2-9}{t^2-t-6}$

$=\frac{(t-3)(t+3)}{(t-3)(t+2)}=\frac{t+3}{t+2}$

따라서 $t=3$일 때

$\frac{dy}{dx}=\frac{3+3}{3+2}=\frac{6}{5}$

<답> $\frac{6}{5}$

11. $\frac{dx}{dt}=1+\frac{1}{t^2},\ \frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{t^2}$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^2}}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$

$t=2$일 때 접선의 기울기는

$\frac{dy}{dx}=\frac{4-1}{4+1}=\frac{3}{5}$

<답> $\frac{3}{5}$

12. $t=1$일 때

$x=1+1^2=2$, $y=2-1-1^2=0$

따라서 접점의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.

$\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=-1-2t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-1-2t}{2t}$$

$t=1$일 때 접선의 기울기는

$$\frac{-1-2\times 1}{2\times 1}=-\frac{3}{2}$$

따라서 접선의 방정식은

$$y=-\frac{3}{2}(x-2)=-\frac{3}{2}x+3$$

<답> $y=-\frac{3}{2}x+3$

중단원 TEST 풀이

1. $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}=\vec{b}+(-\vec{a})$

$=-\vec{a}+\vec{b}$

<답> $-\vec{a}+\vec{b}$

2. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB}$이므로

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=-\vec{a}-\vec{b}$

<답> $-\vec{a}-\vec{b}$

3. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$

<답> $\overrightarrow{DC}$

4. 세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ (k는 실수)

$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$(4\vec{a}+m\vec{b})-(2\vec{a}+\vec{b})=k\{(\vec{a}-\vec{b})-(2\vec{a}+\vec{b})\}$

$2\vec{a}+(m-1)\vec{b}=-k\vec{a}-2k\vec{b}$

$2=-k,\ m-1=-2k$에서

$k=-2,\ m=5$

<답> 5

5. $4\vec{x}-3\vec{a}=2\vec{b}+\vec{x}$에서

$4\vec{x}-\vec{x}=3\vec{a}+2\vec{b}$

$3\vec{x}=3\vec{a}+2\vec{b}$

$\therefore\ \vec{x}=\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

<답> $\vec{x}=\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

6. $\vec{x}=-2\vec{a}+3\vec{b}$ …… ㉠,

$\vec{y}=3\vec{a}-5\vec{b}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\vec{a}=-5\vec{x}-3\vec{y},\ \vec{b}=-3\vec{x}-2\vec{y}$

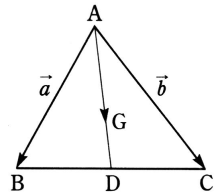
$\therefore\ \vec{a}+\vec{b}=-8\vec{x}-5\vec{y}$

두 벡터 $\vec{x}$, $\vec{y}$는 평행이 아니므로

$m=-8,\ n=-5$

<답> $m=-8,\ n=-5$

7. 다음 그림에서



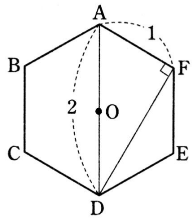
$\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ …… ㉠

$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$

<답> $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$

8. $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$의 크기는 선분 DF의 길이이므로 주어진 정육각형에서 두 점 A와 D를 이으면 $\triangle$EFD에서



$\overline{\mathrm{EF}}=\overline{\mathrm{ED}}$,

$\angle \mathrm{FED}=120^{\circ}$

$\therefore\ \angle \mathrm{EFD}=\angle \mathrm{EDF}$

$$=\frac{1}{2}(180^{\circ}-120^{\circ})=30^{\circ}$$

$\angle \mathrm{AFD}=\angle \mathrm{AFE}-\angle \mathrm{EFD}$

$=120^{\circ}-30^{\circ}=90^{\circ}$

따라서 $\triangle$ADF는 $\angle \mathrm{F}=90^{\circ}$인 직각삼각형이 된다. 이때 $\overline{\mathrm{AF}}=1$, $\overline{\mathrm{AD}}=2$이므로

$\overline{\mathrm{DF}}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

<답> $\sqrt{3}$

9. $2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+4\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})+(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})$

$+4(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

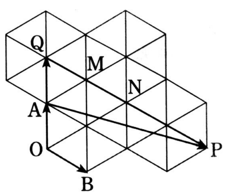
$7\overrightarrow{\mathrm{OP}}=3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{7}$

따라서 점 P는 선분 AC를 4 : 3으로 내분하는 점이다.

