

풍산자는 어떤 책인가?

[풍산자 수학 : 골치 아픈 수학이지만 때로는 무협지를 읽는 듯한 재미와 통쾌함도 느끼고 고향 같은 푸근함도 느끼면서 수학의 기초를 든든하게 닦을 수 있는 책]
이것이 풍산자라는 이름을 가진 책의 희망사항이다.

풍산자 수학이 천동벌거숭이처럼 세상에 나온 지도 10년이 지났다.
새 교육과정에 맞추어 풍산자 수학도 새 단장을 했다.

[좀 더 쉽게, 좀 더 빠르게, 좀 더 확실하게, 그리고 좀 더 재미있게]
이것이 풍산자 수학 개정판의 희망사항이다.

풍산자수학연구소



구성과 특징



풍산자만의 매력

1 학습자의 눈높이에 맞는 개념서

아무리 자세한 개념 설명도 여러분의 눈높이에 맞지 않다면 아무 소용이 없습니다.

풍산자는 바로 옆에서 여러분이 궁금해 하는 부분만을 콕콕 짚어 설명해 주는 과외 선생님 같은 개념서입니다.

2 지루하지 않고 재미있는 개념서

수학은 딱딱하고 어려운 용어로 설명되어 있어 지루하고 재미없는 과목이라고 생각했나요?

풍산자 특유의 유쾌하고 명쾌한 촌철살인의 비유로 여러분이 지루할 틈 없이 수학을 쉽고 재미있게 공부할 수 있도록 도와드리겠습니다.

3 자연스럽게 실력이 쌓이는 개념서

풍산자는 풍산자식 비법으로 핵심개념은 자연스럽게 머릿속에 쑥쑥~ 들어오고, 문제는 솔솔~ 풀리도록 구성되어 있습니다. 또한 개념을 완성하고 문제 해결력을 기르는 데 필요한 최적의 문항과 문항 수로 구성되어 있습니다.

풍산자가 이끄는 대로 따라가다 보면 여러분의 기본 실력이 쑥쑥~ 쌓일 것입니다.

개념정리

주제별로 꼭 알아야 하는 핵심개념만을 모아 정리하였습니다.

풍산자曰

핵심개념이 머릿속에 쑥쑥 들어오도록 풍산자만의 유쾌하고 명쾌한 어법으로 설명하여 풍산자가 여러분의 바로 옆에서 부족한 부분만을 콕콕 짚어 설명해 주는 느낌을 받을 수 있도록 하였습니다.

한 걸음 더

공식 유도 과정, 증명, 중요 유형에 대한 소개 등 좀더 깊이 있게 원리를 이해할 수 있도록 하였습니다.

2 속도와 거리

3 회연 풍종

01 평면 위를 움직이는 점의 이동거리

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 초기 위치 (x, y) 가 $x=f(t), y=g(t)$ 일 때, 시각 $t=a$ 에서 $t=b$ 까지 점 P가 움직인 거리를 s라고 하면

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt$$

직선 운동에서의 점의 이동거리는 이미 미적분에서 학습했다. 점의 이동거리는 속력의 정의로

$$\text{속력 } v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(b) - s(a)}{b - a}$$

그리고 평면 위를 움직이는 점의 이동거리는 점의 이동거리를 같았던 것입니다.

방법론적으로는 점의 이동거리를 속력의 정의로

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_t^{t+\Delta t} \sqrt{(f'(x))^2 + (g'(x))^2} dx}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_t^{t+\Delta t} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$$

02 국선의 길이

반면 구간 $[a, b]$ 위에서 국선 $y=f(x)$ 의 길이를 l이라고 하면 $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

직선 운동에서의 점의 이동거리는 같은 원칙으로 학습했다. 점의 이동거리는 속력의 정의로

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(b) - s(a)}{b - a}$$

그리고 평면 위를 움직이는 점의 이동거리는 점의 이동거리를 같았던 것입니다.

이전 사설 일정을 염두로 했을 때, 국선의 $y=f(x)$ 를 주제로 해 봤습니다.

이전 사설 일정을 염두로 했을 때, 국선의 $y=f(x)$ 를 주제로 해 봤습니다.

$$x=t, y=f(t) \Rightarrow l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

03 경사도

○ 평면 위를 움직이는 점의 이동거리의 확장

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y) 가

$$x=f(t), y=g(t)$$

때, 시각 t에서 점 P가 $(a \leq t \leq b)$ 까지 움직인 거리를 $s(t)$ 라고 하자.

오른쪽 그림과 같이 시각 t에서 $+ds$ 만큼 멀어지면 점 P가 점 Q까지

움직이고 그림과 같이 시각 t의 면적은 ds 가 충분히 작으면 유향인 거리 Q의 범위

회피 $ds = PQ$ 의 값이 $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ 로 계산된다.

$$\therefore \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\int_a^b \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt + \int_a^b \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 dt} = |v|$$

따라서 $s(t) = \int_a^t |v| dt$ 이고 $|v|$ 는 P점의 속력이다. 따라서 $t=a$ 에서 $t=b$ 까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s = \int_a^b |v| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad \Leftrightarrow \text{ (01동거리) = (속력의 정의)}$$



필수예제

꼭 알고 가야할 중요한 문제만을 엄선하였습니다.

'풍산자 式'에서 제시한 문제 해결 전략을 통해 문제 풀이에 좀 더 쉽게 접근할 수 있도록 하였습니다.

대원칙

문제를 풀기 위해 꼭 알아야 할 핵심개념과 법칙, 문제를 푸는 방법 등을 다시 한번 확인하고 넘어갈 수 있도록 정리하였습니다.

유제

필수예제와 유사한 유형의 문제를 반복하여 풀어봄으로써 중요한 유형의 문제는 확실하게 알고 넘어갈 수 있도록 하였습니다.

연습문제

배운 내용을 2단계로 나누어 풀어봄으로써 실력을 점검하고 문제 해결력을 기를 수 있도록 하였습니다. 봄으로써 중요한 유형의 문제는 확실하게 알고 넘어갈 수 있도록 하였습니다.

필수예제 077 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 이동거리

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시간 t에서의 위치 (x, y) 가 $x=2t^2-1, y=\frac{3}{2}t^2-1$ 일 때, 시간 $t=1$ 에서 (x_1, y_1) 까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

풀이 정리 위주 → (파악의 단계) → (속도) → (운동) → (인증) → (인증)

$$\begin{aligned} \text{1 묻기 } & \frac{dx}{dt}=4t, \frac{dy}{dt}=3t \text{이므로 } \frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \text{ } dt=\sqrt{(4t)^2+(3t)^2} dt=\sqrt{5} dt=\left[\frac{5}{2}t^2\right]_1^2=20 \\ & \text{2 인증 } \end{aligned}$$

필수예제 078 곡선의 길이

$-1 \leq x \leq 1$ 일 때, 곡선 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 의 길이를 구하여라.

풀이 곡선 $y=f(x) \iff x=t, y=f(t)$ ⇔ 곡선 $y=\sqrt{1+f'(x)^2}$ 을 그려보면 속도는 $\vec{v}=(1, f'(t))$ 이다.
→ 곡선 $y=\sqrt{1+f'(x)^2}$ 을 그려보면 정역동면은 곡선의 길이다.

$$\begin{aligned} \text{1 묻기 } & l=\int_{-1}^1 \sqrt{1+f'(x)^2} dx=\int_{-1}^1 \sqrt{\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\right)^2} dx=\int_{-1}^1 \frac{e^x-e^{-x}}{2} dx=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_{-1}^1=e-\frac{1}{e} \\ & \text{2 인증 } \end{aligned}$$

곡선 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 은 필수적이어야 하는 곡선이다.

곡선 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 은 양의 절반 고르게는 중간값을 놓으면 좋을 때 발생하는 곡선이다.

이 곡선은 유동에서 연단 달리기 배운 학년도,

센트로시스의 상황을 고려하고 우리나라의 남해 대교, 영종 대교,

유제 093 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시간 t에서의 위치 (x, y) 가 $x=3\sin t+4\cos t, y=4\sin t-3\cos t$ 일 때, 시간 $t=\pi$ 에서 $t=\pi$ 까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

유제 094 $1 \leq x \leq 4$ 일 때, 곡선 $y=\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{x}$ 의 길이를 구하여라.

연습문제

Step 1

118 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시간 t에서의 위치 (x, y) 가 $x=\sqrt{t}, y=2t^2$ 일 때, 점 P의 시간 $t=4$ 에서의 속력은?

119 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시간 t에서의 위치 (x, y) 가 $x=2t^2+1, y=\frac{1}{2}t^2-1$ 일 때, 점 P의 속력이 최소가 되는 순간의 속도를 구하여라. (단, $t>0$)

120 $1 \leq t \leq e$ 일 때, 곡선 $x=\ln t, y=\frac{t}{2}+\frac{1}{2t}$ 의 길이를 구하여라.

121 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시간 t에서의 위치 (x, y) 가 $x=\frac{1}{2}t^2-t, y=\frac{4}{3}\sqrt{t}$ 일 때, 시간 $t=1$ 에서 x좌표가 다시 0이 될 때까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

122 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시간 t에서의 위치 (x, y) 가 $x=e^t\cos t, y=e^t\sin t$ 이다. 점 P의 속력이 $\sqrt{2e}$ 일 때의 시간이 t_1 , 가속도의 크기가 $2e\sqrt{e}$ 일 때의 시간이 t_2 일 때, t_1+t_2 의 값을 구하여라.

123 물로켓과 같이 지면에 버스듬하게 공중으로 쏴 올린 물체는 포물선 운동을 한다. 지면과 60° 의 각을 이루는 방향으로 초당 20 m의 속도로 물로켓을 쏴 올리면 한 번이 초기에 물로켓이 수평으로 날아간 거리 2m, 높이 10m는 각각 $x=10t, y=10(\sqrt{3}-1)t^2$ 이다. 물로켓이 떨어질 때 속력을 구하여라.

124 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시간 t에서의 위치 (x, y) 가 $x=\cos^2 t, y=4\sin^2 t$ 일 때, 시간 $t=0$ 에서 속력이 6이 될 때까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라. (단, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$)

125 $1 \leq x \leq a$ 일 때, 곡선 $y=\frac{1}{8}x^2-\ln x$ 의 길이가 $1+\ln 3$ 이 되도록 하는 유리수 a 의 값을 구하여라. (단, $a>1$)



I 평면곡선

1 이차곡선

1 포물선의 방정식	008
2 포물선의 평행이동	012
• 연습문제	016
3 타원의 방정식	018
4 타원의 평행이동	024
• 연습문제	028
5 쌍곡선의 방정식	030
6 쌍곡선의 평행이동	036
• 연습문제	039

2 평면곡선의 접선

1 음함수의 미분법	042
2 음함수로 나타낸 곡선의 접선의 방정식	044
3 매개변수로 나타낸 함수의 미분법과 접선의 방정식	049
• 연습문제	051

II 평면벡터

1 벡터의 연산

1 벡터의 뜻	054
2 벡터의 덧셈과 뺄셈	056
3 벡터의 실수배	060
• 연습문제	066

2 평면벡터의 성분과 내적

1 위치벡터	070
• 연습문제	074
2 평면벡터의 성분	075
3 평면벡터의 내적	080
• 연습문제	088
4 평면벡터를 이용한 직선의 방정식	090
5 평면벡터를 이용한 원의 방정식	097
• 연습문제	099

3 평면운동

1 속도와 가속도	102
2 속도와 거리	104
• 연습문제	106





III 공간도형과 공간벡터

1 공간도형

1 직선, 평면의 위치 관계	108
2 직선과 평면의 평행과 수직	111
3 삼수선의 정리	115
4 점사영	119
• 연습문제	123

2 공간좌표

1 공간에서의 점의 좌표	126
2 두 점 사이의 거리	129
3 선분의 내분점과 외분점	132
• 연습문제	136
4 구의 방정식	138
• 연습문제	144

3 공간벡터

1 공간벡터의 뜻과 연산	146
2 공간벡터의 성분	153
3 공간벡터의 내적	158
• 연습문제	162
4 직선의 방정식	164
• 연습문제	171
5 평면의 방정식	173
6 공간벡터를 이용한 구의 방정식	181
• 연습문제	183





쉴 새 없이 보다 나은 사람이 되기 위해 노력하자.

어떻게 계속해서 앞으로만 나아갈 것인가.

그것은 오직 노력에 의해 가능하다.

- 툴스토이 -

힘이 들 때 꾸준히 노력하다보면

분명 본인이 원하는 결과물에 도달하거나 꿈을 이룰 수 있습니다.

노력없이는 성공 또한 없다는 생각이 드네요.

꿈을 위해 조금만 힘내세요. 아자!



I 평면곡선



1 이차곡선

2 평면곡선의 접선

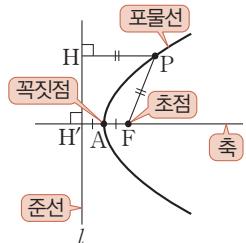


1 포물선의 방정식	008
2 포물선의 평행이동	012
• 연습문제	016
3 타원의 방정식	018
4 타원의 평행이동	024
• 연습문제	028
5 쌍곡선의 방정식	030
6 쌍곡선의 평행이동	036
• 연습문제	039

01 포물선의 정의

평면 위의 한 점 F 와 이 점을 지나지 않는 한 직선 l 이 있을 때, 점 F 와 직선 l 에 이르는 거리가 같은 점의 집합(또는 자취)을 **포물선**이라고 한다.

- (1) **초점** : 점 F
- (2) **준선** : 직선 l
- (3) **축(대칭축)** : 초점 F 를 지나고 준선 l 에 수직인 직선
- (4) **꼭짓점** : 포물선과 축의 교점 A



증명자료 포물선의 대표적인 예는 벚들이 이미 익히 아는 이차함수 $y=a(x-m)^2+n$ ($a\neq 0$)의 그래프.

꼭짓점이 (m, n) 이고, 축이 $x=m$ 인 포물선이다.

이차함수에서는 꼭짓점과 축을 중심으로 포물선을 관찰했다면 이차곡선에서는 전혀 다른 시각으로 포물선을 관찰한다. 이를바 초점과 준선의 관점.

- ① 포물선 위의 점에서 초점까지의 거리와 준선까지의 거리는 같다. $\rightarrow \overline{PF}=\overline{PH}$
- ② 포물선의 꼭짓점은 초점과 준선의 중간에 위치한다. $\rightarrow \overline{FA}=\overline{H'A}$

02 포물선의 방정식

방정식	$(1) y^2=4px$ (단, $p\neq 0$)	$(2) x^2=4py$ (단, $p\neq 0$)
그래프	$p>0$ 	$p>0$
초점의 좌표	$F(p, 0)$	$F(0, p)$
준선의 방정식	$x=-p$	$y=-p$
꼭짓점의 좌표	$(0, 0)$	$(0, 0)$
축의 방정식	$y=0$ (x 축)	$x=0$ (y 축)

증명자료 포물선의 방정식 (1)과 (2)의 비교.

[비교 1] $y^2=4px$ 는 초점이 x 축 위에 있는, x 축의 방향으로 뻗어나가는 그래프.

$x^2=4py$ 는 초점이 y 축 위에 있는, y 축의 방향으로 뻗어나가는 그래프.

[비교 2] 둘 다 꼭짓점이 원점.

증명자료 모든 이차곡선은 초점을 싸고 도는 방향으로 뻗어나간다.

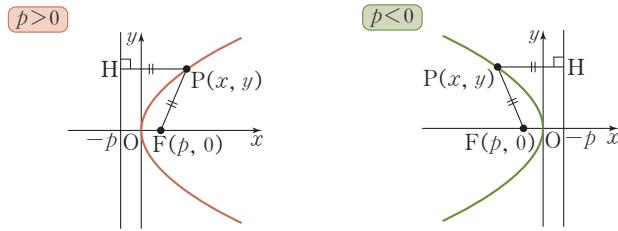
증명자료 $y^2=4px$ 에서 $p>0$ 이면 포물선은 y 축의 오른쪽에 있고, $p<0$ 이면 포물선은 y 축의 왼쪽에 있다.

$x^2=4py$ 에서 $p>0$ 이면 포물선은 x 축의 위쪽에 있고, $p<0$ 이면 포물선은 x 축의 아래쪽에 있다.

한 걸음 더

1 포물선의 방정식(1)

다음 그림의 좌표축 설정은 준선이 y 축에 평행하고, 꼭짓점이 원점이 되도록 한 설정.



이 설정에서 얻은 포물선의 방정식, 즉 초점이 $F(p, 0)$, 준선이 $x = -p$ 인 포물선의 방정식이 바로 포물선의 방정식의 표준형.

이 포물선의 방정식을 구해 보자.

- (i) 포물선 위의 점을 $P(x, y)$ 로 놓는다.
- (ii) 점 P 에서 준선에 내린 수선의 발을 H 라고 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} = \overline{PH}$$

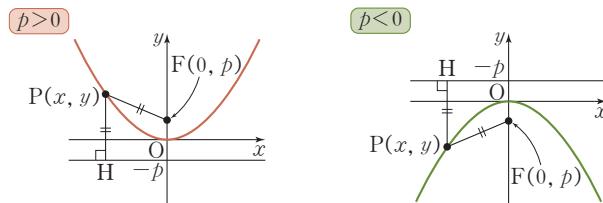
$$\therefore \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = |x - (-p)|$$

- (iii) 양변을 제곱하면

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2 \quad \therefore y^2 = 4px$$

2 포물선의 방정식(2)

다음 그림의 포물선은 초점이 $F(0, p)$, 준선이 $y = -p$ 인 포물선.



1의 포물선 $y^2 = 4px$ 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하면 2의 포물선이 된다.

즉, $y^2 = 4px$ 에서 x 대신 y , y 대신 x 를 대입하면

$$x^2 = 4py$$

필수예제 001**포물선의 방정식**

다음 포물선의 방정식을 구하여라.

- (1) 초점이 $F(2, 0)$, 준선이 $x = -2$ 인 포물선
- (2) 초점이 $F(0, 3)$, 준선이 $y = -3$ 인 포물선

풀이 꼭짓점이 원점인 포물선의 방정식은 다음 공식 한 방이면 구해진다.

- (1) 초점이 $F(p, 0)$, 준선이 $x = -p$ 인 포물선의 방정식 $\rightarrow y^2 = 4px$
- (2) 초점이 $F(0, p)$, 준선이 $y = -p$ 인 포물선의 방정식 $\rightarrow x^2 = 4py$

| 풀이 | (1) $y^2 = 4px$ 에서 $p = 2$ 이므로 $y^2 = 8x$

(2) $x^2 = 4py$ 에서 $p = 3$ 이므로 $x^2 = 12y$

필수예제 002**포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식**

다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 각각 구하고, 그 그래프를 그려라.

$$(1) y^2 = x$$

$$(2) y^2 = -2x$$

$$(3) x^2 = 3y$$

$$(4) x^2 = -4y$$

풀이 주어진 방정식에서 $y^2 = 4px$ 또는 $x^2 = 4py$ 꼴의 p 의 값을 구하여 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구한다.

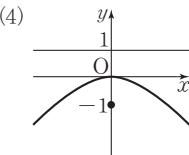
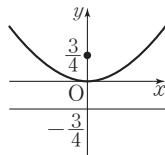
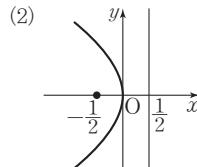
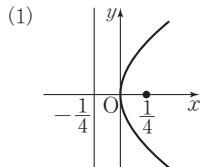
이때 p 앞의 수 4에 유의한다.

$$(1) 4p=1 \text{에서 } p=\frac{1}{4} \quad \therefore \text{초점: } \left(\frac{1}{4}, 0\right), \text{준선: } x=-\frac{1}{4}$$

$$(2) 4p=-2 \text{에서 } p=-\frac{1}{2} \quad \therefore \text{초점: } \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \text{준선: } x=\frac{1}{2}$$

$$(3) 4p=3 \text{에서 } p=\frac{3}{4} \quad \therefore \text{초점: } \left(0, \frac{3}{4}\right), \text{준선: } y=-\frac{3}{4}$$

$$(4) 4p=-4 \text{에서 } p=-1 \quad \therefore \text{초점: } (0, -1), \text{준선: } y=1$$

**원칙**

$y^2 = 4px \rightarrow$ 초점 $(p, 0)$, 준선 $x = -p \rightarrow$ x 축의 방향으로 뻗어나가는 그래프.
 $x^2 = 4py \rightarrow$ 초점 $(0, p)$, 준선 $y = -p \rightarrow$ y 축의 방향으로 뻗어나가는 그래프.

정답과 풀이 2쪽 ▶

유제 001 다음 포물선의 방정식을 구하여라.

- (1) 꼭짓점이 $(0, 0)$, 준선이 $x = 3$ 인 포물선

- (2) 꼭짓점이 $(0, 0)$, 초점이 $F(0, -4)$ 인 포물선

유제 002 다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 각각 구하고, 그 그래프를 그려라.

$$(1) y^2 = 8x$$

$$(2) y^2 = -12x$$

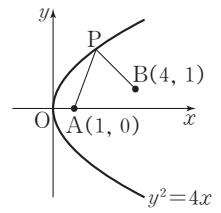
$$(3) x^2 = 2y$$

$$(4) x^2 = -3y$$

필수예제 003

포물선의 정의의 활용

오른쪽 그림과 같이 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 임의의 점 P와 두 점 A(1, 0), B(4, 1)에 대하여 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값을 구하여라.



중심자료 풀이의 핵심은 아래의 그림과 같이 $\overline{PA} = \overline{PH}$ 임을 간파하는 것.

점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값은 세 점 H, P, B가 일직선을 이루 때 발생한다. 계산은 쉽지만 발상이 어려운 문제.

| 풀이 | 포물선 $y^2 = 4x = 4 \cdot 1 \cdot x$ 에서 $p=1$ 이므로

초점의 좌표는 A(1, 0)이고 준선의 방정식은 $x=-1$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 준선 $x=-1$ 을 그은 후 두 점 P, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라고 하면 포물선의 정의에 의하여

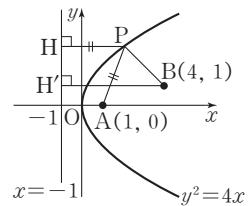
$$\overline{PA} = \overline{PH}$$

$$\therefore \overline{PA} + \overline{PB} = \overline{PH} + \overline{PB}$$

$$\geq \overline{BH'}$$

$$= 4 - (-1) = 5$$

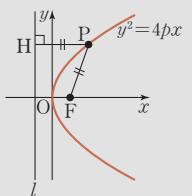
따라서 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값은 5이다.



포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점 P에서 초점 F까지의 거리와 준선 l까지의 거리는 서로 같다.

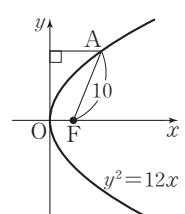
$$\rightarrow \overline{PF} = \overline{PH}$$

▶ 원칙

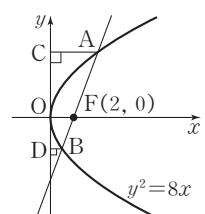


유제 003 오른쪽 그림과 같이 포물선 $y^2 = 12x$ 위의 한 점 A와 이 포물선의 초점 F를 이은 선분 AF의 길이가 10일 때, 점 A에서 y축에 내린 수선의 길이를 구하여라.

정답과 풀이 2쪽 ▶



유제 004 오른쪽 그림과 같이 포물선 $y^2 = 8x$ 와 점 F(2, 0)을 지나는 직선이 두 점 A, B에서 만난다. 두 점 A, B에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라고 하고 $\overline{AB} = 9$ 일 때, $\overline{AC} + \overline{BD}$ 의 값을 구하여라.



01 포물선의 평행이동

(1) 포물선 $y^2=4px$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 포물선의 방정식

$$\Rightarrow (y-n)^2=4p(x-m)$$

- ① 초점 : $(p+m, n)$ ② 준선 : $x=-p+m$ ③ 꼭짓점 : (m, n) ④ 축 : $y=n$

(2) 포물선 $x^2=4py$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 포물선의 방정식

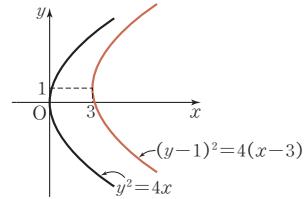
$$\Rightarrow (x-m)^2=4p(y-n)$$

- ① 초점 : $(m, p+n)$ ② 준선 : $y=-p+n$ ③ 꼭짓점 : (m, n) ④ 축 : $x=m$

증명자료 포물선 $y^2=4x$ 를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$(y-1)^2=4(x-3)$$

- ① 초점의 좌표 : $(1, 0) \rightarrow (4, 1)$
 ② 준선의 방정식 : $x=-1 \rightarrow x=2$
 ③ 꼭짓점의 좌표 : $(0, 0) \rightarrow (3, 1)$
 ④ 축의 방정식 : $y=0 \rightarrow y=1$



02 포물선의 방정식의 일반형

(1) $y^2+Ax+By+C=0$ (단, $A \neq 0$) $\leftarrow x$ 축에 평행한 축을 가진 포물선

$$\Rightarrow (y-n)^2=4p(x-m)$$
 꼴로 변형

(2) $x^2+Ax+By+C=0$ (단, $B \neq 0$) $\leftarrow y$ 축에 평행한 축을 가진 포물선

$$\Rightarrow (x-m)^2=4p(y-n)$$
 꼴로 변형

증명자료 포물선의 방정식의 일반형은 다음과 같이 평행이동한 식을 전개하여 얻을 수 있다.

- (1) x 축에 평행한 축을 가진 포물선의 방정식의 일반형

$$\begin{aligned} (y-n)^2 &= 4p(x-m) \xrightarrow{\text{전개}} y^2 - 4px - 2ny + n^2 + 4pm = 0 \\ &\quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ &\xrightarrow{\quad} y^2 + Ax + By + C = 0 \quad (\text{단, } A \neq 0) \\ &\quad \rightarrow xy\text{항이 없고, } y\text{에 대하여 이차, } x\text{에 대하여 일차인 식} \end{aligned}$$

- (2) y 축에 평행한 축을 가진 포물선의 방정식의 일반형

$$\begin{aligned} (x-m)^2 &= 4p(y-n) \xrightarrow{\text{전개}} x^2 - 2mx - 4py + m^2 + 4pn = 0 \\ &\quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ &\xrightarrow{\quad} x^2 + Ax + By + C = 0 \quad (\text{단, } B \neq 0) \\ &\quad \rightarrow xy\text{항이 없고, } x\text{에 대하여 이차, } y\text{에 대하여 일차인 식} \end{aligned}$$

증명자료 xy 항이 없고 x, y 중 어느 한 문자에 대하여 이차이다.

大원칙

포물선의 방정식의 일반형을 완전제곱식 형태로 고치려면

\rightarrow 이차항이 있는 문자에 대한 완전제곱식으로 고친 후 짜꺼기를 이항한다.

필수예제 004

꼭짓점이 원점이 아닌 포물선의 방정식

다음 포물선의 방정식을 구하여라.

(1) 초점이 $F(6, 3)$, 준선이 $x=2$ 인 포물선

(2) 초점이 $F(3, -5)$, 준선이 $y=1$ 인 포물선

풀이

꼭짓점이 원점인 포물선의 방정식은 표준형 공식 한 방이면 구해진다. 꼭짓점이 원점이 아닐 때는?

포물선 위의 한 점의 좌표를 $P(x, y)$ 로 놓고 주어진 조건을 이용하여 x, y 사이의 관계식을 세운다.

| 풀이 | 포물선 위의 한 점을 $P(x, y)$ 라 하고 점 P 에서 준선에 내린 수선의 발을 H 라고 하자.

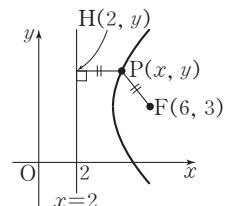
(1) 점 H 의 좌표는 $(2, y)$ 이므로

포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PH}$

$$\therefore \sqrt{(x-6)^2 + (y-3)^2} = |x-2|$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$(y-3)^2 = 8(x-4)$$



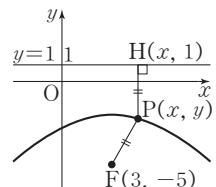
(2) 점 H 의 좌표는 $(x, 1)$ 이므로

포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PH}$

$$\therefore \sqrt{(x-3)^2 + (y+5)^2} = |y-1|$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$(x-3)^2 = -12(y+2)$$

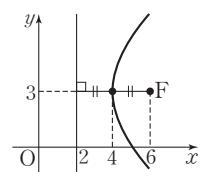


| 다른풀이 | (1) [1단계] 포물선의 꼭짓점은 초점과 준선의 중간이므로 꼭짓점의 좌표는 $(4, 3)$

[2단계] p 의 절댓값은 초점과 꼭짓점 사이의 거리이고 $p > 0$ 이므로 $p=2$

[3단계] 공식을 이용하여 포물선의 방정식을 구하면

$$(y-3)^2 = 4 \cdot 2 \cdot (x-4) \quad \therefore (y-3)^2 = 8(x-4)$$

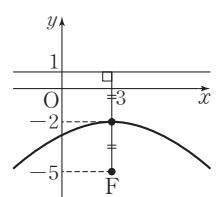


(2) [1단계] 포물선의 꼭짓점은 초점과 준선의 중간이므로 꼭짓점의 좌표는 $(3, -2)$

[2단계] p 의 절댓값은 초점과 꼭짓점 사이의 거리이고 $p < 0$ 이므로 $p=-3$

[3단계] 공식을 이용하여 포물선의 방정식을 구하면

$$(x-3)^2 = 4 \cdot (-3) \cdot (y+2) \quad \therefore (x-3)^2 = -12(y+2)$$

**대원칙**

꼭짓점이 원점인 포물선의 방정식은 표준형을 이용하면 쉽게 풀리지만 꼭짓점이 원점이 아닌 포물선의 방정식은 포물선의 정의를 이용한다. → 포물선 위의 점에서 (초점까지의 거리)=(준선까지의 거리)

정답과 풀이 2쪽 ▶

유제 005 다음 포물선의 방정식을 구하여라.

(1) 초점이 $F(-1, 0)$, 준선이 $x=3$ 인 포물선

(2) 초점이 $F(0, 4)$, 준선이 $y=-2$ 인 포물선

유제 006 다음 자취의 방정식을 구하여라.

(1) 점 $F(2, -2)$ 와 직선 $x=4$ 로부터 같은 거리에 있는 점의 자취

(2) 점 $F(-1, 4)$ 와 직선 $y=0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취

필수예제 005**포물선의 방정식의 일반형**

다음 포물선의 초점의 좌표, 준선의 방정식, 꼭짓점의 좌표를 각각 구하여라.

$$(1) y^2 - 8x - 2y + 25 = 0$$

$$(2) x^2 + 2x + 4y + 9 = 0$$

중심자료 앞에서 보았듯이, 표준형이 주어지면 초점, 준선, 꼭짓점은 한 방에 구해진다.

그럼, 표준형이 아닐 때는?

이차항이 있는 문자에 대한 완전제곱 꼴로 고친 후 평행이동 형태를 관찰한다. 즉,

이차항의 문자가 x 일 때 $\rightarrow (x-m)^2 = 4p(y-n)$ 꼴

이차항의 문자가 y 일 때 $\rightarrow (y-n)^2 = 4p(x-m)$ 꼴

| 풀이 | (1)[1단계] $y^2 - 8x - 2y + 25 = 0$ 을 y 에 대하여 완전제곱 꼴로 고치면

$$(y^2 - 2y + 1) - 1 = 8x - 25$$

$$\therefore (y-1)^2 = 8(x-3) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

[2단계] ①은 포물선 $y^2 = 8x$ 를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $y^2 = 8x = 4 \cdot 2 \cdot x$ 에서 $p=2$ 이므로

초점 : $(2, 0)$, 준선 : $x=-2$, 꼭짓점 : $(0, 0)$

[3단계] 따라서 주어진 포물선에서 초점 : $(5, 1)$, 준선 : $x=1$, 꼭짓점 : $(3, 1)$

(2)[1단계] $x^2 + 2x + 4y + 9 = 0$ 을 x 에 대하여 완전제곱 꼴로 고치면

$$(x^2 + 2x + 1) - 1 = -4y - 9$$

$$\therefore (x+1)^2 = -4(y+2) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

[2단계] ②은 포물선 $x^2 = -4y$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $x^2 = -4y = 4 \cdot (-1) \cdot y$ 에서 $p=-1$ 이므로

초점 : $(0, -1)$, 준선 : $y=1$, 꼭짓점 : $(0, 0)$

[3단계] 따라서 주어진 포물선에서 초점 : $(-1, -3)$, 준선 : $y=-1$, 꼭짓점 : $(-1, -2)$

| 참고 | x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동

- 점의 평행이동 $\rightarrow x$ 좌표에 m , y 좌표에 n 을 더해 주면 끝.

- 식의 평행이동 $\rightarrow x$ 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$ 을 대입하면 끝.

(1) 일반형에서 초점, 준선, 꼭짓점을 구하려면 표준형으로 고쳐야 한다.

대원칙

(2) $(y-n)^2 = 4p(x-m) \rightarrow$ 초점 : $(p+m, n)$, 준선 : $x = -p+m$, 꼭짓점 : (m, n)

$(x-m)^2 = 4p(y-n) \rightarrow$ 초점 : $(m, p+n)$, 준선 : $y = -p+n$, 꼭짓점 : (m, n)

정답과 풀이 3쪽 ▶

유제 007 다음 포물선의 초점의 좌표, 준선의 방정식, 꼭짓점의 좌표를 각각 구하여라.

$$(1) y^2 + 4x - 4y + 8 = 0$$

$$(2) x^2 - 2x - 2y + 3 = 0$$

유제 008 다음 포물선의 초점의 좌표, 준선의 방정식, 꼭짓점의 좌표를 각각 구하여라.

$$(1) y = \frac{1}{4}x^2 + 1$$

$$(2) x = y^2 + 4y + 3$$

필수예제 006**축이 x 축에 평행한 포물선의 방정식**

축이 x 축에 평행하고 세 점 $(0, 0), (0, 4), (1, 2)$ 를 지나는 포물선의 방정식을 구하여라.

풀이 축이 x 축에 평행한 포물선의 방정식 $\rightarrow y^2 + Ax + By + C = 0$ ($A \neq 0$) 꼴

| 풀이 | 구하는 포물선의 방정식을 $y^2 + Ax + By + C = 0$ ($A \neq 0$)으로 놓으면

이 포물선이 세 점 $(0, 0), (0, 4), (1, 2)$ 를 지나므로

$$C=0 \quad \dots \textcircled{①}$$

$$16+4B+C=0 \quad \dots \textcircled{②}$$

$$4+A+2B+C=0 \quad \dots \textcircled{③}$$

$$\textcircled{①}, \textcircled{②}, \textcircled{③} \text{을 연립하여 풀면 } A=4, B=-4, C=0$$

따라서 구하는 포물선의 방정식은 $y^2 + 4x - 4y = 0$

필수예제 007**준선을 모를 때의 포물선의 방정식**

초점이 $F(2, 3)$ 이고 점 $(2, 9)$ 를 지나며 준선이 y 축에 평행한 포물선의 방정식을 구하여라.

풀이 준선의 방정식을 $x=a$ 라 하고 포물선의 정의에 따라 구한다.

| 풀이 | 오른쪽 그림과 같이 포물선 위의 한 점을 $P(x, y)$, 점 P 에서 준선에 내린 수선의 발을

H 라 하고 준선의 방정식을 $x=a$ 라고 하자.

포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PH}$ 이므로

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = |x-a|$$

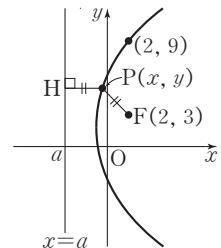
$$\text{양변을 제곱하면 } (x-2)^2 + (y-3)^2 = (x-a)^2 \quad \dots \textcircled{④}$$

$\textcircled{④}$ 이 점 $(2, 9)$ 를 지나므로

$$36 = (2-a)^2, 2-a = \pm 6 \quad \therefore a = -4 \text{ 또는 } a = 8$$

따라서 구하는 포물선의 방정식은

$$(y-3)^2 = 12(x+1) \text{ 또는 } (y-3)^2 = -12(x-5)$$

**대원칙**

(1) 축이 x 축에 평행한 포물선의 방정식 $\rightarrow y^2 + Ax + By + C = 0$ ($\exists, A \neq 0$)

(2) 축이 y 축에 평행한 포물선의 방정식 $\rightarrow x^2 + Ax + By + C = 0$ ($\exists, B \neq 0$)

정답과 풀이 3쪽 ►

유제 009 축이 y 축에 평행하고 세 점 $(-1, 0), (3, 0), (1, -1)$ 을 지나는 포물선의 방정식을 구하여라.

유제 010 초점이 $F(3, 1)$ 이고 점 $(6, 5)$ 를 지나며 준선이 y 축에 평행한 포물선의 방정식을 구하여라.

연습문제

Step 1

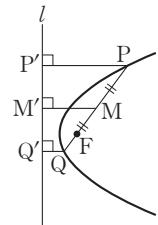
- 001** 두 포물선 $4x+y^2=0$, $x^2-12y=0$ 의 초점을 각각 A, B라고 할 때, $\triangle OAB$ 의 넓이를 구하여라.
(단, O는 원점)
- 002** 꼭짓점이 원점이고 준선이 $x=-2$ 인 포물선이 점 $(a, 4)$ 를 지날 때, a 의 값을 구하여라.
- 003** 포물선 $x^2=4y$ 위의 점 P(a, b)와 초점 F 사이의 거리가 5일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.
(단, $a>0$)
- 004** 점 A(6, 3)을 지나는 x 축에 평행한 직선과 포물선 $y^2=12x$ 의 교점을 B, 이 포물선의 초점을 F라고 할 때, $\overline{AB}+\overline{BF}$ 의 값을 구하여라.
- 005** 점 F(2, 0)과 직선 $x=-2$ 로부터의 거리의 비가 1 : 1인 점 P의 자취의 방정식을 구하여라.
- 006** 포물선 $y^2+2x+4y-2=0$ 의 초점의 좌표가 (a, b) , 꼭짓점의 좌표가 (c, d) , 준선이 $x=e$ 일 때, $a+b+c+d+e$ 의 값을 구하여라. (단, e는 실수)
- 007** 세 점 $(2, -1)$, $(3, 1)$, $(6, 3)$ 을 지나고 축이 x 축에 평행한 포물선의 꼭짓점의 좌표가 (a, b) 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.
- 008** 포물선 $y^2=4x$ 위의 한 점과 이 포물선의 초점을 연결하는 선분의 중점의 자취는 포물선이다. 이 포물선의 준선의 방정식을 구하여라.
- 009** 두 포물선 $x^2-2x-4y+9=0$, $y^2-4x-6y+5=0$ 의 초점을 각각 F, F'이라고 할 때, $\overline{FF'}$ 의 길이를 구하여라.

Step 2

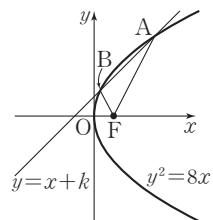
- 010** 초점의 좌표가 $(-2, 2)$ 이고 점 $(2, -1)$ 을 지나며 준선이 y 축에 수직인 포물선의 방정식은 $x^2 + 4x + ay + b = 0$ 과 $x^2 + 4x + 4y + c = 0$ 이다. 상수 a, b, c 에 대하여 $a - b - c$ 의 값을 구하여라.

- 011** 포물선 $y^2 = 8x$ 위의 세 점 A, B, C에 대하여 삼각형 ABC의 무게중심 G가 포물선의 초점과 일치할 때, $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC}$ 의 값을 구하여라.

- 012** 오른쪽 그림과 같이 포물선의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 선분 PQ의 중점을 M이라고 하자. 또, 세 점 P, M, Q에서 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 P', M', Q'이라고 하자. $\overline{PQ} = 10$ 일 때, $\overline{MM'}$ 의 길이를 구하여라.

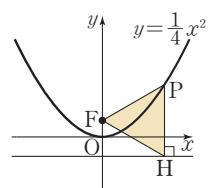


- 013** 오른쪽 그림과 같이 포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점을 F, 포물선과 직선 $y = x + k$ 의 두 교점을 각각 A, B라고 하자. $\overline{AF} + \overline{BF} = 10$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

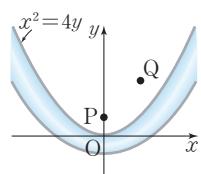


- 014** 원 $x^2 + (y-4)^2 = 4$ 에 외접하고 동시에 x 축에 접하는 원의 중심의 자취의 방정식을 구하여라.