<답> 선분 AC를 4 : 3으로 내분하는 점

10. 선분 OA의 연장선 위에 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AQ}}$인 점 Q를 잡으면



$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$

또, $\overline{\mathrm{QP}}//\overline{\mathrm{OB}}$이고

$\overline{\mathrm{QP}}$

$=\overline{\mathrm{QM}}+\overline{\mathrm{MN}}+\overline{\mathrm{NP}}$

$=4\overline{\mathrm{OB}}$

이므로 $\overrightarrow{\mathrm{QP}}=4\overrightarrow{\mathrm{OB}}=4\vec{b}$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\vec{a}+4\vec{b}$이므로

$m+n=1+4=5$

<답> 5

11 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=4\vec{a}+k\vec{b}$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=3\vec{a}+k\vec{b}$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (t는 실수)이므로

$3\vec{a}+k\vec{b}=t(\vec{b}-\vec{a})$

$(3+t)\vec{a}=(t-k)\vec{b}$ …… ㉠

$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$이므로 ㉠이 성립하려면

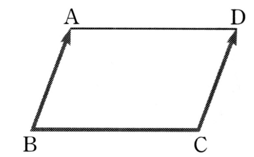
$3+t=0$, $t-k=0$

$\therefore\ t=-3$, $k=t=-3$

<답> -3

12. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$에서

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$가 된다.



$\therefore\ \overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{BA}}//\overline{\mathrm{CD}}$

즉, 마주 보는 한 쌍의 대변이 평행하고, 길이가 같으므로 사각형 ABCD는 평행사변형이다.

<답> 평행사변형

중단원 TEST 풀이

1. $|\overrightarrow{AQ}|:|\overrightarrow{BQ}|=m:n$이고

$\overrightarrow{AQ}$와 $\overrightarrow{BQ}$는 같은 방향이므로

$m\overrightarrow{BQ}=n\overrightarrow{AQ}$

그런데 $\overrightarrow{AQ}=\vec{q}-\vec{a}$, $\overrightarrow{BQ}=\vec{q}-\vec{b}$이므로

$m(\vec{q}-\vec{b})=n(\vec{q}-\vec{a})$

$(m-n)\vec{q}=-n\vec{a}+m\vec{b}$

$\therefore\ \vec{q}=\dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}\ (m\neq n)$

<답> $\vec{q}=\dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}\ (m\neq n)$

2. $\overline{ON}:\overline{NM}=1:2$이므로

$\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

$=\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}$

$\therefore\ \overrightarrow{AN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OA}$

$=\left(\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}\right)-\vec{a}$

$=-\dfrac{5}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}$

<답> $-\dfrac{5}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}$

3. $|\vec{y}|^2=|-\vec{a}+\sqrt{2}\vec{b}|^2$

$=|\vec{a}|^2-2\sqrt{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+2|\vec{b}|^2=10$

$\therefore\ |\vec{y}|=\sqrt{10}$

$\vec{x}\cdot\vec{y}=(\sqrt{2}\vec{a}-2\vec{b})\cdot(-\vec{a}+\sqrt{2}\vec{b})$

$=-\sqrt{2}|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}-2\sqrt{2}|\vec{b}|^2$

$=-2\sqrt{2}-8\sqrt{2}$

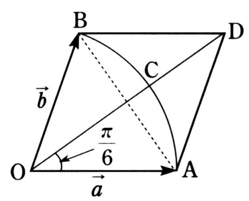
$=-10\sqrt{2}$

$\therefore\ ||\vec{x}|\cos\theta|=\dfrac{|\vec{x}\cdot\vec{y}|}{|\vec{y}|}$

$=\left|\dfrac{-10\sqrt{2}}{\sqrt{10}}\right|=\sqrt{20}$

<답> 20

4. 다음 그림과 같이 마름모를 이용하면



$|\overrightarrow{OA}|:|\overrightarrow{OD}|=1:\left(2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=1:\sqrt{3}$

따라서 $|\overrightarrow{OC}|:|\overrightarrow{OD}|=1:\sqrt{3}$이고

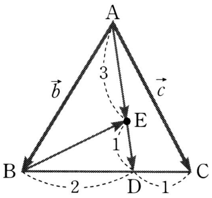
$\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

$=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\vec{a}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\vec{b}$

$\therefore\ m+n=\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

<답> $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

5. $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$를 구한다.



그런데 점 E는 $\overline{\mathrm{AD}}$를 $3:1$로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{BD}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{3+1}$$

또한, $\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})$

$$=\frac{2}{3}(\vec{c}-\vec{b})$$

즉, $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\dfrac{3\left\{\frac{2}{3}(\vec{c}-\vec{b})\right\}-\vec{b}}{4}=\dfrac{2\vec{c}-3\vec{b}}{4}$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}$

$$=\vec{b}+\frac{2\vec{c}-3\vec{b}}{4}=\frac{2\vec{c}+\vec{b}}{4}$$

$$=\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}=x\vec{b}+y\vec{c}$$

$\therefore\ x+y=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

<답> $\frac{3}{4}$

6. $\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=k\vec{b}$ (k는실수)