- 015** 오른쪽 그림과 같이 포물선 $y = \frac{1}{4}x^2$ 의 초점을 F, 이 포물선 위의 점 P에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 삼각형 PFH가 정삼각형일 때, 삼각형 PFH의 넓이를 구하여라. (단, 점 P는 제1사분면 위의 점)



- 016** 오른쪽 그림과 같이 포물선 $x^2 = 4y$ 모양의 강이 포물선의 초점 위치에 있는 마을 P와 또 다른 마을 Q를 돌아 흐르고 있다. 강변의 한 곳에 하수처리장 T를 건설하려고 하는데 하수처리장으로부터 두 마을까지의 직선 거리의 합이 최소가 되도록 정하려고 한다. 마을 Q의 위치가 $(2, 3)$ 일 때, 하수처리장 T의 위치를 구하여라.



3

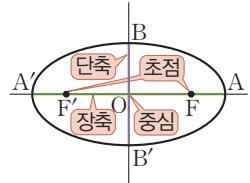
타원의 방정식

1. 이차곡선

01 타원의 정의

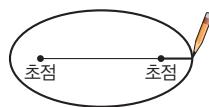
평면 위의 서로 다른 두 점 F, F' 으로부터의 거리의 합이 일정한 점들의 집합을 타원이라고 한다.

- (1) **초점** : 두 점 F, F'
- (2) **꼭짓점** : 타원과 두 축과의 교점 A, A', B, B'
- (3) **장축** : 길이가 긴 선분 AA'
- (4) **단축** : 길이가 짧은 선분 BB'
- (5) **중심** : 장축과 단축의 교점



증명 타원을 그리려면 일정한 길이의 실의 양 끝을 두 초점에 고정한 후, 연필을 끼워 팽팽하게 당기면서 돌리면 된다.

이때 연필이 오른쪽 꼭짓점에 있을 때를 관찰하면 타원의 중요한 성질 하나를 알 수 있다.
바로 실의 길이가 장축의 길이와 같다는 것.



- 증명**
- ① 타원 위의 점에서 두 초점까지의 거리의 합은 장축의 길이와 같다.
 - ② 타원은 장축과 단축 및 중심에 대하여 대칭이다.
 - ③ 타원의 두 초점은 장축 위에 존재한다.
 - ④ 타원의 중심은 두 초점을 이은 선분의 중점이다.

02 타원의 방정식

방정식	(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (단, $a > b > 0, c^2 = a^2 - b^2$)	(2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (단, $b > a > 0, c^2 = b^2 - a^2$)
그래프		
거리의 합 (=장축의 길이)	$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$	$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2b$
단축의 길이	$2b$	$2a$
초점의 좌표	$F(\sqrt{a^2 - b^2}, 0), F'(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$	$F(0, \sqrt{b^2 - a^2}), F'(0, -\sqrt{b^2 - a^2})$

증명 타원의 방정식 (1)과 (2)의 비교.

[비교 1] $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에서 $\begin{cases} a > b \text{보다 크면 초점, 장축 등 중요한 건 모두 } x\text{-축 위에 있다.} \\ b > a \text{보다 크면 초점, 장축 등 중요한 건 모두 } y\text{-축 위에 있다.} \end{cases}$

[비교 2] 초점의 공식은 이렇게 암기한다. $\Rightarrow c = \sqrt{(큰 분모) - (작은 분모)}$

[비교 3] 둘 다 초점이 원점 대칭 \Rightarrow 중심이 원점

1 타원의 방정식(1)

오른쪽 그림의 좌표축 설정은 타원의 중심이 원점이 되도록 한 설정.

이 설정에서 얻은 타원의 방정식, 즉 두 점 $F(c, 0), F'(-c, 0)$ 로부터의 거리의 합이 $2a$ 인 타원의 방정식이 바로 타원의 방정식의 표준형.

이 타원의 방정식을 구해 보자. (단, $a > c > 0$)

(i) 타원 위의 점을 $P(x, y)$ 로 놓는다.

(ii) 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$$

$$\therefore \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

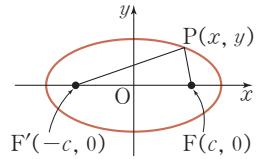
(iii) 근호 하나를 이항하여 제곱한 후, 다시 제곱하여 정리하면

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

(o) 계산은 복잡하고 중요하지 않으니 그러려니 하고 넘어가자.)

(iv) $a^2 - c^2 = b^2$ 으로 놓으면

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



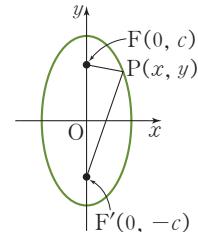
2 타원의 방정식(2)

오른쪽 그림의 타원은 두 점 $F(0, c), F'(0, -c)$ 로부터의 거리의 합이 $2b$ 인

타원. 앞의 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동

한 후 a, b 를 바꾸면 이 타원이 된다.

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



3 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 초점의 좌표 구하기

(1) $a > b > 0$ 일 때

초점이 x 축 위에 있으므로 두 초점을 $F(c, 0), F'(-c, 0)$ 이라고 하면 점 $P(0, b)$ 에 대하여 $\overline{PF} = \overline{PF'}$ 이므로

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = \overline{PF} + \overline{PF} = 2a \quad \therefore \overline{PF} = a$$

이때 $\triangle POF$ 는 직각삼각형이므로

$$b^2 + c^2 = a^2 \quad \therefore c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

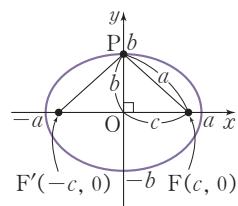
따라서 초점의 좌표는

$$F(\sqrt{a^2 - b^2}, 0), F'(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$$

(2) $b > a > 0$ 일 때

초점이 y 축 위에 있으므로 두 초점을 $F(0, c), F'(0, -c)$ 라고 하고 같은 방법으로 구하면 초점의 좌표는

$$F(0, \sqrt{b^2 - a^2}), F'(0, -\sqrt{b^2 - a^2})$$



필수예제 008

타원의 방정식(1)

다음 타원의 방정식을 구하여라.

- (1) 두 점 $F(2, 0), F'(-2, 0)$ 으로부터의 거리의 합이 6인 타원
- (2) 두 점 $F(0, 3), F'(0, -3)$ 으로부터의 거리의 합이 8인 타원

【 풀이】 두 점으로부터의 거리의 합이 일정하므로 타원의 방정식을 생각한다.

- (1) 초점이 x 축 위에 있으므로 거리의 합은 $2a$, 초점 공식에서 $c^2 = a^2 - b^2$
- (2) 초점이 y 축 위에 있으므로 거리의 합은 $2b$, 초점 공식에서 $c^2 = b^2 - a^2$

【 풀이】 (1) 초점이 x 축 위에 있으므로 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)이라고 하자.

$$\text{거리의 합이 } 6 \text{ 이므로 } 2a = 6 \quad \therefore a = 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \text{에서 } 2^2 = 3^2 - b^2 \quad \therefore b^2 = 5 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 대입하면

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

(2) 초점이 y 축 위에 있으므로 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > a > 0$)이라고 하자.

$$\text{거리의 합이 } 8 \text{ 이므로 } 2b = 8 \quad \therefore b = 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$c^2 = b^2 - a^2 \text{에서 } 3^2 = 4^2 - a^2 \quad \therefore a^2 = 7 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 대입하면

$$\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$$

(1) 두 점 $F(c, 0), F'(-c, 0)$ 으로부터의 거리의 합이 $2a$ 인 타원의 방정식

$$\rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (단, } a > b > 0, c^2 = a^2 - b^2\text{)}$$

【 원칙】

(2) 두 점 $F(0, c), F'(0, -c)$ 로부터의 거리의 합이 $2b$ 인 타원의 방정식

$$\rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (단, } b > a > 0, c^2 = b^2 - a^2\text{)}$$

정답과 풀이 4쪽 ▶

유제 011 다음 타원의 방정식을 구하여라.

- (1) 두 점 $F(4, 0), F'(-4, 0)$ 으로부터의 거리의 합이 10인 타원
- (2) 두 점 $F(0, 5), F'(0, -5)$ 로부터의 거리의 합이 12인 타원

유제 012 두 점 $A(0, \sqrt{5}), B(0, -\sqrt{5})$ 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP} = 6$ 을 만족시키는 점 P 가 나타내는 자취의 방정식을 구하여라.

필수예제 009

타원의 장축, 단축의 길이와 초점의 좌표

다음 타원의 그래프를 그리고, 장축, 단축의 길이와 중심, 꼭짓점, 초점의 좌표를 각각 구하여라.

$$(1) \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$(2) 16x^2 + 9y^2 = 144$$

풀이 일단, 그래프를 그린다. 그래프만 그려지면 초점을 제외하고는 모두 쉽게 구해진다.

| 풀이 | (1) $a=5, b=3$ 으로 $a>b>0$

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

∴ 장축의 길이 : $2a=2 \times 5=10$

단축의 길이 : $2b=2 \times 3=6$

중심 : $(0, 0)$

꼭짓점 : $(5, 0), (-5, 0), (0, 3), (0, -3)$

초점 : 초점 공식에서 $c=\sqrt{\text{큰 분모}-\text{작은 분모}}=\sqrt{25-9}=4$ 으로

$(4, 0), (-4, 0)$

(2) 양변을 144로 나누면

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$a=3, b=4$ 으로 $b>a>0$

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

∴ 장축의 길이 : $2b=2 \times 4=8$

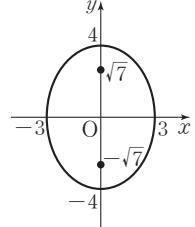
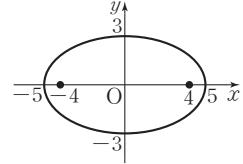
단축의 길이 : $2a=2 \times 3=6$

중심 : $(0, 0)$

꼭짓점 : $(3, 0), (-3, 0), (0, 4), (0, -4)$

초점 : 초점 공식에서 $c=\sqrt{\text{큰 분모}-\text{작은 분모}}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$ 으로

$(0, \sqrt{7}), (0, -\sqrt{7})$



(1) $px^2 + qy^2 = r$ 꼴의 타원의 방정식은 양변을 r 로 나누어 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 꼴로 고친다.

(2) 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에서

대원칙

• $a>b>0$ 일 때

① 장축의 길이 : $2a$ ② 단축의 길이 : $2b$ ③ 초점 : $(c, 0), (-c, 0)$ ($c=\sqrt{a^2-b^2}$)

• $b>a>0$ 일 때

① 장축의 길이 : $2b$ ② 단축의 길이 : $2a$ ③ 초점 : $(0, c), (0, -c)$ ($c=\sqrt{b^2-a^2}$)

정답과 풀이 4쪽 ▶

유제 013 다음 타원의 그래프를 그리고, 장축, 단축의 길이와 중심, 꼭짓점, 초점의 좌표를 각각 구하여라.

$$(1) \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$(2) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$(3) 4x^2 + y^2 = 4$$

$$(4) 4x^2 + 9y^2 = 36$$

필수예제 010

타원의 방정식 (2)

다음 타원의 방정식을 구하여라.

- (1) 초점이 $F(1, 0), F'(-1, 0)$ 이고, 장축의 길이가 6인 타원
- (2) 초점이 $F(2, 0), F'(-2, 0)$ 이고, 단축의 길이가 8인 타원

증명자료 (1) 초점이 x 축 위에 있으므로 장축의 길이는 $2a$, 초점 공식에서 $c^2 = a^2 - b^2$
 (2) 초점이 x 축 위에 있으므로 단축의 길이는 $2b$, 초점 공식에서 $c^2 = a^2 - b^2$

| 풀이 | 초점이 x 축 위에 있으므로 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 이라고 하자.

$$(1) \text{장축의 길이가 } 6 \text{이므로 } 2a = 6 \quad \therefore a = 3 \quad \dots \textcircled{\text{J}}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \text{에서 } 1^2 = 3^2 - b^2 \quad \therefore b^2 = 8 \quad \dots \textcircled{\text{L}}$$

$$\textcircled{\text{J}}, \textcircled{\text{L}} \text{을 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{에 대입하면}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$$

$$(2) \text{단축의 길이가 } 8 \text{이므로 } 2b = 8 \quad \therefore b = 4 \quad \dots \textcircled{\text{J}}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \text{에서 } 2^2 = a^2 - 4^2 \quad \therefore a^2 = 20 \quad \dots \textcircled{\text{L}}$$

$$\textcircled{\text{J}}, \textcircled{\text{L}} \text{을 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{에 대입하면}$$

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$$

대원칙

(1) 초점이 x 축 위에 있을 때, 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 의 장축의 길이는 $2a$, 단축의 길이는 $2b$

(2) 초점이 y 축 위에 있을 때, 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > a > 0)$ 의 장축의 길이는 $2b$, 단축의 길이는 $2a$

정답과 풀이 4쪽 ►

유제 014 다음 타원의 방정식을 구하여라.

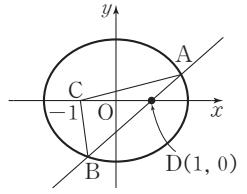
- (1) 초점이 $F(0, \sqrt{7}), F'(0, -\sqrt{7})$ 이고, 장축의 길이가 6인 타원
- (2) 초점이 $F(0, 3), F'(0, -3)$ 이고, 단축의 길이가 8인 타원

유제 015 중심이 원점이고, 초점이 y 축 위에 있으며 장축의 길이가 10이고 단축의 길이가 6인 타원의 방정식을 구하여라.

필수예제 011

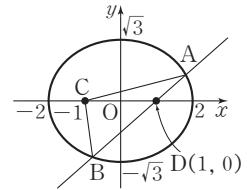
타원의 정의의 활용

점 D(1, 0)을 지나고 기울기가 양수인 직선이 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 과 만나는 두 점을 각각 A, B라고 할 때, 두 점 A, B와 점 C(-1, 0)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 둘레의 길이를 구하여라.



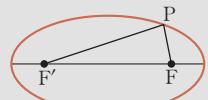
증명자료 점 D(1, 0)과 점 C(-1, 0)은 주어진 타원의 초점. 결국, 초점이 개입된 타원 문제. 초점과의 거리가 개입된 문제에서는 무조건 타원의 정의를 떠올린다.

| 풀이 | 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 에서
 $c = \sqrt{(큰 분모) - (작은 분모)} = \sqrt{4-3} = 1$ 이므로
 초점의 좌표는 (1, 0), (-1, 0)
 즉, 두 점 C, D가 이 타원의 초점이므로
 $\overline{AC} + \overline{AD} = \overline{BC} + \overline{BD} = 2a = 2 \times 2 = 4$
 따라서 $\triangle ABC$ 의 둘레의 길이는
 $(\overline{AC} + \overline{AD}) + (\overline{BC} + \overline{BD}) = 4 + 4 = 8$



원칙

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 P와 두 초점 F, F'까지의 거리의 합은 장축의 길이와 같다.
 $\rightarrow \overline{PF} + \overline{PF'} = (\text{장축의 길이})$

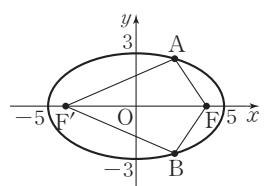


정답과 풀이 5쪽 ►

유제 016 점 A(3, 0)을 지나는 직선과 점 B(-3, 0)을 지나는 직선이 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 위의 한 점 P에서 만날 때, 삼각형 APB의 둘레의 길이를 구하여라. (단, 점 P는 x축 위의 점이 아니다.)

유제 017 오른쪽 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 의 두 초점을 F, F'이라 하

고 타원 위의 두 점을 각각 A, B라고 할 때, 사각형 AF'BF의 둘레의 길이를 구하여라.



4

타원의 평행이동

1. 0차곡선

01 타원의 평행이동

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 타원의 방정식
 $\rightarrow \frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$

증명자료 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한

타원의 방정식은

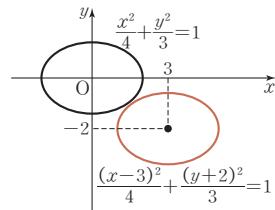
$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{3} = 1$$

① 중심의 좌표 : $(0, 0) \rightarrow (3, -2)$

② 초점의 좌표 : $(1, 0), (-1, 0) \rightarrow (4, -2), (2, -2)$

③ 꼭짓점의 좌표 : $(2, 0), (-2, 0), (0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3})$

$\rightarrow (5, -2), (1, -2), (3, \sqrt{3}-2), (3, -\sqrt{3}-2)$



증명자료 타원을 평행이동하면 모양은 변하지 않고 그 위치만 이동되므로 장축과 단축의 길이는 변하지 않는다.

그러나 초점과 중심, 꼭짓점의 위치는 평행이동에 의하여 이동된다.

02 타원의 방정식의 일반형

$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ (단, $AB > 0, A \neq B$)

$$\rightarrow \frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$
 꼴로 변형

증명자료 타원의 방정식의 일반형은 평행이동한 식 $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ 의 양변에 a^2b^2 를 곱한 후 전개하여 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} b^2(x-m)^2 + a^2(y-n)^2 &= a^2b^2 \\ \xrightarrow{\text{전개}} b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2mx - 2a^2ny + b^2m^2 + a^2n^2 - a^2b^2 &= 0 \\ \xrightarrow{\text{---}} Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E &= 0 \quad (\text{단, } AB > 0, A \neq B) \end{aligned}$$

증명자료 x^2 항과 y^2 항의 계수가 다르고 부호는 같다.

대원칙

타원의 방정식의 일반형을 완전제곱식 형태로 고치려면

\rightarrow 같은 문자끼리 완전제곱식으로 고친다.

필수예제 012

두 초점이 원점 대칭이 아닌 타원의 방정식

초점이 $F(5, 2)$, $F'(1, 2)$ 이고, 장축의 길이가 6인 타원의 방정식을 구하여라.

▶ 풀이자료

두 초점이 원점 대칭인 타원의 방정식은 표준형 공식 한 방이면 구해진다. 두 초점이 원점 대칭이 아닐 때는? 중심과 c 의 값을 구한 후 공식을 이용한다.

$$\rightarrow \text{두 초점의 } y\text{-좌표가 같으면 } \frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \text{ (단, } a > b > 0\text{)}$$

| 풀이 | [1단계] 타원의 중심은 두 초점을 이은 선분의 중점이므로 $(3, 2)$

$$\text{따라서 구하는 타원의 방정식은 } \frac{(x-3)^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1$$

[2단계] 초점과 중심 사이의 거리가 c 이므로 $c=2$

장축의 길이가 6이므로

$$2a=6 \quad \therefore a=3$$

$$c^2=a^2-b^2 \text{에서 } 2^2=3^2-b^2 \quad \therefore b^2=5$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1$$

다른풀이 타원 위의 한 점을 $P(x, y)$ 라고 하면

타원의 정의에 의하여 $\overline{FP} + \overline{F'P} = 6$ 이므로

$$\sqrt{(x-5)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 6$$

$$\sqrt{(x-5)^2 + (y-2)^2} = 6 - \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

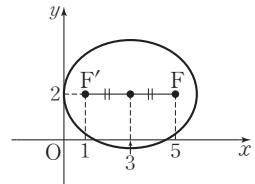
양변을 제곱하여 정리하면

$$3\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 2x+3$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$5(x-3)^2 + 9(y-2)^2 = 45$$

$$\therefore \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1$$



두 초점이 원점 대칭이 아닌 타원의 방정식은 다음과 같이 중심과 c 의 값을 구한 후 공식을 이용한다.

(1) 타원의 중심은 항상 두 초점을 이은 선분의 중점이고, c 의 값은 초점과 중심 사이의 거리이다.

대원칙

(2) 중심의 좌표가 (m, n) 인 타원: $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$

(단, \square 형이면 $c^2 = a^2 - b^2$, \square 형이면 $c^2 = b^2 - a^2$)

정답과 풀이 5쪽 ▶

유제 018 초점이 $F(1, 0)$, $F'(1, 6)$ 이고, 장축의 길이가 8인 타원의 방정식을 구하여라.

유제 019 다음 자취의 방정식을 구하여라.