$\Leftrightarrow (9,\ 2t)=k(8t,\ 1)$

$\Leftrightarrow 9=8kt,\ 2t=k$

이 식에서 k를 소거하면

$9=16t^2 \quad \therefore\ t^2=\frac{9}{16}$

$t>0$이므로 $t=\frac{3}{4}$

<답> $\frac{3}{4}$

7. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$라고 하면

$(x,\ y)=m(1,\ 3)+n(4,\ -1)$

$=(m+4n,\ 3m-n)$

$\therefore\ \begin{cases} x=m+4n & \cdots\cdots ㉠ \\ y=3m-n & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$m+n=2$이므로 $n=2-m$이고

㉠, ㉡에서

$x=m+4(2-m)=-3m+8 \quad \cdots\cdots ㉢$

$y=3m-(2-m)=4m-2 \quad \cdots\cdots ㉣$

㉣에서 $m=\frac{y+2}{4}$를 ㉢에 대입하면

$x=-\frac{3(y+2)}{4}+8=\frac{-3y+26}{4}$

$\therefore\ 4x+3y=26$

그런데 $m\geq 0,\ n=2-m\geq 0$에서

$0\leq m\leq 2$이고 ㉢에서 $2\leq x\leq 8$

즉, 점 P의 자취는 두 점 $(2,\ 6)$, $(8,\ -2)$

를 잇는 선분이므로 그 길이는

$\sqrt{(8-2)^2+(-2-6)^2}=10$

<답> 10

8. $\vec{a}+2\vec{b}=(1,\ 2)+2(x,\ 1)$

$=(2x+1,\ 4)$

$2\vec{a}-\vec{b}=2(1,\ 2)-(x,\ 1)$

$=(2-x,\ 3)$

$(\vec{a}+2\vec{b})//(2\vec{a}-\vec{b})$이므로

$(2x+1,\ 4)=t(2-x,\ 3)$ ($t\neq 0$인 실수)

$=(2t-tx,\ 3t)$

$2x+1=2t-tx,\ 4=3t$에서

$t=\frac{4}{3},\ x=\frac{1}{2}$

<답> $\frac{1}{2}$

9. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$에서 $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$

$\therefore\ |\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{c}|=6$

양변을 제곱하면

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=36,\ (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=36$

$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=36,$

$4^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+5^2=36$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\dfrac{-\dfrac{5}{2}}{4\cdot5}=-\dfrac{1}{8}$

<답> $-\dfrac{1}{8}$

10. $\mathrm{P}(x,\ y)$로 놓으면

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(4-x,\ 1-y),\ \overrightarrow{\mathrm{PB}}=(-1-x,\ -y),$

$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=(-x,\ -4-y)$

이므로

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=(3-3x,\ -3-3y)$

$\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$

$=\sqrt{(3-3x)^2+(-3-3y)^2}\le 6$

$(3-3x)^2+(-3-3y)^2\le 36$

$(x-1)^2+(y+1)^2\le 4$이므로 점 P가 위치할 수 있는 영역의 넓이는 4π이다.

<답> 4π

11. $|\vec{a}-2\vec{b}|^2=(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$6^2=2^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\cdot3^2$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=1$

<답> 1

12. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$로 놓으면

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=p\vec{a}+q\vec{b}$에서

$(x,\ y)=p(1,\ 2)+q(-2,\ 3)$

이때 $p+q=1$에서 $p=1-q$이므로

$x=p-2q=1-3q$

$y=2p+3q=2+q$

두 식에서 q를 소거하면 $x+3y=7$

<답> 직선 $x+3y=7$

Ⅱ. 평면벡터　3. 평면 운동

중단원 TEST 풀이

1. $x=3t$, $y=-2t^2+4t$ 에서

$\dfrac{dx}{dt}=3$, $\dfrac{dy}{dt}=-4t+4=4(1-t)$

시각 t 에서의 점 P의 속도를 $\vec{v}$ 라 하면

$|\vec{v}|^2=\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=9+16(t-1)^2$

따라서 속도의 크기가 최소가 되는 것은 $t=1$ 일 때이므로 이때의 점 P의 좌표는 $(3,\ 2)$이다.