(1) 두 점 $F(0, 0)$, $F'(4, 0)$ 으로부터의 거리의 합이 8인 점의 자취

(2) 두 점 $F(2, 0)$, $F'(2, 6)$ 으로부터의 거리의 합이 10인 점의 자취

필수예제 013

타원의 방정식의 일반형

다음 타원의 장축, 단축의 길이와 초점, 꼭짓점, 중심의 좌표를 각각 구하여라.

$$(1) 4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$$

$$(2) 9x^2 + 4y^2 - 54x - 16y + 61 = 0$$

▶ 풀이자료

앞에서 보았듯이, 표준형이 주어지면 장축, 단축의 길이와 꼭짓점의 좌표 등을 그래프를 그리고, 초점은 공식 $c = \sqrt{(\text{큰 분모}) - (\text{작은 분모})}$ 를 이용하면 한 방에 구해진다. 그럼, 표준형이 아닐 때는?

일단, 주어진 타원의 방정식을 $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ 꼴로 고친 후 평행이동 형태를 관찰한다.

| 풀이 | (1)[1단계] 주어진 타원의 방정식을 변형하면 $4(x^2 - 2x) + 9(y^2 + 4y) + 4 = 0$ 에서

$$4(x-1)^2 + 9(y+2)^2 = 36 \quad \therefore \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1 \quad \dots \dots \quad ①$$

[2단계] ①은 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2만큼

평행이동한 것이다. 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에서 $a=3, b=2$ 이므로

장축의 길이 : $2 \times 3 = 6$, 단축의 길이 : $2 \times 2 = 4$

초점 : $c = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$ 이므로 $(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$

꼭짓점 : $(3, 0), (-3, 0), (0, 2), (0, -2)$, 중심 : $(0, 0)$

[3단계] 따라서 주어진 타원에서

장축의 길이 : 6, 단축의 길이 : 4, 초점 : $(\sqrt{5}+1, -2), (-\sqrt{5}+1, -2)$

꼭짓점 : $(4, -2), (-2, -2), (1, 0), (1, -4)$, 중심 : $(1, -2)$

(2)[1단계] 주어진 타원의 방정식을 변형하면 $9(x^2 - 6x) + 4(y^2 - 4y) + 61 = 0$ 에서

$$9(x-3)^2 + 4(y-2)^2 = 36 \quad \therefore \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \quad \dots \dots \quad ②$$

[2단계] ②은 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼

평행이동한 것이다. 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 에서 $a=2, b=3$ 이므로

장축의 길이 : $2 \times 3 = 6$, 단축의 길이 : $2 \times 2 = 4$

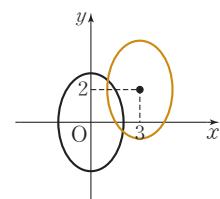
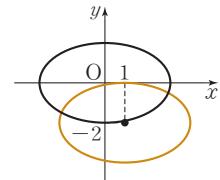
초점 : $c = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$ 이므로 $(0, \sqrt{5}), (0, -\sqrt{5})$

꼭짓점 : $(2, 0), (-2, 0), (0, 3), (0, -3)$, 중심 : $(0, 0)$

[3단계] 따라서 주어진 타원에서

장축의 길이 : 6, 단축의 길이 : 4, 초점 : $(3, \sqrt{5}+2), (3, -\sqrt{5}+2)$

꼭짓점 : $(5, 2), (1, 2), (3, 5), (3, -1)$, 중심 : $(3, 2)$



(1) 평행이동을 하여도 타원의 장축의 길이와 단축의 길이는 변하지 않는다.

▶ 원칙

(2) 타원의 방정식의 일반형을 표준형으로 고치는 법 \rightarrow 같은 문자끼리 완전제곱식으로 고친 후 우변을 1로 만든다.

(3) 점 (x, y) 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동 $\rightarrow x$ 대신 $x+m$, y 대신 $y+n$ 대입

▶ 정답과 풀이 6쪽 ►

유제 020 다음 타원의 장축, 단축의 길이와 초점, 꼭짓점, 중심의 좌표를 각각 구하여라.

$$(1) x^2 + 4y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$$

$$(2) 4x^2 + 3y^2 + 8x - 12y + 4 = 0$$

필수예제 014

타원과 원(1)

원 $x^2 + y^2 = 16$ 을 y 축의 방향으로 $\frac{5}{4}$ 배 확대한 도형의 방정식을 구하여라.

풀이 원 $x^2 + y^2 = 16$ 위의 점 $P(a, b)$ 는 점 $P'(x, y)$ 가 된다.

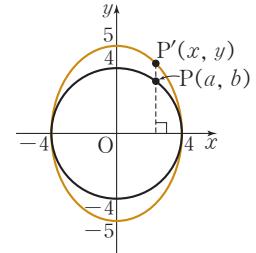
| 풀이 | 원 $x^2 + y^2 = 16$ 위의 점 $P(a, b)$ 를 y 축의 방향으로 $\frac{5}{4}$ 배 확대한 도형 위의 점을

$$P'(x, y) \text{라고 하면 } x=a, y=\frac{5}{4}b \quad \therefore a=x, b=\frac{4}{5}y \quad \dots \textcircled{\text{1}}$$

$$\text{한편, 점 } P \text{는 원 } x^2 + y^2 = 16 \text{ 위의 점이므로 } a^2 + b^2 = 16 \quad \dots \textcircled{\text{2}}$$

①을 ②에 대입하면 구하는 도형의 방정식은

$$x^2 + \left(\frac{4}{5}y\right)^2 = 16 \quad \therefore \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$



필수예제 015

타원과 원(2)

원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라고 할 때, 선분 PH 의 중점 Q 가 나타내는 도형의 방정식을 구하여라.

풀이 점 P 의 좌표를 (a, b) , 점 Q 의 좌표를 (x, y) 로 놓고 a, b 사이의 관계식을 x, y 사이의 관계식으로 나타낸다.

| 풀이 | 점 P 의 좌표를 (a, b) , 점 Q 의 좌표를 (x, y) 라고 하자.

$$\text{점 } P \text{는 원 } x^2 + y^2 = 4 \text{ 위의 점이므로 } a^2 + b^2 = 4 \quad \dots \textcircled{\text{1}}$$

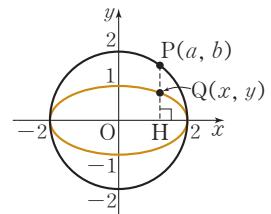
이때 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발 H 의 좌표는 $(a, 0)$ 이고

점 Q 는 \overline{PH} 의 중점이므로

$$x=a, y=\frac{b}{2} \quad \therefore a=x, b=2y \quad \dots \textcircled{\text{2}}$$

②을 ①에 대입하면 구하는 도형의 방정식은

$$x^2 + (2y)^2 = 4 \quad \therefore \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$



원칙

(1) 원 $x^2 + y^2 = a^2$ 을 y 축의 방향으로 $\frac{b}{a}$ 배 확대 또는 축소한 도형은 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(2) 원 $x^2 + y^2 = b^2$ 을 x 축의 방향으로 $\frac{a}{b}$ 배 확대 또는 축소한 도형은 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

정답과 풀이 6쪽 ▶

유제 021 원 $x^2 + y^2 = 9$ 를 x 축의 방향으로 2배 확대한 도형의 방정식을 구하여라.

유제 022 원 $x^2 + y^2 = 16$ 위의 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라고 할 때, 선분 PH 의 중점 Q 가 나타내는 도형의 방정식을 구하여라.

연습문제

Step 1

017 두 점 $(0, 3)$, $(0, -3)$ 을 초점으로 하고 장축의 길이가 10인 타원의 방정식을 구하여라.

018 타원 $3x^2 + y^2 = 12$ 위의 한 점 $P(1, 3)$ 과 이 타원의 두 초점 F, F' 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 PFF' 의 넓이를 구하여라.

019 점 $F(1, 0)$ 과 직선 $x=4$ 로부터의 거리의 비가 $1:2$ 인 점 P 의 자취의 방정식을 구하여라.

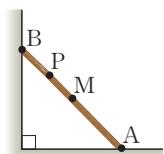
020 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 의 두 초점 F, F' 을 지름의 양 끝점으로 하는 원이 있다. 타원과 원이 제1사분면과 제3사분면 위에서 만나는 점을 각각 P, Q 라고 할 때, 사각형 $PF'QF$ 의 둘레의 길이를 구하여라.

021 타원 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$ 의 두 초점 F, F' 과 이 타원 위의 점 P 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 PFF' 의 넓이의 최댓값을 구하여라.

022 타원 $3x^2 + 2y^2 - 12x + 4y - 4 = 0$ 과 합동인 타원 $9x^2 + 6y^2 = m$ 의 두 초점의 좌표를 구하여라.
(단, m 은 상수)

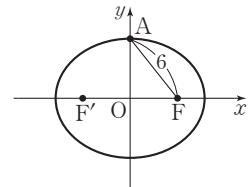
023 타원 $8x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 55 = 0$ 의 초점의 좌표가 $(a, b), (c, d)$, 중심의 좌표가 (e, f) 일 때, $a+b+c+d+e+f$ 의 값을 구하여라.

024 오른쪽 그림과 같이 길이가 4인 나무 막대 AB 가 벽에 기대어 있고 점 M 은 나무 막대의 중점, 점 P 는 선분 BM 의 중점이다. 이 나무 막대가 벽과 바닥에 닿은 상태로 바닥까지 미끄러질 때, 나무 막대 위의 점 P 가 그리는 도형은 어떤 타원의 일부이다. 이 타원의 장축의 길이를 구하여라.



Step 2

- 025** 오른쪽 그림과 같이 중심이 원점이고 두 초점이 F, F' 인 타원이 y 축과 만나는 점 중에서 y 좌표가 양수인 점을 A 라고 하자. $\overline{AF}=6$ 일 때, 이 타원의 장축의 길이를 구하여라.



- 026** 초점이 $F(3, 0), F'(-3, 0)$ 이고, 장축과 단축의 길이의 차가 2인 타원의 장축과 단축의 길이의 합을 구하여라.

- 027** 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$)의 두 초점 중 한 초점이 포물선 $y^2 = -12x$ 의 초점과 일치한다고 한다.

타원과 포물선의 교점을 A, B , 타원의 두 초점을 F, F' 이라고 할 때, 사각형 $AF'BF$ 의 둘레의 길이를 구하여라.

- 028** 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 에 내접하는 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하여라.

- 029** 타원 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{10} = 1$ 과 합동인 것만을 보기에서 있는 대로 골라라.

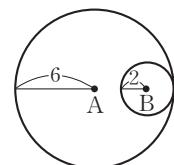
보기

$$\neg. 5x^2 + 2y^2 = 10$$

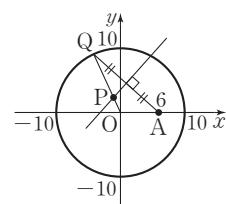
$$\therefore 5x^2 + y^2 - 10x = 10$$

$$\therefore 5x^2 + y^2 - 10y + 15 = 0$$

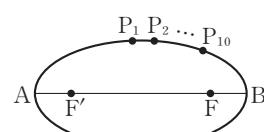
- 030** 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 6인 원 A 안에 반지름의 길이가 2인 원 B 가 내접하고 있다. 원 A 와 내접하고 원 B 와 외접하는 원의 중심 P 의 자취는 타원일 때, 이 타원의 장축의 길이를 구하여라.



- 031** 오른쪽 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 100$ 과 x 축 위의 점 $A(6, 0)$ 이 있다. 원 위의 점 Q 에 대하여 선분 AQ 의 수직이등분선과 선분 OQ 의 교점을 P 라고 할 때, 점 P 가 그리는 도형의 방정식을 구하여라. (단, O 는 원점)



- 032** 오른쪽 그림은 두 별 F, F' 을 초점으로 하는 타원 궤도 위에 설치한 10개의 우주 정거장 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{10}$ 을 간단하게 나타낸 것이다. 직선 FF' 과 타원 궤도의 교점을 A, B 라고 할 때, 두 점 A, B 사이의 거리는 10^6 km이다. $\sum_{k=1}^{10} \overline{P_kF} = 4 \times 10^6$ (km)이면 $\sum_{k=1}^{10} \overline{P_kF'} = a \times 10^6$ (km)일 때, 실수 a 의 값을 구하여라.



5

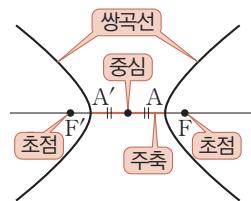
쌍곡선의 방정식

1. 이차곡선

01 쌍곡선의 정의

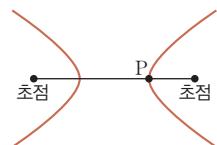
평면 위의 두 점 F, F' 으로부터의 거리의 차가 일정한 점들의 집합을 쌍곡선이라고 한다.

- (1) **초점**: 두 점 F, F'
- (2) **꼭짓점**: 쌍곡선과 선분 FF' 의 교점 A, A'
- (3) **주축**: 선분 AA'
- (4) **중심**: 선분 AA' 의 중점



증명자료 쌍곡선 위의 어느 점 P 에서도 두 초점까지의 거리의 차는 일정하다.

특히, 점 P 가 꼭짓점에 있을 때를 관찰하면 쌍곡선의 중요한 성질 하나를 알 수 있다.
바로 거리의 차가 주축의 길이와 같다는 것.



증명자료 ① 쌍곡선 위의 점에서 두 초점까지의 거리의 차는 주축의 길이와 같다.
② 쌍곡선의 중심은 두 초점을 이은 선분의 중점이다.

증명자료 타원에선 (거리의 합)= (장축의 길이)
쌍곡선에선 (거리의 차)= (주축의 길이)

02 쌍곡선의 방정식

방정식	$(1) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (단, } c > a > 0, c^2 = a^2 + b^2\text{)}$	$(2) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ (단, } c > b > 0, c^2 = a^2 + b^2\text{)}$
그래프		
거리의 차 (=주축의 길이)	$ \overline{PF} - \overline{PF'} = 2a$	$ \overline{PF} - \overline{PF'} = 2b$
꼭짓점의 좌표	$(a, 0), (-a, 0)$	$(0, b), (0, -b)$
초점의 좌표	$F(\sqrt{a^2+b^2}, 0), F'(-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$	$F(0, \sqrt{a^2+b^2}), F'(0, -\sqrt{a^2+b^2})$

증명자료 쌍곡선의 방정식 (1)과 (2)의 비교.

[비교 1] 타원에선 a 의 값이 큰지, b 의 값이 큰지가 중요. 쌍곡선에선 우변이 1인지, -1 인지가 중요.

→ 우변이 1이면 초점, 주축 등 중요한 건 모두 x 축 위에 있다.
우변이 -1 이면 초점, 주축 등 중요한 건 모두 y 축 위에 있다.

[비교 2] 초점 공식은 이렇게 암기한다. $\Rightarrow c = \sqrt{\text{분모의 합}}$

[비교 3] 둘 다 초점이 원점 대칭 \Rightarrow 중심이 원점

03 쌍곡선의 점근선

(1) 점근선 : 곡선이 어떤 직선에 한없이 가까워질 때, 이 직선을 그 곡선의 점근선이라고 한다.

(2) 쌍곡선의 점근선 : 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ 의 점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{b}{a}x$

▶ 풀이자료 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에서 $y = \pm \frac{b}{a}x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$

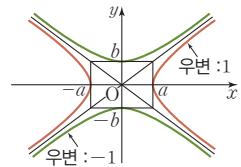
이때 x 의 값이 한없이 커지거나 작아지면 $\frac{a^2}{x^2}$ 의 값이 0에 한없이 가까워지므로 쌍곡선은 두 직선 $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$ 에 한없이 가까워진다.

▶ 풀이자료 모든 쌍곡선은 신기하게도 한없이 가까워지는 점근선이 있다. 이 점근선의 방정식을 구하는 공식은 쌍곡선의 방정식에서 우변의 ± 1 을 0으로 고치면 얻을 수 있다. 즉,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 \rightarrow y = \pm \frac{b}{a}x$$

▶ 풀이자료 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ 은 네 점 (a, b) , $(a, -b)$, $(-a, b)$, $(-a, -b)$ 를 찍어 오른쪽

그림과 같이 직사각형을 만든 후, 점근선을 나타내고 그러면 편하게 그릴 수 있다.

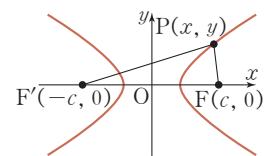


• 한 걸음 더

1 쌍곡선의 방정식(1)

오른쪽 그림의 좌표축 설정은 쌍곡선의 중심이 원점이 되도록 한 설정.

이 설정에서 얻은 쌍곡선의 방정식, 즉 두 점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ 으로부터의 거리의 차가 $2a$ 인 쌍곡선의 방정식이 바로 쌍곡선의 방정식의 표준형. (단, $c > a > 0$)



이 쌍곡선의 방정식을 구해 보자.

(i) 쌍곡선 위의 점을 $P(x, y)$ 로 놓는다.

(ii) 쌍곡선의 정의에 의하여 $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 2a$

$$\therefore \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

(iii) 근호 하나를 이항하여 제곱한 후, 다시 제곱하여 정리하면

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

(o) 계산은 복잡하고 중요하지 않으니 그러려니 하고 넘어가자.)

$$(iv) c^2 - a^2 = b^2 \text{ 으로 놓으면 } b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad \therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

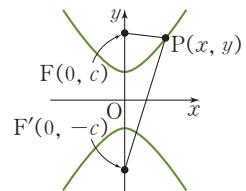
2 쌍곡선의 방정식(2)

오른쪽 그림의 쌍곡선은 두 점 $F(0, c)$, $F'(0, -c)$ 로부터의 거리의 차

가 $2b$ 인 쌍곡선. 앞의 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭

이동한 후 a, b 를 바꾸면 이 쌍곡선이 된다.

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$



필수예제 016 쌍곡선의 방정식(1)

다음 쌍곡선의 방정식을 구하여라.

(1) 두 점 $F(2, 0), F'(-2, 0)$ 으로부터의 거리의 차가 2인 쌍곡선

(2) 두 점 $F(0, 3), F'(0, -3)$ 으로부터의 거리의 차가 4인 쌍곡선

蓬선자 두 점으로부터의 거리의 차가 일정하므로 쌍곡선의 방정식을 생각한다.

(1) 초점이 x 축 위에 있으므로 거리의 차는 $2a$, 초점 공식에서 $c^2 = a^2 + b^2$

(2) 초점이 y 축 위에 있으므로 거리의 차는 $2b$, 초점 공식에서 $c^2 = a^2 + b^2$

| 풀이 | (1) 초점이 x 축 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이라고 하자.

$$\text{거리의 차가 } 2\text{이므로 } 2a = 2 \quad \therefore a = 1 \quad \dots \textcircled{\text{R}}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{에서 } 2^2 = 1^2 + b^2 \quad \therefore b^2 = 3 \quad \dots \textcircled{\text{L}}$$

$$\textcircled{\text{R}}, \textcircled{\text{L}} \text{ 을 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{에 대입하면}$$

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$$

(2) 초점이 y 축 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 이라고 하자.

$$\text{거리의 차가 } 4\text{이므로 } 2b = 4 \quad \therefore b = 2 \quad \dots \textcircled{\text{R}}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{에서 } 3^2 = a^2 + 2^2 \quad \therefore a^2 = 5 \quad \dots \textcircled{\text{L}}$$

$$\textcircled{\text{R}}, \textcircled{\text{L}} \text{ 을 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{에 대입하면}$$

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = -1$$

(1) 두 점 $F(c, 0), F'(-c, 0)$ 으로부터의 거리의 차가 $2a$ 인 쌍곡선의 방정식

$$\rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (단, } c^2 = a^2 + b^2\text{)}$$

대원칙

(2) 두 점 $F(0, c), F'(0, -c)$ 로부터의 거리의 차가 $2b$ 인 쌍곡선의 방정식

$$\rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ (단, } c^2 = a^2 + b^2\text{)}$$

정답과 풀이 6쪽 ▶

유제 023 다음 쌍곡선의 방정식을 구하여라.

(1) 두 점 $F(4, 0), F'(-4, 0)$ 으로부터의 거리의 차가 6인 쌍곡선

(2) 두 점 $F(0, 5), F'(0, -5)$ 로부터의 거리의 차가 8인 쌍곡선

필수예제 017

쌍곡선의 주축의 길이와 초점의 좌표

다음 쌍곡선의 그래프를 그리고, 점근선의 방정식과 주축의 길이 및 중심, 꼭짓점, 초점의 좌표를 각각 구하여라.

$$(1) \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$(2) \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$$

【풀이】 그레프를 그릴 때는 네 점 $(4, 3), (4, -3), (-4, 3), (-4, -3)$ 을 찍어 직사각형을 만든 후 점근선을 먼저 나타낸다.