<답> $(3,\ 2)$

2. $\dfrac{dx}{dt}=2(1-\cos t)$, $\dfrac{dy}{dt}=2\sin t$

$\therefore\ \vec{v}=(2(1-\cos t),\ 2\sin t)$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=2\sin t$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=2\cos t$

$\therefore\ \vec{a}=(2\sin t,\ 2\cos t)$

$t=\dfrac{\pi}{2}$ 에서의 속도와 가속도의 크기는

$|\vec{v}|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+0^2}=2$

<답> 속도의 크기 $2\sqrt{2}$, 가속도의 크기 2

3. $x=t^2-t$, $y=t^3-2t+4$ 에서

$\dfrac{dx}{dt}=2t-1$, $\dfrac{dy}{dt}=3t^2-2$

따라서 시각 t 일 때의 속도 $\vec{v}$ 는

$\vec{v}=(2t-1,\ 3t^2-2)$

속도 $\vec{v}$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 이므로 $\dfrac{dy}{dx}=1$ 에서

$\dfrac{3t^2-2}{2t-1}=1$, $3t^2-2t-1=0$

$(3t+1)(t-1)=0\quad\therefore\ t=1\ (\because\ t>0)$

<답> 1

4. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 이므로 주어진 구간에서의 그래프의 길이 l 은

$l=\displaystyle\int_a^b\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+\dfrac{1}{4x}}\,dx$

<답> $\displaystyle\int_a^b\sqrt{1+\dfrac{1}{4x}}\,dx$

5. $\dfrac{dx}{dt}=3t^2$, $\dfrac{dy}{dt}=6t$ 이므로 이동한 거리 s 는

$s=\displaystyle\int_0^{\sqrt{5}}\sqrt{(3t^2)^2+(6t)^2}\,dt$

$\displaystyle=\int_0^{\sqrt{5}}3t\sqrt{t^2+4}\,dt$

$t^2+4=u$ 로 놓으면 $\dfrac{du}{dt}=2t$

$t=0$ 일 때 $u=4$, $t=\sqrt{5}$ 일 때 $u=9$ 이므로

$s=\displaystyle\int_4^9 3\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{u}\,du=\Big[u^{\frac{3}{2}}\Big]_4^9=19$

<답> 19

6. $y=\dfrac{2}{3}\sqrt{a}\,x^{\frac{3}{2}}$ 에서 $y'=\sqrt{ax}$

$0\le x\le 1$ 일 때 곡선의 길이를 l 이라 하면

$l=\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+ax}\,dx$

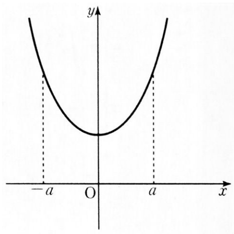
$=\Big[\dfrac{2}{3a}(1+ax)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1=\dfrac{2}{3a}\left\{(1+a)^{\frac{3}{2}}-1\right\}$

$=\dfrac{2}{3a}\{(1+a)\sqrt{1+a}-1\}=\dfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

따라서 a 는 양의 정수이므로 $a=1$

<답> 1

7. 주어진 곡선은 오른쪽 그림과 같이 y축에 대하여 대칭이다.



$y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ 이므로

$1 + y'^2$

$= 1 + \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$

$= \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2$

$\therefore\ l = 2\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + y'^2}\,dx$

$= 2\displaystyle\int_0^1 \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}dx$

$= \left[e^x - e^{-x}\right]_0^1 = e - \dfrac{1}{e}$

<답> $e - \dfrac{1}{e}$

8. $\vec{v} = (v_x,\ v_y) = \left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$

$= (-\pi\sin \pi t,\ \pi\cos \pi t)$

$\therefore\ |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$= \pi\sqrt{\sin^2 \pi t + \cos^2 \pi t} = \pi$

<답> π

9. $\dfrac{dx}{dt} = -(2t + 4)\sin(t^2 + 4t)$,

$\dfrac{dy}{dt} = (2t + 4)\cos(t^2 + 4t)$

이므로 실제로 움직인 거리 s는

$s = \displaystyle\int_0^3 \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

$= \displaystyle\int_0^3 \sqrt{4(t+2)^2}\,dt = \int_0^3 2(t+2)dt$

$= \left[t^2 + 4t\right]_0^3 = 21$

<답> 21

10. $\dfrac{dx}{dt} = 2\sqrt{2}\cos t,\ \dfrac{dy}{dt} = \cos 2t$

$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$

$= 8\cos^2 t + \cos^2 2t$

$= 4\cos^4 t + 4\cos^2 t + 1$

$= (2\cos^2 t + 1)^2 = (\cos 2t + 2)^2$

따라서 곡선의 길이 l은

$l = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 2)dt$

$= 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 2)dt$

$= 2\left[\dfrac{\sin 2t}{2} + 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi$

<답> 2π

11. $\dfrac{dx}{dt} = e^t(\cos \pi t - \pi\sin \pi t)$

$\dfrac{dy}{dt} = e^t(\sin \pi t + \pi\cos \pi t)$

$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 = e^{2t}(1 + \pi^2)$

$l = \displaystyle\int_0^2 \sqrt{1+\pi^2}\,e^t dt$

$= \sqrt{1+\pi^2}\left[e^t\right]_0^2 = \sqrt{1+\pi^2}\,(e^2 - 1)$

<답> $\sqrt{1+\pi^2}\,(e^2 - 1)$

12. $\dfrac{dx}{dt} = -3\sin t - 3\sin 3t$

$\dfrac{dy}{dt} = 3\cos t - 3\cos 3t$

$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$

$= 9\{(\sin t + \sin 3t)^2 + (\cos t - \cos 3t)^2\}$

$= 9(2 - 2\cos 4t)$

$= (6\sin 2t)^2$

따라서 곡선의 길이 l은

$l = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\sin 2t\,dt = \left[-3\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6$