- 우변이 1일 때는 x 축 방향으로 뻗어나가는 그래프.
- 우변이 -1 일 때는 y 축 방향으로 뻗어나가는 그래프.

| 풀이 | (1) $a=4, b=3$ 이므로 그레프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.

$$\therefore \text{점근선: } y = \pm \frac{3}{4}x$$

주축의 길이: $2a = 2 \times 4 = 8$

중심: $(0, 0)$

꼭짓점: $(4, 0), (-4, 0)$

초점: 초점 공식에서 $c = \sqrt{16+9}=5$ 이므로

$(5, 0), (-5, 0)$

(2) $a=4, b=3$ 이므로 그레프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.

$$\therefore \text{점근선: } y = \pm \frac{3}{4}x$$

주축의 길이: $2b = 2 \times 3 = 6$

중심: $(0, 0)$

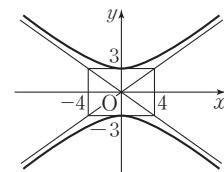
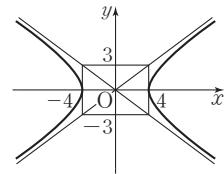
꼭짓점: $(0, 3), (0, -3)$

초점: 초점 공식에서 $c = \sqrt{16+9}=5$ 이므로

$(0, 5), (0, -5)$

| 참고 | 위와 같이 우변의 부호만 다른 두 쌍곡선을 결레쌍곡선이라고 한다.

(1)과 (2)는 서로 결레쌍곡선 관계.



$$(1) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } c^2 = a^2 + b^2)$$

① 주축의 길이: $2a$

② 꼭짓점: $(a, 0), (-a, 0)$

③ 초점: $(c, 0), (-c, 0)$

$$(2) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (\text{단, } c^2 = a^2 + b^2)$$

① 주축의 길이: $2b$

② 꼭짓점: $(0, b), (0, -b)$

③ 초점: $(0, c), (0, -c)$

정답과 풀이 7쪽 ▶

유제 024 다음 쌍곡선의 그래프를 그리고, 점근선의 방정식과 주축의 길이 및 중심, 꼭짓점, 초점의 좌표를 각각 구하여라.

$$(1) x^2 - y^2 = 4$$

$$(2) x^2 - y^2 = -9$$

필수예제 018

쌍곡선의 방정식 (2)

초점이 $F(6, 0)$, $F'(-6, 0)$ 이고, 주축의 길이가 10인 쌍곡선의 방정식을 구하여라.

풀이 초점이 x 축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 주축의 길이는 $2a$

| 풀이 | 초점이 x 축 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이라고 하자.

$$\text{주축의 길이가 } 10 \text{ 이므로 } 2a = 10 \quad \therefore a = 5 \quad \dots \textcircled{\text{1}}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{에서 } 6^2 = 5^2 + b^2 \quad \therefore b^2 = 11 \quad \dots \textcircled{\text{2}}$$

$$\textcircled{\text{1}}, \textcircled{\text{2}} \text{ 을 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 에 대입하면 } \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$$

필수예제 019

쌍곡선의 방정식 (3)

초점이 $F(0, 5)$, $F'(0, -5)$ 이고, 점근선의 방정식이 $y = \pm \frac{1}{2}x$ 인 쌍곡선의 방정식을 구하여라.

풀이 초점이 y 축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, 주축의 길이는 $2b$

$$\text{점근선의 방정식은 } y = \pm \frac{b}{a}x$$

| 풀이 | 초점이 y 축 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 이라고 하자.

$$\text{점근선의 방정식이 } y = \pm \frac{1}{2}x \text{ 이므로}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2} \quad \therefore a = 2b \quad \dots \textcircled{\text{1}}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{에서 } 5^2 = a^2 + b^2 \quad \dots \textcircled{\text{2}}$$

$$\textcircled{\text{1}} \text{ 을 } \textcircled{\text{2}} \text{ 에 대입하면 } 5^2 = 4b^2 + b^2 \quad \therefore a^2 = 20, b^2 = 5 \quad \dots \textcircled{\text{3}}$$

$$\textcircled{\text{3}} \text{ 을 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ 에 대입하면 } \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = -1$$

대원칙

(1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 주축의 길이는 $2a$, 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 의 주축의 길이는 $2b$

(2) 점근선의 방정식은 항상 $y = \pm \frac{b}{a}x$

정답과 풀이 7쪽 ▶

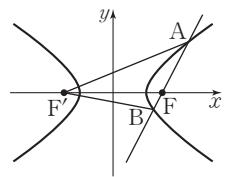
유제 025 초점이 $F(0, 7)$, $F'(0, -7)$ 이고, 주축의 길이가 12인 쌍곡선의 방정식을 구하여라.

유제 026 초점이 $F(\sqrt{3}, 0)$, $F'(-\sqrt{3}, 0)$ 이고, 점근선의 방정식이 $y = \pm \sqrt{2}x$ 인 쌍곡선의 방정식을 구하여라.

필수예제 020

쌍곡선의 정의의 활용

오른쪽 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 의 두 초점을 F, F' 이라 하고, 점 F 를 지나는 직선이 쌍곡선의 $x > 0$ 인 부분과 만나는 두 점을 각각 A, B 라고 하자. $\overline{AB} = 8$ 일 때, 삼각형 $AF'B$ 의 둘레의 길이를 구하여라.



증명자료 주어진 쌍곡선은 주축의 길이가 8인 쌍곡선.

쌍곡선 위의 점에서 두 초점까지의 거리의 차는 주축의 길이와 같음을 이용한다.

| 풀이 | 주어진 쌍곡선은 주축의 길이가 8인 쌍곡선이므로

쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{AF} - \overline{AF'} = (\text{주축의 길이}) = 8 \quad \dots \quad \textcircled{\text{R}}$$

$$\overline{BF} - \overline{BF'} = (\text{주축의 길이}) = 8 \quad \dots \quad \textcircled{\text{L}}$$

$\textcircled{\text{R}}, \textcircled{\text{L}}$ 을 변끼리 더하면

$$\overline{AF} - \overline{AF'} + \overline{BF} - \overline{BF'} = 16$$

$$(\overline{AF} + \overline{BF}) - (\overline{AF'} + \overline{BF'}) = 16$$

그런데 주어진 조건에서 $\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF} = 8$ 이므로

$$\overline{AF} + \overline{BF} = 24$$

$$\therefore (\Delta AF'B \text{의 둘레의 길이}) = \overline{AF} + \overline{BF} + \overline{AB}$$

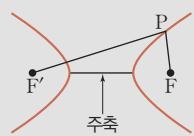
$$= 24 + 8 = 32$$

원칙

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 한 점 P 에서 두 초점 F, F' 까지의 거리의 차는 주축의 길이

와 같다.

$$\rightarrow |\overline{PF} - \overline{PF'}| = (\text{거리의 차}) = (\text{주축의 길이}) = 2a \quad (\text{단}, a > 0)$$

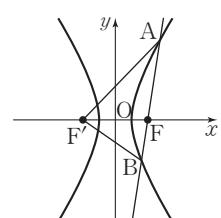


정답과 풀이 7쪽 ▶

유제 027 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 위의 한 점 P 와 두 초점 F, F' 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 FPF' 의 둘레의 길이가 20일 때, $|\overline{PF}^2 - \overline{PF'}^2|$ 의 값을 구하여라.

유제 028 오른쪽 그림과 같이 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 의 두 초점을 F, F' 이라 하고,

점 F 를 지나는 직선이 쌍곡선의 $x > 0$ 인 부분과 만나는 두 점을 각각 A, B 라고 하자. 삼각형 $AF'B$ 의 둘레의 길이가 24일 때, 선분 AB 의 길이를 구하여라.



6

쌍곡선의 평행이동

1. 이차곡선

01 쌍곡선의 평행이동

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 쌍곡선의 방정식 $\rightarrow \frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = \pm 1$

증명 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한

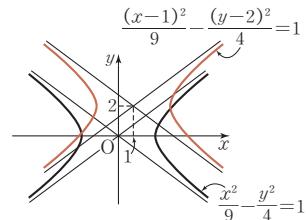
$$\text{쌍곡선의 방정식은 } \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

① 중심의 좌표 : $(0, 0) \rightarrow (1, 2)$

② 초점의 좌표 : $(\sqrt{13}, 0), (-\sqrt{13}, 0) \rightarrow (\sqrt{13}+1, 2), (-\sqrt{13}+1, 2)$

③ 꼭짓점의 좌표 : $(3, 0), (-3, 0) \rightarrow (4, 2), (-2, 2)$

④ 점근선의 방정식 : $y = \pm \frac{2}{3}x \rightarrow y = \pm \frac{2}{3}(x-1) + 2$



증명 쌍곡선을 평행이동하면 모양은 변하지 않고 그 위치만 이동되므로 주축의 길이는 변하지 않는다.

그러나 초점과 중심, 꼭짓점, 점근선은 평행이동에 의하여 이동된다.

02 쌍곡선의 방정식의 일반형

$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ (단, $AB < 0$)

$$\rightarrow \frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \text{ 또는 } \frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = -1 \text{ 꼴로 변형}$$

증명 쌍곡선의 방정식의 일반형은 평행이동한 식 $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = \pm 1$ 의 양변에 a^2b^2 를 곱한 후 전개하여 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} b^2(x-m)^2 - a^2(y-n)^2 &= \pm a^2b^2 \xrightarrow{\text{전개}} b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2mx + 2a^2ny + b^2m^2 - a^2n^2 \pm a^2b^2 = 0 \\ &\xrightarrow{\quad\quad\quad} Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \text{ (단, } AB < 0\text{)} \end{aligned}$$

증명 x^2 항과 y^2 항의 계수의 부호가 다르다.

03 이차곡선

계수가 실수인 두 일차식의 곱으로 인수분해되지 않는 x, y 에 대한 이차방정식

$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ (A, B, C, D, E, F 는 상수)

이 나타내는 평면곡선을 **이차곡선**이라고 한다.

증명 원, 포물선, 타원, 쌍곡선은 모두 이차곡선이다. $C=0$ 이고 다음과 같은 특징을 가질 때, 원, 포물선, 타원, 쌍곡선으로 분류된다.

① $A=B \neq 0, D^2+E^2-4AF>0 \rightarrow$ 원

② $A=0, BD \neq 0$ 또는 $B=0, AE \neq 0 \rightarrow$ 포물선

③ $AB>0, A \neq B \rightarrow$ 타원

④ $AB<0 \rightarrow$ 쌍곡선

예 ① $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0 \rightarrow$ 원

③ $4x^2 + y^2 - 16x - 6y + 21 = 0 \rightarrow$ 타원

② $y^2 + 4x + 4y - 8 = 0 \rightarrow$ 포물선

④ $4x^2 - y^2 - 24x + 4y + 28 = 0 \rightarrow$ 쌍곡선

필수예제 021

두 초점이 원점 대칭이 아닌 쌍곡선의 방정식

초점이 $F(0, 0)$, $F'(10, 0)$ 이고, 주축의 길이가 6인 쌍곡선의 방정식을 구하여라.

풀이 두 초점이 원점 대칭인 쌍곡선의 방정식은 표준형 공식 한 방이면 구해진다. 두 초점이 원점 대칭이 아닐 때는? 중심과 c 의 값을 구한 후 공식을 이용한다.

| 풀이 | [1단계] 쌍곡선의 중심은 두 초점을 이은 선분의 중점이므로 $(5, 0)$

$$\text{따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은 } \frac{(x-5)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

[2단계] 초점과 중심 사이의 거리가 c 이므로 $c=5$

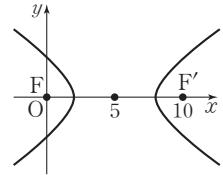
주축의 길이가 6이므로

$$2a=6 \quad \therefore a=3$$

$$c^2=a^2+b^2 \text{에서 } 5^2=3^2+b^2 \quad \therefore b^2=16$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x-5)^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$



다른풀이 쌍곡선 위의 한 점을 $P(x, y)$ 라고 하면

쌍곡선의 정의에 의하여 $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = (\text{주축의 길이}) = 6$ 이므로

$$|\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{(x-10)^2+y^2}| = 6$$

$$\sqrt{(x-10)^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2} \pm 6 \quad \leftarrow |A|=B \ (B>0) \text{이면 } A=\pm B$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$\pm 3\sqrt{x^2+y^2} = -5x + 16$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$16(x-5)^2 - 9y^2 = 144$$

$$\therefore \frac{(x-5)^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

두 초점이 원점 대칭이 아닌 쌍곡선의 방정식은 다음과 같이 중심과 c 의 값을 구한 후 공식을 이용한다.

(1) 쌍곡선의 중심은 항상 두 초점을 이은 선분의 중점이고, c 의 값은 초점과 중심 사이의 거리이다.

원칙

(2) 중심의 좌표가 (m, n) 인 쌍곡선 : $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = \pm 1$, $c^2 = a^2 + b^2$

(단, $\begin{array}{l} > \\ < \end{array}$ 형이면 1, $\begin{array}{l} < \\ > \end{array}$ 형이면 -1)

정답과 풀이 8쪽 ►

유제 029 초점이 $F(1, 0)$, $F'(1, 8)$ 이고, 주축의 길이가 6인 쌍곡선의 방정식을 구하여라.

유제 030 다음 자취의 방정식을 구하여라.

(1) 두 점 $F(0, 0)$, $F'(6, 0)$ 으로부터의 거리의 차가 4인 점의 자취

(2) 두 점 $F(0, 0)$, $F'(0, 8)$ 로부터의 거리의 차가 4인 점의 자취

필수예제 022

쌍곡선의 방정식의 일반형

쌍곡선 $4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y - 68 = 0$ 의 점근선의 방정식과 주축의 길이 및 초점, 꼭짓점, 중심의 좌표를 각각 구하여라.

▶ 풀이자료 앞에서 보았듯이, 표준형이 주어지면 점근선의 방정식과 주축의 길이 및 초점의 좌표 등을 그래프를 그린 후 공식 한 방에 구해진다. 그럼, 표준형이 아닐 때는?

일단, $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = \pm 1$ 꼴로 고친 후 평행이동 형태를 관찰한다.

| 풀이 | [1단계] 주어진 쌍곡선의 방정식을 변형하면

$$4(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 4y) - 68 = 0 \text{에서}$$

$$4(x-1)^2 - 9(y+2)^2 = 36$$

$$\therefore \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

[2단계] ①은 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로

-2만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{쌍곡선 } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \text{에서 } a=3, b=2 \text{이므로}$$

$$\text{점근선: } y = \pm \frac{2}{3}x, \text{ 주축의 길이: } 2a = 2 \times 3 = 6$$

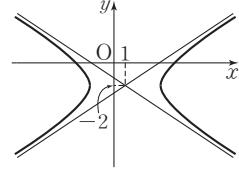
$$\text{초점: } c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \text{이므로 } (\sqrt{13}, 0), (-\sqrt{13}, 0)$$

$$\text{꼭짓점: } (3, 0), (-3, 0), \text{ 중심: } (0, 0)$$

[3단계] 따라서 주어진 쌍곡선에서

$$\text{점근선: } y = \pm \frac{2}{3}(x-1) - 2, \text{ 주축의 길이: } 6$$

$$\text{초점: } (\sqrt{13}+1, -2), (-\sqrt{13}+1, -2), \text{ 꼭짓점: } (4, -2), (-2, -2), \text{ 중심: } (1, -2)$$



(1) 평행이동을 하여도 쌍곡선의 주축의 길이는 변하지 않지만 초점, 중심, 꼭짓점, 점근선은 평행이동된다.

▶ **대원칙**

(2) 쌍곡선의 방정식의 일반형을 표준형으로 고치는 법

→ 같은 문자끼리 원전제곱식으로 고친 후 우변을 ± 1 로 만든다.

(3) 점 (x, y) 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동 → x 대신 $x+m$, y 대신 $y+n$ 대입

정답과 풀이 8쪽 ▶

유제 031 다음 쌍곡선의 점근선의 방정식과 주축의 길이 및 초점, 꼭짓점, 중심의 좌표를 각각 구하여라.

$$(1) x^2 - 4y^2 + 4x + 8y - 4 = 0$$

$$(2) x^2 - y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$$

Step 1

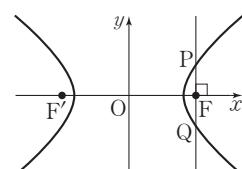
033 두 점 $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$ 으로부터의 거리의 차가 일정한 점 P 의 자취의 꼭짓점의 좌표가 $(2, 0)$, $(-2, 0)$ 일 때, 점 P 의 자취의 방정식을 구하여라.

034 점근선의 방정식이 $y = \pm 2x$ 이고, 점 $(2, 2)$ 를 지나는 쌍곡선의 주축의 길이를 구하여라.

035 타원 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5} = 1$ 과 두 초점을 공유하고, 점 $(1, 2)$ 를 지나는 쌍곡선의 방정식을 구하여라.

036 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ 의 초점에서 이 쌍곡선의 점근선까지의 거리를 구하여라.

037 오른쪽 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ 의 한 초점 F 를 지나고 x 축에 수직인 직선이 쌍곡선과 만나는 두 점을 각각 P , Q 라고 할 때, 선분 PQ 의 길이를 구하여라.



038 쌍곡선 $3x^2 - y^2 - 6x - 4y - 4 = 0$ 의 초점의 좌표가 (a, b) , (c, d) 일 때, $|ad - bc|$ 의 값을 구하여라.

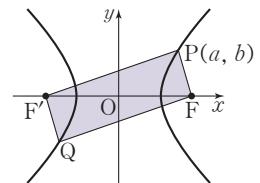
039 점 $F(4, 0)$ 과 직선 $x=1$ 로부터의 거리의 비가 $2 : 1$ 인 점 P 의 자취의 방정식을 구하여라.

040 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 의 두 초점을 F , F' 이라 하고, 쌍곡선 위의 한 점 P 에 대하여 $\angle FPF' = 90^\circ$ 일 때, 삼각형 PFF' 의 넓이를 구하여라.

Step 2

- 041** 오른쪽 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 의 두 초점을 F, F' 이라 하고,

꼭짓점이 아닌 쌍곡선 위의 한 점 $P(a, b)$ 와 원점에 대하여 대칭인 점을 Q 라고 하자. 사각형 $F'QFP$ 의 넓이가 40일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

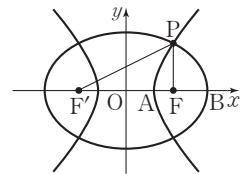


- 042** 점근선의 방정식이 $y = \pm \frac{1}{2}x$ 인 두 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = -1$ 의 꼭짓점을 연결하여 만든 사각형의 둘레의 길이가 20일 때, 양수 a, b 의 값을 구하여라.

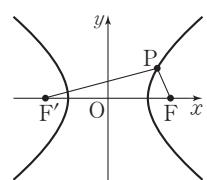
- 043** 쌍곡선 $x^2 - 3y^2 = 3$ 의 두 점근선이 이루는 예각의 크기를 구하여라.

- 044** 쌍곡선 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ 의 한 초점을 중심으로 하고 쌍곡선의 점근선에 접하는 원의 넓이를 구하여라.

- 045** 오른쪽 그림과 같이 두 초점 F, F' 을 공유하는 타원과 쌍곡선이 제1사분면 위에서 만나는 점을 P , 쌍곡선과 타원이 x 축의 양의 부분과 만나는 점을 각각 A, B 라고 하자. $F(1, 0), F'(-1, 0), P(1, 1)$ 일 때, 선분 AB 의 길이를 구하여라.

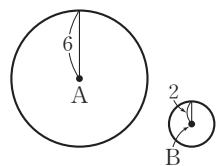


- 046** 오른쪽 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{18} = 1$ 의 두 초점 F, F' 과 쌍곡선 위의 한 점 P 에 대하여 $\overline{PF} : \overline{PF'} = 1 : 3$ 일 때, 삼각형 $PF'F$ 의 둘레의 길이를 구하여라.



- 047** 점 $P(x, y)$ 에서 두 직선 $2x - y = 0, 2x + y = 0$ 에 내린 수선의 발을 각각 A, B 라고 하자. $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = 2$ 를 만족시키는 점 P 의 자취의 방정식을 구하여라.

- 048** 오른쪽 그림과 같이 중심이 각각 A, B 이고 반지름의 길이가 각각 6, 2인 두 원이 서로 만나지 않는다. 두 원 중 한 원은 외접하고 다른 한 원은 내접하는 원을 생각할 때, 이 원의 중심 P 의 자취는 쌍곡선이다. 점 P 의 자취의 주축의 길이를 구하여라.





I 평면곡선



1 이차곡선

2 평면곡선의 접선



1 음함수의 미분법	042
2 음함수로 나타낸 곡선의 접선의 방정식	044
3 매개변수로 나타낸 함수의 미분법과 접선의 방정식	049
• 연습문제	051

01 음함수의 뜻

x 와 y 의 값의 범위를 적당히 정하면 y 는 x 의 함수가 되는

$$f(x, y)=0$$

꼴로 주어질 때, y 를 x 의 음함수 표현이라고 한다.

▶ 풍선자료 x 의 함수 y 가 $y=f(x)$ 꼴로 주어졌을 때 y 를 x 의 양함수라 하고, x 의 함수 y 가 $f(x, y)=0$ 꼴로 주어졌을 때 y 를 x 의 음함수라고 한다.

▶ 풍선자료 원 $x^2+y^2-1=0$, 포물선 $y^2-4x=0$, 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2-1=0$, 쌍곡선 $x^2-y^2-1=0$ 과 같은 1차곡선의 방정식은 모두 음함수 표현이다.

02 음함수의 미분법

x 의 함수 y 가 음함수 $f(x, y)=0$ 꼴로 주어질 때에는 y 를 x 의 함수로 보고 각 항을 x 에 대하여 미분하

여 $\frac{dy}{dx}$ 를 구한다.

▶ 풍선자료 x 의 함수 y 가 $f(x, y)=0$ 의 꼴로 주어진 경우의 미분, 즉 음함수로 표현된 함수의 미분은 음함수의 미분법을 이용하는 것이 편리하다.

예를 들어 $y^2+4y-x+2=0$ 을 $y=f(x)$ 꼴로 변형하면 $y=-2 \pm \sqrt{2+x}$

(i) $y > -2$ 일 때, $y = -2 + \sqrt{2+x}$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} = \frac{1}{2(y+2)}$$

(ii) $y < -2$ 일 때, $y = -2 - \sqrt{2+x}$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{2+x}} = \frac{1}{2(y+2)}$$

(i), (ii)에 의하여 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(y+2)}$ ($y \neq -2$)

→ 이와 같이 음함수로 표현된 함수를 미분하는 경우에는 $y=f(x)$ 꼴로 변형하기 어려운 경우가 많고, 변형하여도 계산이 어려운 경우가 많으므로 음함수의 미분법을 이용하는 것이 편리하다.

확인 음함수 $x^2-y^2=1$ 에서 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하여라.

풀이 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(1), 2x - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

필수예제 023

음함수의 미분법

다음 음함수에서 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하여라.

(1) $x^2 + y^2 = 4$

(2) $x^3 + y^3 = xy$

(3) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$

(4) $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = 1$

【증명】 음함수의 미분은 양변을 x 에 대하여 미분하되 $\frac{d}{dx} y^n = ny^{n-1} \frac{dy}{dx}$ 의 성질을 이용한다.

특히, (2)에서 xy 항의 미분은 곱의 미분법, 즉 $(xy)' = (x'y + x(y))'$ 을 이용한다.

| 풀이 | (1) 양변을 x 에 대하여 미분하면 $\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(4)$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

(2) 양변을 x 에 대하여 미분하면 $\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) = \frac{d}{dx}(xy)$

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = y + x \frac{dy}{dx}, \quad (x - 3y^2) \frac{dy}{dx} = 3x^2 - y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y}{x - 3y^2} \quad (x - 3y^2 \neq 0)$$

(3) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $\frac{d}{dx}(x^{\frac{2}{3}}) + \frac{d}{dx}(y^{\frac{2}{3}}) = \frac{d}{dx}(1)$

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} \frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}} \quad (x \neq 0)$$

(4) 양변에 xy 를 곱하면 $x^2 - y^2 = xy$

양변을 x 에 대하여 미분하면 $\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(xy)$

$$2x - 2y \frac{dy}{dx} = y + x \frac{dy}{dx}, \quad (x + 2y) \frac{dy}{dx} = 2x - y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x + 2y} \quad (x + 2y \neq 0)$$

각 항을 x 에 대하여 미분할 때

【원칙】

• 같은 변수이면 $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$

• 다른 변수이면 $\frac{d}{dx} y^n = ny^{n-1} \frac{dy}{dx}$

정답과 풀이 8쪽 ▶

유제 032 다음 음함수에서 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하여라.

(1) $2x^2 + 3y^2 = 6$

(2) $x^2 + 3y^2 = 4xy$

(3) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

(4) $x^2 y^3 = 3$

(5) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

(6) $\ln|y| = 2x^2$

01 음함수로 나타낸 평면곡선의 접선의 방정식

음함수의 꼴로 주어진 곡선 $f(x, y)=0$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

- ① 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$ 를 구한다.
- ② ①에서 구한 $\frac{dy}{dx}$ 에 점 P의 좌표를 대입하여 접선의 기울기를 구한다.
- ③ 점 P의 좌표와 ②에서 구한 기울기를 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

02 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식

(1) 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2p(x+x_1)$$

(2) 포물선 $x^2=4py$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x=2p(y+y_1)$$

▶ 풀이 포물선뿐만 아니라 원이나 타원, 쌍곡선 등 모든 이차곡선에서 곡선 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은 구하는 공식이 있다. 공식의 규칙은 항상 다음과 같다.
이차곡선의 방정식에 다음을 대입한다.

$$x^2 \text{ 대신 } \rightarrow x_1x, \quad y^2 \text{ 대신 } \rightarrow y_1y, \quad x \text{ 대신 } \rightarrow \frac{x+x_1}{2}, \quad y \text{ 대신 } \rightarrow \frac{y+y_1}{2}$$

▶ 확인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 $(2, 4)$ 에서의 접선의 방정식을 구하여라.

풀이 $p=2$ 이고 $x_1=2, y_1=4$ 이므로 접선의 방정식은 $4y=2 \cdot 2(x+2)$ $\therefore y=x+2$

03 타원 위의 점에서의 접선의 방정식

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

▶ 확인 타원 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ 위의 점 $(2, -1)$ 에서의 접선의 방정식을 구하여라.

풀이 $x_1=2, y_1=-1$ 이므로 접선의 방정식은 $\frac{2x}{6} + \frac{(-1) \cdot y}{3} = 1$ $\therefore y=x-3$

04

쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

(1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$

(2) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = -1$

확인 쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 위의 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 방정식을 구하여라.

풀이 $x_1=2, y_1=1$ 이므로 접선의 방정식은 $\frac{2x}{2} - 1 \cdot y = 1 \quad \therefore y = x - 1$

한 걸음 더

◎ 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식의 증명

(1) 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은 $y_1y = 2p(x + x_1)$

증명 (i) $y_1 \neq 0$ 일 때,

$y^2 = 4px$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2y \frac{dy}{dx} = 4p \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y}$$

점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{2p}{y_1}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_1}(x - x_1) \quad \therefore y_1y - y_1^2 = 2p(x - x_1) \quad \dots \textcircled{1}$$

그런데 점 $P(x_1, y_1)$ 은 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점이므로

$$y_1^2 = 4px_1 \quad \dots \textcircled{2}$$

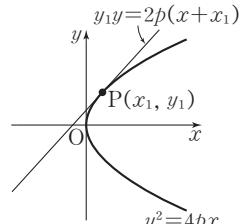
$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$y_1y - 4px_1 = 2p(x - x_1) \quad \therefore y_1y = 2p(x + x_1) \quad \dots \textcircled{3}$$

(ii) $y_1 = 0$ 일 때,

$$y_1^2 = 4px_1 \text{에서 } y_1 = 0 \text{이면 } x_1 = 0 \text{이므로 점 } P \text{는 원점이다.}$$

따라서 접선의 방정식은 $x = 0$ 이고, 이 경우에도 $\textcircled{3}$ 이 성립한다.



(2) 포물선 $x^2 = 4py$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은 $x_1x = 2p(y + y_1)$

증명 위와 같은 방법으로 하면 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{x_1}{2p}$ 이고,

$x_1^2 = 4py_1$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y - y_1 = \frac{x_1}{2p}(x - x_1), 2p(y - y_1) = x_1x - x_1^2 \quad \therefore x_1x = 2p(y + y_1)$$

같은 방법으로 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.

필수예제 024**음함수의 그래프 위의 점에서의 접선의 방정식**

곡선 $x^2 - xy + y^2 = 1$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) $\frac{dy}{dx}$ 를 구하여라.

(2) 점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기를 구하여라.

(3) 점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 방정식을 구하여라.

풀이 y 를 x 의 함수로 보고 양변을 x 에 대하여 미분하여 $\frac{dy}{dx}$, 즉 접선의 기울기를 구한다.

한 점 (x_1, y_1) 을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은 $y - y_1 = m(x - x_1)$

| 풀이 | (1) $x^2 - xy + y^2 = 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x - y - x \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} = 0, (x - 2y) \frac{dy}{dx} = 2x - y \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x - 2y} \quad (x - 2y \neq 0)$$

$$(2) x=1, y=0 을 대입하면 \frac{dy}{dx} = \frac{2 \cdot 1 - 0}{1 - 2 \cdot 0} = 2$$

$$(3) 점 (1, 0)을 지나고 기울기가 2이므로 y=2(x-1) \quad \therefore y=2x-2$$

필수예제 025**이차곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식**

포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 $(9, -6)$ 에서의 접선의 방정식을 구하여라.

풀이 $y^2 = 4px$ 0|면 $y_1y = 4p \cdot \frac{x+x_1}{2}$ $\therefore y_1y = 2p(x+x_1)$

| 풀이 | y^2 대신 $-6y$, x 대신 $\frac{x+9}{2}$ 를 대입하면

$$-6y = 4 \times \frac{x+9}{2} \quad \therefore y = -\frac{1}{3}x - 3$$

| 참고 | $y^2 = 4x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $2y \frac{dy}{dx} = 4$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$ ($y \neq 0$)

따라서 $y = -6$ 일 때 접선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$ 이다.

(1) 한 점 (x_1, y_1) 을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식 $\Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$

(2) 이차곡선 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식을 구할 때는 다음을 대입한다.

대원칙

$$x^2 \text{ 대신 } \rightarrow x_1x, \quad y^2 \text{ 대신 } \rightarrow y_1y, \quad x \text{ 대신 } \rightarrow \frac{x+x_1}{2}, \quad y \text{ 대신 } \rightarrow \frac{y+y_1}{2}$$

정답과 풀이 9쪽 ▶

유제 033 다음 곡선 위의 주어진 한 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

$$(1) 원 x^2 + y^2 = 4 \quad (1, \sqrt{3})$$

$$(2) 포물선 x^2 = 8y \quad (4, 2)$$

$$(3) 타원 \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1 \quad (1, -2)$$

$$(4) 쌍곡선 \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1 \quad (3, -2)$$

필수예제 026**기울기가 주어진 이차곡선의 접선의 방정식**

타원 $2x^2 + y^2 = 6$ 에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식을 구하여라.

풀이 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$
→ 접선의 기울기가 $-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$ 이고 $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ 임을 이용하여 x_1, y_1 의 값을 구한다.

| 풀이 | 타원 $2x^2 + y^2 = 6$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$2x_1x + y_1y = 6 \quad \therefore y = -\frac{2x_1}{y_1}x + \frac{6}{y_1}$$

$$\text{이 접선의 기울기가 } 2 \text{이므로 } -\frac{2x_1}{y_1} = 2 \quad \therefore x_1 = -y_1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{점 } (x_1, y_1) \text{은 타원 } 2x^2 + y^2 = 6 \text{ 위의 점이므로 } 2x_1^2 + y_1^2 = 6 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하여 풀면 $y_1 = \pm\sqrt{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y = 2x - 3\sqrt{2}$ 또는 $y = 2x + 3\sqrt{2}$

필수예제 027**이차곡선 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식**

점 $(-2, 1)$ 에서 포물선 $y^2 = 4x$ 에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

풀이 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은 $y_1y = 2p(x + x_1)$

→ 포물선 밖의 한 점 (a, b) 를 지나고 $y_1^2 = 4px_1$ 임을 이용하여 x_1, y_1 의 값을 구한다.

| 풀이 | 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은 $y_1y = 2(x + x_1)$

$$\text{이 접선이 점 } (-2, 1) \text{을 지나므로 } y_1 = 2(-2 + x_1) \quad \therefore y_1 = 2x_1 - 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{점 } (x_1, y_1) \text{은 포물선 } y^2 = 4x \text{ 위의 점이므로 } y_1^2 = 4x_1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 4 \end{cases}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y = -x - 1$ 또는 $y = \frac{1}{2}x + 2$

대원칙

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 로 놓고 접점의 좌표가 주어진 이차곡선의 접선의 방정식을 구하는 공식을 이용한다.

정답과 풀이 9쪽 ►

유제 034 다음 곡선에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식을 구하여라.

$$(1) \text{포물선 } y^2 = -x$$

$$(2) \text{타원 } x^2 + 2y^2 = 2$$

$$(3) \text{쌍곡선 } 2x^2 - 3y^2 = 6$$

유제 035 다음 접선의 방정식을 구하여라.

$$(1) \text{점 } (2, 4) \text{에서 타원 } 4x^2 + 3y^2 = 16 \text{에 그은 접선}$$

$$(2) \text{점 } (0, 2) \text{에서 쌍곡선 } x^2 - 5y^2 = 5 \text{에 그은 접선}$$

필수예제 028

이차곡선과 접선의 방정식의 활용(1)

포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점과 직선 $y = x + 3$ 사이의 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 풀이자료

가소롭게 보다가는 큰 코 다칠 유형. 거리의 최솟값이 발생하는 상황을 포착하는 것이 핵심이다.

거리의 최솟값은 직선과 평행한 접선 위의 한 점 사이의 거리. 결국, 다음 그림의 두 직선 사이의 거리가 정답.

| 풀이 | 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$y_1 y = 2(x + x_1) \quad \therefore y = \frac{2}{y_1}x + \frac{2x_1}{y_1}$$

$$\text{이 접선의 기울기가 } 1 \text{이어야 하므로 } \frac{2}{y_1} = 1 \quad \therefore y_1 = 2 \quad \dots \dots \textcircled{①}$$

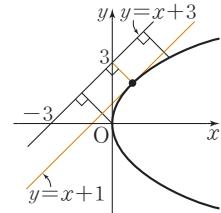
$$\text{점 } (x_1, y_1) \text{은 포물선 } y^2 = 4x \text{ 위의 점이므로 } y_1^2 = 4x_1 \quad \dots \dots \textcircled{②}$$

②을 ①에 대입하여 풀면 $x_1 = 1$

즉, 기울기가 1이고 포물선에 접하는 접선의 방정식은 $y = x + 1$

따라서 구하는 최솟값은 직선 $y = x + 3$ 위의 점 $(0, 3)$ 과 직선 $x - y + 1 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|0 - 3 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$



필수예제 029

이차곡선과 접선의 방정식의 활용(2)

타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} = 1$ 위의 점 $(2, 3)$ 에서의 접선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하여라.

▶ 풀이자료

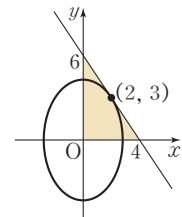
타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식 $\rightarrow \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

| 풀이 | 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} = 1$ 위의 점 $(2, 3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$x^2 \text{ 대신 } 2x, y^2 \text{ 대신 } 3y \text{ 를 대입하면 } \frac{2x}{8} + \frac{3y}{18} = 1 \quad \therefore \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$$

이 접선의 x 절편은 4, y 절편은 6이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 구하는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$



$$(1) \text{ 점 } (x_1, y_1) \text{과 직선 } ax + by + c = 0 \text{ 사이의 거리는 } \frac{|\text{대입한 값}|}{\sqrt{\text{계수들의 제곱의 합}}} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

▶ 원칙

(2) 평행한 두 직선 사이의 거리를 구하려면 한 직선 위에 아무 점이나 잡고 다른 직선까지의 거리를 구하면 된다.

(3) 삼각형의 넓이를 구하려면 밑변의 길이와 높이를 구하면 된다.

$$\rightarrow (\text{삼각형의 넓이}) = \frac{1}{2} \times (\text{밑변의 길이}) \times (\text{높이})$$

▶ 정답과 풀이 10쪽 ►

유제 036 타원 $x^2 + 2y^2 = 6$ 위의 점과 직선 $y = x + 5$ 사이의 거리의 최솟값을 구하여라.

유제 037 쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$ 위의 점 $(2, 1)$ 에서의 접선과 이 쌍곡선의 점근선과의 두 교점을 A, B라

고 할 때, 삼각형 OAB의 넓이를 구하여라. (단, O는 원점)

3

매개변수로 나타낸 함수의 미분법과 접선의 방정식

2. 평면곡선의 접선

01 매개변수의 뜻

두 변수 x, y 사이의 관계를 변수 t 를 매개로 하여

$$x=f(t), y=g(t) \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

의 꼴로 나타낼 때 변수 t 를 매개변수라 하고, $\textcircled{1}$ 을 매개변수로 나타낸 함수라고 한다.

【풀이】 매개변수로 나타내는 것은 곡선을 표현하는 한 방법이며 이차곡선은 매개변수를 사용하여 나타낼 수 있다.

【확인】 원 $x^2+y^2=4$ 를 매개변수 θ 를 써서 나타내어라.

풀이 $x^2+y^2=4$ 를 변형하면 $\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1$ 이므로 $\frac{x}{2}=\cos\theta, \frac{y}{2}=\sin\theta$ 로 나타낼 수 있다.

따라서 원 $x^2+y^2=4$ 를 매개변수 θ 를 써서 나타내면 $x=2\cos\theta, y=2\sin\theta$

02 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

매개변수로 나타낸 함수 $x=f(t), y=g(t)$ 가 t 에 대하여 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$ 이면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{(y \text{의 미분})}{(x \text{의 미분})}$$

【풀이】 x, y 의 관계가 t 로 나타나어진 식은 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용한다.

【풀이】 두 함수 $x=f(t), y=g(t)$ 가 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$ 이면 $\frac{dy}{dx}$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

t 는 x 의 함수로 생각할 수 있으므로 $\Delta x \rightarrow 0$ 일 때 $\Delta t \rightarrow 0$ 이 된다.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

【확인】 매개변수로 나타낸 함수 $x=2t+1, y=t^2-2t$ 에서 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하여라.

풀이 $\frac{dx}{dt}=2, \frac{dy}{dt}=2t-2$ 이므로 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t-2}{2}=t-1$

03 매개변수로 나타낸 곡선의 접선의 방정식

매개변수로 나타낸 곡선 $x=f(t), y=g(t)$ 에서 $t=t_1$ 일 때의 접선의 방정식

$$\Rightarrow y = \frac{g'(t_1)}{f'(t_1)}(x-f(t_1))+g(t_1) \quad (\text{단}, t=t_1 \text{일 때 미분가능하고 } f'(t_1)\neq 0 \text{이다.})$$

필수예제 030**매개변수로 나타낸 함수의 미분법**

매개변수로 나타낸 다음 함수에서 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하여라.

$$(1) x=2t+3, y=t^4+t^2$$

$$(2) x=t-\sin t, y=1-\cos t$$

증명자료 x, y 의 관계가 t 로 나타내어진 식 \rightarrow 매개변수로 나타낸 함수의 미분법으로 계산한다. $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(y\text{의 미분})}{(x\text{의 미분})}$

| 풀이 | (1) $x=2t+3$ 에서 $\frac{dx}{dt}=2$, $y=t^4+t^2$ 에서 $\frac{dy}{dt}=4t^3+2t$ $\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4t^3+2t}{2}=2t^3+t$

$$(2) x=t-\sin t \text{에서 } \frac{dx}{dt}=1-\cos t, y=1-\cos t \text{에서 } \frac{dy}{dt}=\sin t \quad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$$

필수예제 031**매개변수로 나타낸 곡선의 접선의 방정식**

매개변수로 나타낸 곡선 $x=t, y=t^2+1$ 위의 점 $(2, 5)$ 에서의 접선의 방정식을 구하여라.