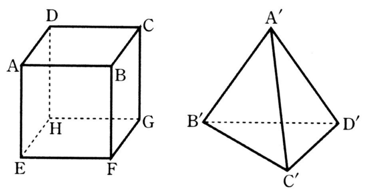
<답> 6

중단원 TEST 풀이

1. 모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리는 $\overline{EF}$, $\overline{CF}$, $\overline{DF}$이다.

<답> $\overline{EF}$, $\overline{CF}$, $\overline{DF}$

2. 다음 그림에서



모서리 AB와 평행한 모서리는 $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$

또, 모서리 A′B′과 꼬인 위치에 있는 모서는 $\overline{C'D'}$

$\therefore\ a=3,\ b=1$

<답> $a=3,\ b=1$

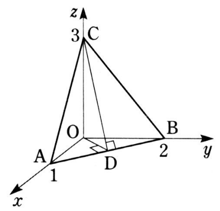
3. $\overleftrightarrow{BG} // \overleftrightarrow{AH}$이므로 $\overleftrightarrow{AF}$와 $\overleftrightarrow{BG}$가 이루는 각의 크기는 $\overleftrightarrow{AF}$와 $\overleftrightarrow{AH}$가 이루는 각의 크기와 같다.

그런데 $\triangle$AFH는 정삼각형이므로

$\angle \mathrm{FAH}=60°$

<답> $60°$

4. C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 D라 하면 삼수선의 정리에 의하여



$\overline{OD} \perp \overline{AB}$

이때

$\triangle \mathrm{OAB}$

$=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{OD}=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}$

$\overline{AB}=\sqrt{5}$, $\overline{OA}=1$, $\overline{OB}=2$이므로

$\overline{OD}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\overline{CD}=\sqrt{\overline{OD}^{\,2}+\overline{OC}^{\,2}}$

$=\sqrt{\frac{4}{5}+3^2}=\frac{7}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ \triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CD}$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{7}{\sqrt{5}}=\frac{7}{2}$

<답> $\frac{7}{2}$

5. $\overline{FH} // \overline{BD}$이므로 직선 EM과 직선 FH이루는 각의 크기는 직선 EM과 직선 BD가 이루는 각의 크기와 같다.

$\overline{EA}\perp$(평면 ABCD), $\overline{AM}\perp\overline{BD}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{EM}\perp\overline{BD}$

즉, $\overline{EM}$과 $\overline{BD}$는 $90°$의 각을 이루고, $\overline{EM}$과 $\overline{FH}$도 $90°$의 각을 이룬다.

<답> $90°$

6. $\overline{BH}=\sqrt{\overline{BF}^2+\overline{FH}^2}$

$=\sqrt{\overline{BF}^2+\overline{FG}^2+\overline{GH}^2}$

$=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2+1^2}$

$=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

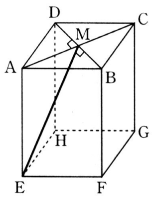
또, $\overline{CD}//\overline{GH}$이므로 $\angle BHG=\theta$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{\overline{GH}}{\overline{BH}}$ $(\because \angle BGH=90^\circ)$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

<답> $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

7. $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 교점을 M이라 하면



$\overline{AB}=\overline{BC}=2$이므로

$\overline{AM}=\sqrt{2}$

$\overline{AM}\perp\overline{BD}$이고

$\overline{BD}\perp\overline{ME}$이므로

$\angle AME=60^\circ$

($\because$ 평면 ABCD와 평면 BDE가 이루는 각이 60°이다.)

$\angle AME=60^\circ$에서

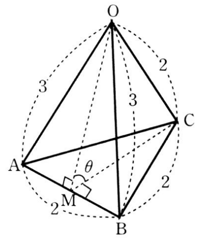
$\tan 60^\circ=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AM}}$

$\therefore\ \overline{AE}=\overline{AM}\tan 60^\circ$

$=\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$

<답> $\sqrt{6}$

8. 선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\triangle OAB$와 $\triangle CAB$는 이등변삼각형이므로



$\overline{OM}\perp\overline{AB}$,

$\overline{CM}\perp\overline{AB}$

$\overline{OM}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

$\overline{CM}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

$\triangle OMC$에서

$\cos\theta=\dfrac{\overline{OM}^2+\overline{CM}^2-\overline{OC}^2}{2\cdot\overline{OM}\cdot\overline{CM}}$

$=\dfrac{7\sqrt{6}}{24}$

<답> $\dfrac{7\sqrt{6}}{24}$

9. 꼭짓점 D에서 $\overline{EG}$에 내린 수선의 발을 P라고 하면

$\overline{DH}\perp$(평면 EFGH), $\overline{DP}\perp\overline{EG}$

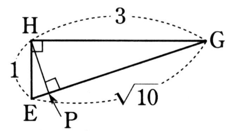
이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{HP}\perp\overline{EG}$

한편,

$\overline{EG}=\sqrt{1^2+3^2}$

$=\sqrt{10}$



이고,

$\triangle HEG \backsim \triangle PEH$

이므로

$\overline{HE}:\overline{PE}=\overline{EG}:\overline{EH}$

$1:\overline{PE}=\sqrt{10}:1$

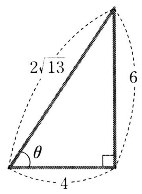
$\overline{PE}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

<답> $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

10. 잘려진 단면의 넓이를 S라 하면

$S\cos\theta = \pi \cdot 2^2$이고

$\tan\theta = \dfrac{6}{4}$이므로



$\cos\theta = \dfrac{4}{2\sqrt{13}} = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$

$S = 4\pi \cdot \dfrac{1}{\cos\theta}$

$= 4\pi \cdot \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

$= 2\sqrt{13}\pi$

<답> $2\sqrt{13}\pi$

11. 입체도형의 윗면과 아랫면의 정사영의 넓이의 합은

$2 \cdot 2\pi \times \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}\pi$

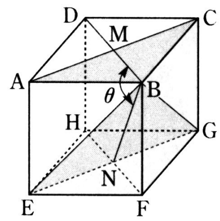
옆면의 정사영의 넓이는

$40 \times \cos 60^\circ = 20$

$\therefore\ S = 20 + 2\sqrt{3}\pi$

<답> $20 + 2\sqrt{3}\pi$

12.



$\triangle$ABC의 넓이는 $\dfrac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$

이때 평면 ABC와 평면 BEG가 이루는 예각의 크기를 θ, $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 교점을 M, $\overline{EG}$와 $\overline{FH}$의 교점을 N이라 하면

$\angle NBM = \theta$이고

$\overline{BM} = \dfrac{1}{2}\overline{BD} = 3\sqrt{2}$

$\overline{BN} = \sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{FN}^2} = \sqrt{6^2 + (3\sqrt{2})^2}$

$= 3\sqrt{6}$

$\therefore\ \cos\theta = \dfrac{\overline{BM}}{\overline{BN}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 구하는 정사영의 넓이를 S라고 하면

$S = 18\cos\theta = 6\sqrt{3}$

<답> $6\sqrt{3}$

Ⅲ. 공간도형과 공간좌표　2. 공간좌표　학년 반 번

중단원 TEST

이름:

1. 점 P(5, 3, -4)의 xy평면에 대한 대칭점을 Q, 원점에 대한 대칭점을 R라 할 때, 두 점 Q, R의 좌표를 구하여라.

2. 좌표공간의 세 점 A(a, b, 1), B(3, $2a$, b), C($2b$, k, a)를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심이 G(4, 2, -1)일 때, 실수 k의 값을 구하여라.

3. 좌표공간의 세 점 A(3, 1, 2), B(-1, 5, 2), C(2, -1, 1)로부터 같은 거리에 있는 xy평면 위의 점을 P(a, b, c)라 할 때 $a+b+c$의 값을 구하여라.

4. 세 점 A(1, 2, 1), B(2, 3, -1), C(0, 4, 0)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.

5. 점 P(3, 4, 6)의 xy평면에 대한 대칭점을 Q, z축에 대한 대칭점을 R라 할 때, △PQR의 넓이를 구하여라.

6. 좌표공간에서 두 점 O(0, 0, 0), A(1, 0, 0)이 있고, 점 P(x, y, z)는 △OAP의 넓이가 2가 되도록 움직인다. $0 \le x \le 1$일 때, 점 P가 나타내는 도형을 평면 위에 펼쳤을 때의 넓이를 구하여라.

7. 좌표공간에서 점 A(2, 3, 4)를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P, 점 A를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 할 때, 선분 PQ를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표를 구하여라.

8. 두 점 A(2, −1, 1), B(0, 1, −1)을 이은 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점 P와 외분하는 점 Q에 대하여 두 점 P, Q의 중점 M의 좌표를 구하여라.

9. 구 $x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+k=0$이 평면 $z=1$과 만나서 생기는 도형의 넓이가 25π일 때, k의 값을 구하여라.