증명자료 매개변수로 나타낸 곡선 $x=f(t), y=g(t)$ 에서 $t=a$ 일 때의 곡선 위의 점 $(f(a), g(a))$ 에서의 접선의 방정식

$$\Rightarrow y-g(a)=\frac{g'(a)}{f'(a)}\{x-f(a)\}$$

| 풀이 | $\frac{dx}{dt}=1, \frac{dy}{dt}=2t$ 이므로 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=2t$

○] 때 $t=2, t^2+1=5$ ○] 므로 $t=2$

따라서 $t=2$ 에서의 접선의 기울기는 4이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-5=4(x-2) \quad \therefore y=4x-3$$

대원칙

$$x=f(t), y=g(t) \text{가 } t \text{에 대하여 미분가능하고 } f'(t) \neq 0 \text{이면} \rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

정답과 풀이 10쪽 ►

유제 038 매개변수로 나타낸 다음 함수에서 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하여라.

$$(1) x=t^2+t, y=t^3$$

$$(2) x=\cos^3 t, y=\sin^3 t$$

유제 039 매개변수로 나타낸 곡선 $x=\frac{3}{t}, y=t^2+5$ 위의 점 $(3, 6)$ 에서의 접선의 방정식을 구하여라.

Step 1

- 049** 곡선 $x^2 + ay^2 + b = 0$ 위의 점 $(4, 1)$ 에서 $\frac{dy}{dx}$ 의 값이 1일 때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하여라.
- 050** 곡선 $\sqrt{x} + \sqrt{2y} = 3$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 방정식을 구하여라.
- 051** 타원 $2x^2 + 3y^2 = 14$ 위의 점 $(1, -2)$ 에서의 접선이 점 $(a, -1)$ 을 지날 때, a 의 값을 구하여라.
- 052** 쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 기울기가 1일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.
- 053** 직선 $y = 2x$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 직선이 포물선 $x^2 = 4y$ 에 접할 때, 실수 a 의 값을 구하여라.
- 054** 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점과 직선 $x + y + 2 = 0$ 사이의 거리의 최솟값을 구하여라.
- 055** 점 $(0, 1)$ 에서 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$ 에 그은 접선의 접점이 (a, b) 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.
- 056** 매개변수 t 로 나타낸 곡선 $x = t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}t^2 + at + 1$ 에 대하여 $t=1$ 인 점에서의 접선의 기울기가 10일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.
- 057** 매개변수 θ 로 나타낸 곡선 $x = 4\cos\theta, y = 3\sin\theta$ 위의 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 인 점에서의 접선의 y 절편을 구하여라.

Step 2

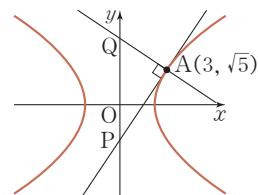
058 곡선 $x^2 + \frac{2x}{y} - 3 = 0$ 위의 점 $(3, -1)$ 에서의 접선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라고 할 때, $4S$ 의 값을 구하여라.

059 포물선 $y^2 = 12x$ 위의 점 $\left(\frac{a^2}{12}, a\right)$ 에서의 접선의 기울기가 자연수가 되도록 하는 0이 아닌 정수 a 의 개수를 구하여라.

060 타원 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$ 위의 점 $P(-3, 2)$ 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 Q , 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 R 라고 할 때, $\triangle PQR$ 의 넓이를 구하여라.

061 포물선 $y^2 = 2x$ 위의 두 점 $P(a, b), Q(2, 2)$ 에서의 두 접선이 서로 수직일 때, ab 의 값을 구하여라.

062 오른쪽 그림과 같은 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 4$ 위의 한 점 $A(3, \sqrt{5})$ 에서의 접선이 y 축과 만나는 점을 P , 점 A 를 지나고 이 접선에 수직인 직선이 y 축과 만나는 점을 Q 라고 할 때, 선분 PQ 의 길이를 구하여라.



063 매개변수 t 로 나타낸 함수 $\begin{cases} x=t^2+2t \\ y=t^3+1 \end{cases}$ 을 $y=f(x)$ 로 나타낼 때, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+3h)-f(3)}{h}$ 의 값을 구하여라. (단, $t > 0$)

064 매개변수 t 로 나타낸 함수

$$x=t^2+t^4+t^6+\cdots+t^{2n}, y=t+t^3+t^5+\cdots+t^{2n-1}$$

에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{t \rightarrow 1} \frac{dy}{dx} \right)$ 의 값을 구하여라. (단, n 은 자연수)



II 평면벡터



1 벡터의 연산

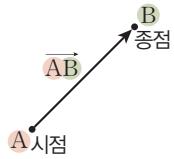
- 2 평면벡터의 성분과 내적
- 3 평면 운동



1 벡터의 뜻	054
2 벡터의 덧셈과 뺄셈	056
3 벡터의 실수배	060
• 연습문제	066

01 벡터의 뜻과 표현

- (1) **벡터** : 크기와 방향을 모두 가지는 양
- (2) **평면벡터** : 평면에서의 벡터
- (3) **벡터의 표현** : 한 벡터가 점 A에서 점 B로 향하는 화살표로 나타날 때, 이 화살표의 시작점을 이 벡터의 **시점**이라 하고, 종착점을 이 벡터의 **종점**이라고 한다.
시점이 A이고 종점이 B인 벡터를 기호 \overrightarrow{AB} 로 나타낸다.

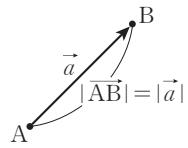


풍선자료 힘, 속도, 길이, 부피 등 자연계를 해석하는 물리를 공부하다 보면 다양한 양(量)을 만나게 되는데 이들은 크게 힘, 속도와 같이 크기와 방향을 갖는 벡터(vector) vs 길이, 부피와 같이 크기만을 갖는 스칼라(scalar)의 두 종류로 분류하고 있다. 크기만을 갖는 스칼라는 수학에서 실수가 된다. 그럼 벡터는 수학에서 무엇이 될까? 실수는 크기만을 알려줄 뿐, 방향을 알 수 없다. 크기와 방향을 동시에 나타낼 수 있는 도구는 바로 화살표이다! 화살표의 길이와 방향이 벡터의 크기와 방향을 알려준다! 즉, 스칼라는 실수, 벡터는 화살표로 나타낸다.

풍선자료 벡터를 한 문자로 나타낼 때에는 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 등과 같은 기호를 사용한다.

02 벡터의 크기, 단위벡터, 영벡터

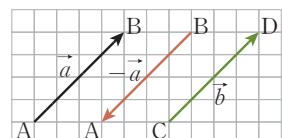
- (1) **벡터의 크기** : 벡터 \overrightarrow{AB} , 즉 벡터 \vec{a} 에서 선분 AB의 길이를 말하고 기호 $|\overrightarrow{AB}|$ 또는 $|\vec{a}|$ 로 나타낸다.
- (2) **단위벡터** : 크기가 1인 벡터
- (3) **영벡터** : 시점과 종점이 일치하는 벡터, 즉 \overrightarrow{AA} , \overrightarrow{BB} , … 를 말하고 기호 $\vec{0}$ 로 나타낸다. 영벡터는 한 점으로 나타내어지므로 그 크기는 0이다.



풍선자료 $|\overrightarrow{AB}|$ 는 벡터가 아니라 스칼라임에 유의한다.

03 서로 같은 벡터와 방향이 반대인 벡터

- (1) **서로 같은 벡터** : 두 벡터 \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} 와 같이 시점과 종점이 달라도 그 크기와 방향이 같을 때, 이들 **두 벡터는 서로 같다**고 하며, 기호 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ 또는 $\vec{a} = \vec{b}$ 로 나타낸다.
- (2) **벡터 \vec{a} 와 크기는 같고 방향이 반대인 벡터** : 기호 $-\vec{a}$ 로 나타낸다.
 $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$



풍선자료 벡터는 화살표로 나타내는데 벡터인 화살표와 그냥 화살표의 차이점이 딱 하나 있다. 위의 그림에서 화살표 AB와 화살표 CD는 별개의 화살표이다. 화살표로는 다르다. 그런데 이 둘은 화살표의 길이가 같고 방향이 같다. 그래서 벡터로는 같다. 즉, 크기(화살표의 길이)와 방향이 같으면 서로 같은 벡터이고, 이 말은 평행이동해서 일치하면 서로 같은 벡터라는 뜻이다.

풍선자료 시점과 종점을 바꾼 벡터를 역벡터라고 부르기도 한다. 역벡터는 원래의 벡터와 크기가 같고 방향은 반대이다. 즉, 벡터에 마이너스를 붙이면 방향을 바꾸는 효과를 준다!

필수예제 032

벡터의 크기

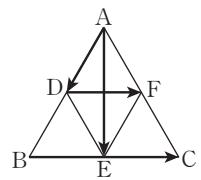
오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA의 중점을 각각 D, E, F라고 할 때, 다음 벡터의 크기를 구하여라.

(1) \overrightarrow{AD}

(2) \overrightarrow{BC}

(3) \overrightarrow{DF}

(4) \overrightarrow{AE}



증명자료 벡터의 크기는 선분의 길이와 같다. $\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \overline{AB}$

|풀이| (1) $|\overrightarrow{AD}| = \overline{AD} = \frac{1}{2} \overline{AB} = 1$

(2) $|\overrightarrow{BC}| = \overline{BC} = 2$

(3) $|\overrightarrow{DF}| = \overline{DF} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 1$

(4) $|\overrightarrow{AE}| = \overline{AE} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AB} = \sqrt{3}$

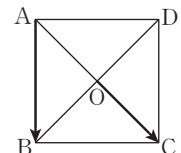
필수예제 033

서로 같은 벡터

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점을 O라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 벡터 \overrightarrow{AB} 와 서로 같은 벡터를 모두 구하여라.

(2) 벡터 \overrightarrow{OC} 와 크기는 같고 방향이 반대인 벡터를 모두 구하여라.



증명자료 크기와 방향이 모두 같을 때, 두 벡터는 서로 같다. 즉, 평행이동해서 겹쳐지면 서로 같은 벡터이다.

|풀이| (1) 벡터 \overrightarrow{AB} 와 크기와 방향이 모두 같은 벡터는 \overrightarrow{DC}

(2) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$ 이므로 벡터 \overrightarrow{OC} 와 크기는 같고 방향이 반대인 벡터는 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{CO}$

(1) 벡터 \overrightarrow{AB} 의 크기 \Rightarrow 선분 AB의 길이 $\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \overline{AB}$

대원칙 (2) 서로 같은 벡터 \Rightarrow 시점의 위치에 관계없이 크기와 방향이 모두 같은 벡터

(3) 크기는 같고 방향이 반대인 벡터 $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

정답과 풀이 11쪽 ▶

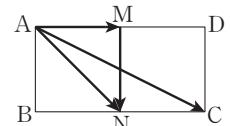
유제 040 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=1, \overline{AD}=2$ 인 직사각형 ABCD의 두 변 AD, BC의 중점을 각각 M, N이라고 할 때, 다음 벡터의 크기를 구하여라.

(1) \overrightarrow{AM}

(2) \overrightarrow{AN}

(3) \overrightarrow{AC}

(4) \overrightarrow{MN}

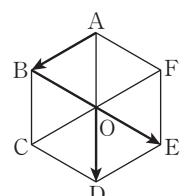


유제 041 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 세 대각선의 교점을 O라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 벡터 \overrightarrow{AB} 와 서로 같은 벡터를 모두 구하여라.

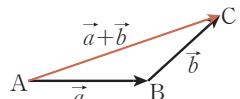
(2) 벡터 \overrightarrow{OD} 와 크기는 같고 방향이 반대인 벡터를 모두 구하여라.

(3) 벡터 \overrightarrow{BE} 의 크기를 구하고, 벡터 \overrightarrow{BE} 와 크기가 같은 벡터를 모두 구하여라.

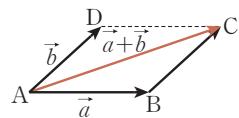


01 벡터의 덧셈

(1) 벡터의 덧셈 : 임의의 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 와 임의로 정한 점 A에 대하여 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ 가 되도록 두 점 B, C를 정할 때, 벡터 \overrightarrow{AC} 를 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 의 합이라 하고 기호 $\vec{a} + \vec{b}$ 또는 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ 로 나타낸다.

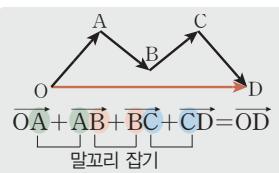


(2) 평행사변형을 이용한 벡터의 덧셈 : 두 벡터 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ 에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 점 C를 정할 때, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ 이므로 $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



【풍선자료】 벡터의 덧셈은 삼각형을 이용해서 이해하자. 그러면 일종의 말꼬리 잡기나 길 찾기로 생각할 수 있다.

앞 벡터의 종점이 뒤 벡터의 시점이 되면 이 둘이 사라지고 앞 벡터의 시점과 뒤 벡터의 종점만 남게 되기 때문이다. 오른쪽과 같이 아무리 많은 벡터를 더하더라도 말꼬리 잡기로 더하면 하나의 벡터로 간단하게 정리된다.

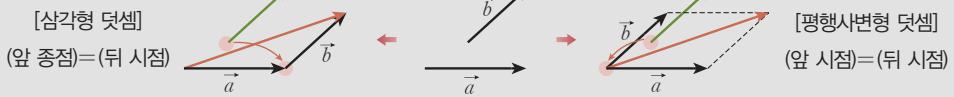


【풍선자료】 평행사변형을 이용해서 벡터의 덧셈을 할 때에는 먼저 더하는 두 벡터의 시점을 일치시키는 것이 중요하다.

시점을 일단 일치시킨 다음에 평행사변형을 그려야 한다.

일치시킨 시점에서 출발하여 평행사변형을 그리면서 새로 생긴 꼭짓점에 도착하는 벡터, 이것이 두 벡터의 합이다.

大원칙



02 벡터의 덧셈에 대한 성질

임의의 세 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 와 영벡터 $\vec{0}$ 에 대하여

$$(1) \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \leftarrow \text{교환법칙}$$

$$(2) (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \quad \leftarrow \text{결합법칙}$$

$$(3) \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

$$(4) \vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$$

【풍선자료】 벡터의 덧셈은 다음과 같은 4 가지 성질을 갖는다.

① 더할 때에는 순서를 바꿔도 된다.

② 여러 개를 더할 때에는 아무거나 먼저 더해도 된다.

③ 0은 더해도 그만, 안 더해도 그만이다.

④ 부호가 반대인 것끼리 더하면 결과는 0이다.

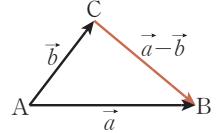
특별할 것은 없다. 수의 계산에서도 보았으니까. 이미 여기저기서 많이 봤던 싱거운 소리들!

03 벡터의 뺄셈

(1) 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 벡터 \vec{a} 와 벡터 $-\vec{b}$ 의 합 $\vec{a} + (-\vec{b})$ 를 벡터 \vec{a} 에서 벡터 \vec{b} 를 뺀 차라 하고 기호 $\vec{a} - \vec{b}$ 로 나타낸다. $\Rightarrow \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

(2) 임의의 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 와 임의로 정한 점 A에 대하여 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}$ 가 되도록 두 점 B, C를 정할 때,

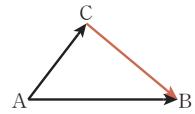
$$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$$



【증명】 벡터의 뺄셈은 덧셈에서 자연스럽게 고집어 낼 수 있다.

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} \text{에서 } \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \quad \therefore \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$$

[위의 놈] [아래의 놈] [시점] [종점]



【증명】 벡터의 뺄셈을 나타내는 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ 는 무척 중요한 공식이다. 이른바 시점 통일 공식!

로그에서는 밑을 모두 같게 만드는 밑 변환 공식이 있다면 벡터에서는 주어진 벡터를 시점이 모두 같은 벡터들의 연산으로 만드는 시점 통일 공식이 있다.

앞으로 많이 사용하게 될 공식이므로 꼭 기억하자.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA} \\ &\vdots \end{aligned}$$

• 한 걸음 더

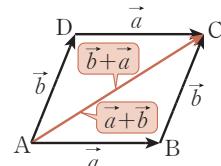
◎ 벡터의 덧셈에 대한 성질의 확인

(1) 평행사변형 ABCD에서 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AD}$ 일 때,

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$$

이므로 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ 가 성립한다.

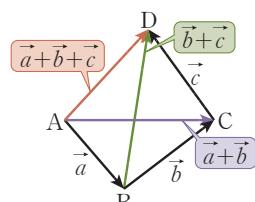


(2) 사각형 ABCD에서 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}, \vec{c} = \overrightarrow{CD}$ 일 때,

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

이므로 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ 가 성립한다.



(3) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ 일 때, $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$ 이므로

$$\vec{a} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$$

$$\vec{0} + \vec{a} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$$

에서 $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ 가 성립한다.

(4) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ 일 때, $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ 이므로

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

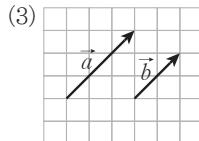
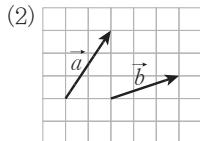
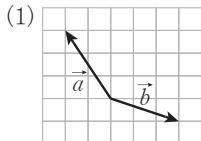
$$(-\vec{a}) + \vec{a} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$$

에서 $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$ 가 성립한다.

필수예제 034

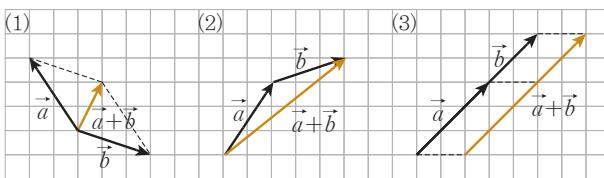
벡터의 덧셈 그리기

두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 다음과 같이 주어질 때, $\vec{a} + \vec{b}$ 를 그림으로 나타내어라.



- ▶ 풀이자**
- ① 평행하지 않은 두 벡터의 덧셈 \rightarrow 두 벡터의 시점을 일치시킨다. \rightarrow 평행사변형을 그려 덧셈 앞 벡터 종점과 뒤 벡터 시점을 일치시킨다. \rightarrow 삼각형을 그려 덧셈
 - ② 평행한 두 벡터의 덧셈 \rightarrow 앞 벡터 종점에 뒤 벡터 시점을 일치시킨다.

| 풀이 |



필수예제 035

벡터의 덧셈에 대한 성질

평면 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, D에 대하여 다음을 간단히 하여라.

$$(1) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$

$$(2) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}$$

▶ 풀이자

- 벡터의 덧셈 \rightarrow 더할 때에는 순서를 바꿔도 된다. 여러 개를 더할 때에는 아무거나 먼저 더해도 된다. 0은 더해도 그만, 안 더해도 그만이다. 부호가 반대인 것끼리 더하면 결과는 0이다.

| 풀이 |

$$(1) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

$$(2) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) \\ = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$$

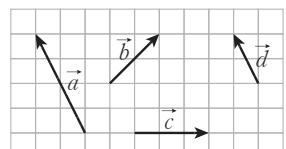
(1) 벡터의 덧셈을 그릴 때에는 삼각형 또는 평행사변형을 이용한다.

대원칙

- (2) 벡터의 덧셈에서도 실수의 덧셈과 마찬가지로 교환법칙, 결합법칙이 모두 성립한다.
또, 영벡터는 실수의 0과 같다.

- 유제 042** 네 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ 가 오른쪽과 같이 주어질 때,
 $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{d}, \vec{c} + \vec{d}$
 를 그림으로 나타내어라.

정답과 풀이 11쪽 ▶



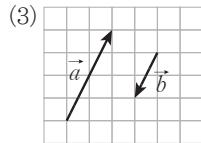
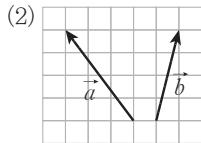
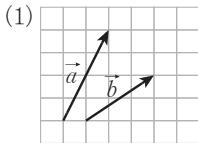
- 유제 043** 평면 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, D에 대하여 다음 등식이 성립함을 보여라.

$$(1) \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$$

$$(2) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA}$$

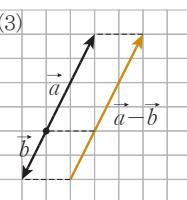
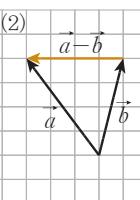
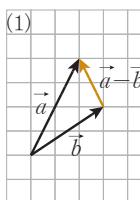
필수예제 036 벡터의 뺄셈 그리기

두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 다음과 같이 주어질 때, $\vec{a} - \vec{b}$ 를 그림으로 나타내어라.