10. 두 개의 구

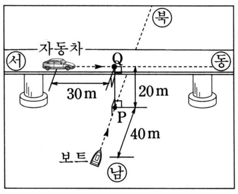
$x^2+y^2+z^2-6=0$,

$x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-3=0$

이 만나서 생기는 교선을 품고 원점을 지나는 구의 반지름의 길이를 구하여라.

11. 구 $x^2+y^2+z^2-4x+8y-10z=19$가 xy평면과 만나서 생기는 원의 넓이를 구하여라.

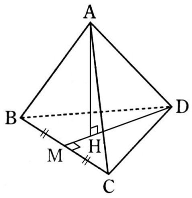
12. 보트가 남쪽에서 북쪽으로 10m/s의 일정한 속도로 호수 위를 지나가고 있다. 수면 위 20m의 높이에 동서로 놓인 다리 위를 자동차가 서쪽에서 동쪽으로 20m/s의 일정한 속도로 달리고 있다. 위의 그림과 같이 지금 보트는 수면 위의 점 P에서 남쪽 40m, 자동차는 다리 위의 점 Q에서 서쪽 30m 지점에 각각 위치해 있다. 보트와 자동차 사이의 거리가 최소가 될 때의 거리를 구하여라. (단, 자동차와 보트의 크기는 무시하고, $\overline{PQ}$는 자동차와 보트의 경로에 각각 수직이다.)



Ⅲ. 공간도형과 공간좌표 3. 공간벡터

중단원 TEST 풀이

1. 점 A에서 $\triangle BCD$에 내린 수선의 발을 H라 하면 H는 $\triangle BCD$의 무게중심이므로



$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$\therefore\ |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=3|\overrightarrow{AH}|$

$\triangle BCD$에서

$\overline{DH}=\frac{2}{3}\overline{DM}=\frac{2}{3}\cdot\overline{CD}\cdot\sin 60^\circ$

$=\frac{2}{3}\cdot 10\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{2}$

$\triangle AHD$에서

$\overline{AH}^2=\overline{AD}^2-\overline{HD}^2$

$=(10\sqrt{6})^2-(10\sqrt{2})^2=400$

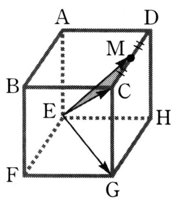
$\therefore\ \overline{AH}=20\quad\therefore\ |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=3\overline{AH}=60$

<답> 60

2. $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GC}$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EA}$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})-\overrightarrow{AE}$



$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\therefore\ \overrightarrow{EM}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CM}$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AE})-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AE}$

$=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{BC}+z\overrightarrow{AE}$

$\therefore\ x+y+z=\frac{1}{2}+1-1=\frac{1}{2}$

<답> $\frac{1}{2}$

3. z축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 γ라 하면 $\cos^2 60^\circ+\cos^2 45^\circ+\cos^2\gamma=1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\cos^2\gamma=1$

$\therefore\ \cos\gamma=\pm\frac{1}{2}$

$\therefore\ \vec{a}=4(\cos 60^\circ,\ \cos 45^\circ,\cos\gamma)$

$=(2,\ 2\sqrt{2},\ \pm 2)$

<답> $(2,\ 2\sqrt{2},\ \pm 2)$

4. $\vec{x}=(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$라 하면 $\vec{x}\perp\vec{a},\ \vec{x}\perp\vec{b}$이므로

$\vec{x}\cdot\vec{a}=2\alpha+2\beta+\gamma=0$ …… ㉠

$\vec{x}\cdot\vec{b}=2\alpha-3\beta-4\gamma=0$ …… ㉡

$|\vec{x}|^2=\vec{x}\cdot\vec{x}=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=9$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하면

$\vec{x}=(1,\ -2,\ 2),\ \vec{x}=(-1,\ 2,\ -2)$

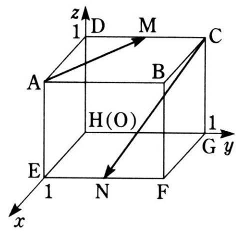
<답> $\vec{x}=(1,\ -2,\ 2),\ \vec{x}=(-1,\ 2,\ -2)$

5. 좌표공간에서 생각하면

$A(1,\ 0,\ 1), M\left(0,\ \frac{1}{2},\ 1\right),$

$C(0,\ 1,\ 1),\ N\left(1,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$

이므로



$\overrightarrow{AM}=\left(-1,\ \frac{1}{2},\ 0\right), \overrightarrow{CN}=\left(1,\ -\frac{1}{2},\ -1\right)$

$\therefore\ \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CN}$

$=(-1)\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+0\cdot(-1)$

$=-\frac{5}{4}$

<답> $-\frac{5}{4}$

6. 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터를 각각 $\overrightarrow{d_1}$, $\overrightarrow{d_2}$ 라고 하면

$\overrightarrow{d_1}=(2,\ \sqrt{3},\ a),\ \overrightarrow{d_2}=(2\sqrt{3},\ 1,\ \sqrt{3})$

$\therefore\ \cos 30^\circ=\frac{\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}}{|\overrightarrow{d_1}|\,|\overrightarrow{d_2}|}$

$=\frac{2\cdot 2\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot 1+a\sqrt{3}}{\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2+a^2}\sqrt{(2\sqrt{3})^2+1^2+(\sqrt{3})^2}}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}(a+5)}{4\sqrt{a^2+7}},\quad 2\sqrt{a^2+7}=a+5$

양변을 제곱하면

$4(a^2+7)=(a+5)^2,\ 3a^2-10a+3=0$

$(3a-1)(a-3)=0$

그런데 $a\geq 1$이므로 $a=3$

<답> 3

7. 점 $A(1,\ 2,\ 3)$을 지나고 $\vec{u}=(-2,\ 1,\ 2)$에

평행한 직선 위의 점을 $P(x,\ y,\ z)$라 하면

$\overrightarrow{AP}=t\vec{u}$ (t는 임의의 실수)

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(x-1,\ y-2,\ z-3)$

이므로

$(x-1,\ y-2,\ z-3)=t(-2,\ 1,\ 2)$

$\therefore\ x=1-2t,\ y=2+t,\ z=3+2t$

세 식에서 t를 소거하면

$\frac{x-1}{-2}=y-2=\frac{z-3}{2}$

<답> $\frac{x-1}{-2}=y-2=\frac{z-3}{2}$

8. 직선과 평면이 수직이면 직선의 방향벡터가 평면의 법선벡터가 된다.

따라서 직선 $2-x=\frac{y-1}{2}=z+3$에 수직인

평면의 법선벡터는 $(-1,\ 2,\ 1)$이다.

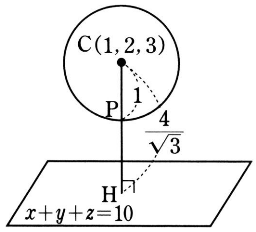
<답> $(-1,\ 2,\ 1)$

9. 다음 그림에서

구 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$의 중심 $C(1,\ 2,\ 3)$에서 평면

$x+y+z-10=0$까지의 거리는

$\overline{CH}=\frac{|1+2+3-10|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$



따라서 구 위의 점 중 선분 CH 위에 있는 점 P가 평면 $x+y+z=10$에 가장 가까운 점이므로 구하는 거리의 최솟값은

$\frac{4}{\sqrt{3}}-1=\frac{4\sqrt{3}-3}{3}$

10. 두 평면의 법선벡터는 차례로

$\overrightarrow{h_1}=(3,\ 4,\ 5)$, $\overrightarrow{h_2}=(-1,\ 7,\ 10)$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{|\overrightarrow{h_1}\cdot\overrightarrow{h_2}|}{|\overrightarrow{h_1}|\,|\overrightarrow{h_2}|}$$

$$=\frac{|3\times(-1)+4\times7+5\times10|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}\ \sqrt{(-1)^2+7^2+10^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{6}$$

<답> $\frac{\pi}{6}$

11. $\begin{cases} 3x-3y-2z+5=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-y-z+2=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠ $-$ ㉡ $\times 2$를 하면 $y=-x+1$

㉡에 대입하면 $x=\frac{z-1}{3}$

따라서 ㉠, ㉡의 교선은

$x=-(y-1)=\frac{z-1}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉢

그러므로 점 $(2,\ 1,\ -1)$을 지나고 ㉢에 수직

인 평면은

$(x-2)-(y-1)+3(z+1)=0$

$\therefore\ x-y+3z+2=0$

<답> $x-y+3z+2=0$

<답> $\frac{4\sqrt{3}-3}{3}$

12. 구하는 평면의 방정식을

$ax+by+cz+d=0$으로 놓고, 이 방정식에 세 점 A, B, C의 좌표를 대입하면

$a-b+c+d=0$, $a-2b+d=0$,

$-a+3b+2c+d=0$

이 연립방정식을 풀어 a, b, d를 c로 나타

내면 $a=-\frac{3}{2}c$, $b=-c$, $d=-\frac{1}{2}c$

그러므로 구하는 평면의 방정식은

$-\frac{3}{2}cx-cy+cz-\frac{1}{2}c=0$

$\therefore\ c\left(-\frac{3}{2}x-y+z-\frac{1}{2}\right)=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

그런데 $c=0$이면 $a=b=c=d=0$이 되어 $ax+by+cz+d=0$이 평면을 나타내지 않으므로 $c\neq0$이다.

따라서 ㉠의 양변을 c로 나누어 정리하면, 구하는 평면의 방정식은

$3x+2y-2z+1=0$

<답> $3x+2y-2z+1=0$