풀이 두 벡터의 차 \rightarrow 두 벡터의 시점을 일치시킨다. $\rightarrow \vec{a} - \vec{b}$ 는 \vec{b} 의 종점에서 \vec{a} 의 종점까지 가는 벡터

| 풀이 |



필수예제 037 벡터의 덧셈과 뺄셈

오른쪽 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 두 대각선의 교점을 O라고 하자.

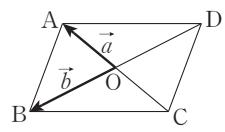
$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 라고 할 때, 다음 벡터를 \vec{a}, \vec{b} 로 나타내어라.

$$(1) \overrightarrow{OC}$$

$$(2) \overrightarrow{AB}$$

$$(3) \overrightarrow{BC}$$

$$(4) \overrightarrow{DA}$$



풀이 시점에서 종점까지 길 찾기 \rightarrow 벡터의 덧셈, 뺄셈 \rightarrow 크기와 방향이 같으면 서로 같은 벡터, 방향이 반대이면 - 등장!

$$(1) \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA} = -\vec{a}$$

$$(2) \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$(3) \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = -\vec{b} - \vec{a} = -\vec{a} - \vec{b}$$

$$(4) \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{b}$$

(1) 벡터의 뺄셈을 그릴 때에는 두 벡터의 시점을 일치시킨다.

(2) 벡터의 덧셈은 말꼬리 잡기로, 뺄셈은 시점 통일 공식으로 계산한다.

대원칙

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$$

말꼬리 잡기

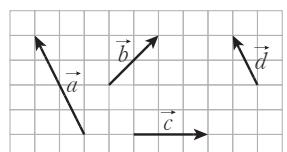
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

앞의 놈
뒤의 놈

정답과 풀이 11쪽 ▶

유제 044 네 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ 가 오른쪽과 같이 주어질 때,
 $\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{d}, \vec{c} - \vec{d}$

를 그림으로 나타내어라.



유제 045 오른쪽 그림과 같은 정육각형 ABCDEF에서 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{CD} = \vec{c}$ 라
고 할 때, 다음 벡터를 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 로 나타내어라.

$$(1) \overrightarrow{AC}$$

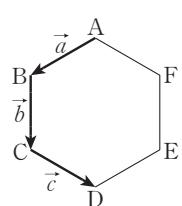
$$(2) \overrightarrow{AD}$$

$$(3) \overrightarrow{BD}$$

$$(4) \overrightarrow{CE}$$

$$(5) \overrightarrow{CF}$$

$$(6) \overrightarrow{DF}$$



3

벡터의 실수배

1. 벡터의 연산

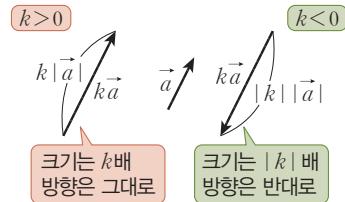
01 벡터의 실수배

임의의 실수 k 와 벡터 \vec{a} 의 곱 $k\vec{a}$ 를 벡터 \vec{a} 의 실수배라 하고 다음과 같이 정의한다.

(1) $\vec{a} \neq \vec{0}$ 일 때, $k\vec{a}$ 는

- ① $k > 0$ 이면 \vec{a} 와 방향이 같고, 크기가 $k|\vec{a}|$ 인 벡터이다.
- ② $k < 0$ 이면 \vec{a} 와 방향이 반대이고, 크기가 $|k||\vec{a}|$ 인 벡터이다.
- ③ $k = 0$ 이면 $k\vec{a} = \vec{0}$ 이다.

(2) $\vec{a} = \vec{0}$ 일 때, $k\vec{a} = \vec{0}$ 이다.

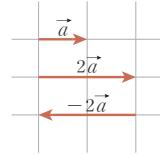


통신자료 벡터에 실수를 곱하면 새로운 벡터가 나온다. 어떤 벡터냐? 오른쪽 그림을 보자.

벡터 \vec{a} 에 양의 실수 2를 곱한 벡터 $2\vec{a}$ 는 방향은 그대로, 크기는 2배로 한 벡터.

벡터 \vec{a} 에 음의 실수 -2 를 곱한 벡터 $-2\vec{a}$ 는 방향은 반대로, 크기는 2배로 한 벡터.

똑똑한 수학자들이 이렇게 정하고 약속한 거니까 정한 대로 따르자.



통신자료 벡터의 실수배는 벡터끼리의 곱셈이 아니라 실수와 벡터를 곱하는 사이비 곱셈. 벡터끼리의 진짜 곱셈은 추후 나온다.

02 벡터의 실수배에 대한 성질

임의의 두 실수 k, l 과 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여

- (1) $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$ ← 결합법칙
- (2) $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ ← 분배법칙
- (3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ ← 분배법칙

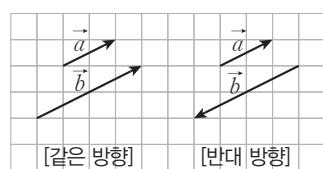
통신자료 두 번 말하면 입이 아플 지경. 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배의 연산은 수와 식의 연산처럼 아무 생각 없이 해도 된다는 소리이다.

03 벡터의 평행

영벡터가 아닌 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 방향이 같거나 반대일 때, 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 는 서로 평행하다고 하며, 기호

$$\vec{a} \parallel \vec{b}$$

로 나타낸다.



통신자료 벡터의 평행은 크기와 상관없다. 오르지 방향만 본다.

통신자료 두 벡터가 일치하는 경우에도 두 벡터는 서로 평행하다고 본다.

04 벡터가 서로 같을 조건

영벡터가 아닌 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 \vec{a}, \vec{b} 가 서로 평행하지 않을 때

$$(1) m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0} \iff m=0, n=0 \text{ (단, } m, n \text{은 실수)}$$

$$(2) m\vec{a} + n\vec{b} = p\vec{a} + q\vec{b} \iff m=p, n=q \text{ (단, } m, n, p, q \text{는 실수)}$$

증명자료 $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$ 에서 $m \neq 0$ 이면 이 식을 변형하여 $\vec{a} = -\frac{n}{m}\vec{b}$ 로 쓸 수 있다. 여기서 $n \neq 0$ 이면 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 는 서로 평행하기 때문에 말이 안 된다. 또, $n=0$ 이면 벡터 \vec{a} 가 $\vec{0}$ 가 되므로 역시 말이 안 된다. 그래서 \vec{a}, \vec{b} 가 모두 영벡터가 아니고 서로 평행하지도 않는데 $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$ 가 된다면 $m=n=0$ 라고는 답이 없는 것이다.

물론 $m=n=0$ 이면 $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$ 인 건 말 안 해도 당연하고.

05 벡터의 평행 조건

(1) 영벡터가 아닌 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여

$$\vec{a} // \vec{b} \iff \vec{b} = k\vec{a} \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)}$$

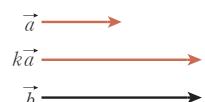
(2) 영벡터가 아닌 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 서로 평행하지 않을 때, $\vec{p} = m\vec{a} + n\vec{b}, \vec{q} = m'\vec{a} + n'\vec{b}$ 에 대하여

$$\vec{p} // \vec{q} \iff \vec{q} = k\vec{p} \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)}$$

$$\iff m' = km, n' = kn \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수, } m, n, m', n' \text{은 실수)}$$

증명자료 실수배는 실수랑 벡터랑 곱하는 사이비 곱셈. 현데 이 사이비 곱셈인 실수배가 강력한 파워를 발휘하는 두 가지 상황 중 첫 번째가 바로 벡터의 평행 조건!

증명자료 벡터의 평행은 크기와 상관없이 방향만 따지면 된다. 즉, 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 서로 평행하다는 말은 방향이 같거나 반대 중 하나.



방향이 같으면 \vec{a} 를 적당히 늘이거나 줄여서 \vec{b} 랑 같게 만들 수 있다.

벡터의 크기를 늘이거나 줄이는 것이 바로 실수배!

\vec{a} 에 적당한 실수를 곱하면 \vec{b} 랑 같게 된다.

방향이 반대이면 \vec{a} 의 방향을 바꾸어 적당히 늘이거나 줄여서 \vec{b} 랑 같게 만들 수 있다. 이것도 음수를 곱하는 실수배!

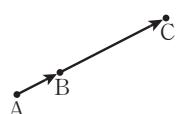
$$\therefore \vec{b} = k\vec{a}$$

06 세 점이 한 직선 위에 있을 조건

서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있다.

$$\iff \vec{AC} = k\vec{AB} \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)}$$



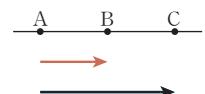
증명자료 벡터의 사이비 곱셈인 실수배가 강력한 파워를 발휘하는 두 가지 상황 중 두 번째가 이거다. 바로 세 점이 한 직선 위에 있을 조건! 그런데 사실 두 벡터가 서로 평행할 조건과 큰 차이는 없다. 세 점을 이용한 벡터를 만들면 똑같은 이야기!

증명자료 “세 점이 한 직선 위에 있다”라는 말이 있으면 무조건 세 점이 한 직선 위에 있을 조건을 떠올린다.

오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면 \vec{AB} 를 적당히 늘이거나 줄여서 \vec{AC} 와

같게 만들 수 있다. 이것도 역시 실수배! \vec{AB} 에 적당한 실수를 곱하면 \vec{AC} 랑 같아진다.

$$\therefore \vec{AC} = k\vec{AB}$$



필수예제 038**벡터의 실수배 (1)**

다음을 간단히 하여라.

$$(1) 2(\vec{a} - \vec{b}) - (\vec{a} - 3\vec{b})$$

$$(2) \frac{2}{3}(2\vec{a} - 3\vec{b}) + \frac{1}{6}(4\vec{a} + 3\vec{b})$$

▶ 풀이자료 벡터의 실수배에서는 벡터를 분배하여 곱할 수도 있고, 실수를 분배하여 곱할 수도 있다.

$$\text{벡터 분배 } \rightarrow (k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a} \quad \text{실수 분배 } \rightarrow k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

벡터가 괄호로 묶어진 식을 $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ 를 이용하여 문 다음 같은 벡터끼리 동류항으로 생각하여 $k\vec{a} + l\vec{a} = (k+l)\vec{a}$ 로 정리한다.

| 풀이 | (1) $2(\vec{a} - \vec{b}) - (\vec{a} - 3\vec{b}) = 2\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{a} + 3\vec{b} = (2-1)\vec{a} + (-2+3)\vec{b} = \vec{a} + \vec{b}$

$$(2) \frac{2}{3}(2\vec{a} - 3\vec{b}) + \frac{1}{6}(4\vec{a} + 3\vec{b}) = \frac{4}{3}\vec{a} - 2\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right)\vec{a} + \left(-2 + \frac{1}{2}\right)\vec{b} = 2\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$$

필수예제 039**벡터의 실수배 (2)**

다음 물음에 답하여라.

(1) 등식 $2\vec{a} - \vec{x} = -\vec{b} + \vec{x} + 3(\vec{a} - \vec{b})$ 를 만족시키는 \vec{x} 를 \vec{a}, \vec{b} 로 나타내어라.

(2) 두 등식 $2\vec{x} + 3\vec{y} = \vec{a}$, $3\vec{x} + 4\vec{y} = 2\vec{a}$ 를 동시에 만족시키는 \vec{x}, \vec{y} 를 \vec{a} 로 각각 나타내어라.

▶ 풀이자료 벡터를 문자로 생각하고 수와 식의 계산처럼 해라. 아무 문제도 없다.

| 풀이 | (1) $2\vec{a} - \vec{x} = -\vec{b} + \vec{x} + 3(\vec{a} - \vec{b})$ 에서 $2\vec{a} - \vec{x} = -\vec{b} + \vec{x} + 3\vec{a} - 3\vec{b}$

$$-\vec{x} - \vec{x} = -\vec{b} + 3\vec{a} - 3\vec{b} - 2\vec{a}, -2\vec{x} = \vec{a} - 4\vec{b}$$

$$\therefore \vec{x} = -\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$(2) 2\vec{x} + 3\vec{y} = \vec{a} \quad \dots \textcircled{1}, \quad 3\vec{x} + 4\vec{y} = 2\vec{a} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \times 3 - \textcircled{2} \times 2 \text{를 하면 } \vec{y} = -\vec{a}$$

$$\vec{y} = -\vec{a} \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 2\vec{x} - 3\vec{a} = \vec{a} \quad \therefore \vec{x} = 2\vec{a}$$

$$\therefore \vec{x} = 2\vec{a}, \vec{y} = -\vec{a}$$

대원칙

벡터의 실수배를 포함한 덧셈과 뺄셈 \rightarrow 실수를 계수, 벡터를 한 문자로 생각하고 수와 식의 계산과 동일하게 한다.

정답과 풀이 11쪽 ▶

유제 046 다음을 간단히 하여라.

$$(1) \vec{b} - 3(\vec{a} + \vec{b}) - 2(2\vec{a} - \vec{b})$$

$$(2) \frac{5}{2}(4\vec{a} + 3\vec{b}) - \frac{1}{4}(4\vec{a} - 2\vec{b})$$

유제 047 다음 물음에 답하여라.

(1) 등식 $2\vec{x} + (\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} - (\vec{b} - \vec{x})$ 를 만족시키는 \vec{x} 를 \vec{a}, \vec{b} 로 나타내어라.

(2) 두 등식 $\vec{x} + 2\vec{y} = -\vec{a}$, $3\vec{x} - \vec{y} = 4\vec{a}$ 를 동시에 만족시키는 \vec{x}, \vec{y} 를 \vec{a} 로 각각 나타내어라.

필수예제 040

벡터의 연산과 도형 (1)

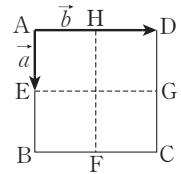
오른쪽 그림과 같이 정사각형 ABCD의 각 변의 중점이 E, F, G, H이고 $\overrightarrow{AE} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ 일 때, 다음 벡터를 \vec{a}, \vec{b} 로 나타내어라.

(1) \overrightarrow{BF}

(2) \overrightarrow{DC}

(3) \overrightarrow{AC}

(4) \overrightarrow{FG}



풀이 시점에서 종점까지 변을 따라 길을 찾는다. 해당 길에 벡터가 없다면 평행한 벡터를 데려다 쓴다.

→ 평행한 벡터가 크기가 다르면 실수배, 방향이 다르면 - 부호 추가!

| 풀이 | (1) $\overrightarrow{BF} // \overrightarrow{AH}$ 이므로 $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \vec{b}$ (2) $\overrightarrow{DC} // \overrightarrow{AB}$ 이므로 $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AE} = 2\vec{a}$

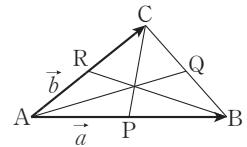
(3) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = 2\vec{a} + \vec{b}$

(4) $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{HD} - \overrightarrow{GC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \vec{b} - \vec{a} = -\vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}$

필수예제 041

벡터의 연산과 도형 (2)

오른쪽 그림에서 세 점 P, Q, R는 각각 $\triangle ABC$ 의 세 변 AB, BC, CA의 중점이다. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ 라고 하면 $\overrightarrow{BQ} = m\vec{a} + n\vec{b}$ 일 때, 실수 m, n 의 값을 구하여라.



풀이 \overrightarrow{BQ} 는 $B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow Q$ 로 찾아간다고 생각하는 게 자연스럽다. 그러나 $C \rightarrow Q$ 는 막힌 길. 우짜면 좋누?

먼저 찾으려는 벡터를 포함한 가장 긴 벡터 \overrightarrow{BC} 를 구한 후 $\frac{1}{2}$ 을 곱한다.

| 풀이 | $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$ 이므로 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\vec{a} + \vec{b}$ 이므로 $\overrightarrow{BQ} = -\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}$ $\therefore m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$

벡터의 연산을 이용하여 도형에서의 벡터를 표현할 때에는 시점에서 종점까지 변을 따라 길을 찾는다.

원칙

① 길 위에 주어진 벡터가 없으면 평행한 벡터를 가져온다.

② 정육각형의 경우 → 길 위에 주어진 벡터가 없으면 대각선의 교점을 이용한다.

③ 길이 중간에 끊어지거나 막힌 경우 → 찾으려는 벡터를 포함한 가장 긴 벡터를 구한 다음, 실수배한다.

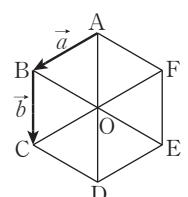
정답과 풀이 11쪽 ▶

유제 048 오른쪽 그림과 같은 정육각형 ABCDEF에서 점 O는 세 대각선의 교점이다. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ 일 때, 다음 벡터를 \vec{a}, \vec{b} 로 나타내어라.

(1) \overrightarrow{CD}

(2) \overrightarrow{CE}

(3) \overrightarrow{BE}

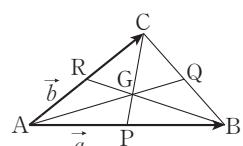


유제 049 오른쪽 그림에서 세 점 P, Q, R는 각각 $\triangle ABC$ 의 세 변 AB, BC, CA의 중점이고, 점 G는 \overrightarrow{AQ} , \overrightarrow{BR} , \overrightarrow{CP} 의 교점이다. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ 라고 할 때, 다음 벡터를 \vec{a}, \vec{b} 로 나타내어라.

(1) \overrightarrow{CQ}

(2) \overrightarrow{GR}

(3) \overrightarrow{GQ}



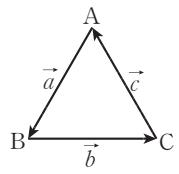
필수예제 042

벡터의 연산과 크기

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC에서 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{c}$ 라고 할 때, 다음 벡터의 크기를 구하여라.

$$(1) \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

$$(2) \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$$



【풀이】 주어진 도형과 합동인 도형을 이어붙인 그림에서 벡터의 연산에 따라 길을 찾아 시점, 종점을 정한다.

【풀이】 $\triangle ABC$ 와 합동인 삼각형을 이어붙인 그림을 이용한다.

$$(1) \text{오른쪽 그림에서 } \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AP}$$

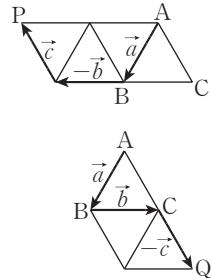
이때 $\triangle ABC$ 의 한 변의 길이가 1이므로 $\overline{AP} = 2$

$$\therefore |\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}| = |\overrightarrow{AP}| = \overline{AP} = 2$$

$$(2) \text{오른쪽 그림에서 } \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \overrightarrow{AQ}$$

이때 $\triangle ABC$ 의 한 변의 길이가 1이므로 $\overline{AQ} = 2$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = |\overrightarrow{AQ}| = \overline{AQ} = 2$$



필수예제 043

벡터가 서로 같은 조건

서로 평행하지도 않고 영벡터도 아닌 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 다음 등식을 만족시키는 실수 m, n 의 값을 구하여라.

$$(1) (m^2 - 1)\vec{a} + (m+1)\vec{b} = \vec{0}$$

$$(2) m\vec{a} - n\vec{b} = (n+1)\vec{a} + (3+m)\vec{b}$$

【풀이】 무리수가 서로 같은 조건, 복소수가 서로 같은 조건과 동일하다. 무리수가 서로 같은 조건에서 무리수 대신 벡터가, 복소수가 서로 같은 조건에서 복소수 대신 벡터가 들어가 있을 뿐.

$$(1) (m^2 - 1)\vec{a} + (m+1)\vec{b} = \vec{0} \text{에서 } m^2 - 1 = 0, m+1 = 0 \quad \therefore m = -1$$

$$(2) m\vec{a} - n\vec{b} = (n+1)\vec{a} + (3+m)\vec{b} \text{에서 } m = n+1, -n = 3+m \quad \therefore m = -1, n = -2$$

(1) 연산으로 주어진 벡터의 크기를 구할 때에는 연산의 결과를 하나의 벡터로 나타내어 본다.

→ 시점과 종점을 결정한 후, 도형의 성질을 이용하여 벡터의 크기를 구한다.

【원칙】

(2) 벡터의 연산으로 표현된 등식에서 미정계수를 정할 때에는 벡터가 서로 같은 조건을 이용한다.

$$\Rightarrow ① m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0} \iff m=0, n=0$$

$$② m\vec{a} + n\vec{b} = p\vec{a} + q\vec{b} \iff m=p, n=q$$

정답과 풀이 12쪽 ▶

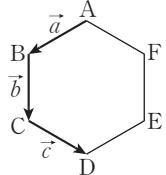
유제 050 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정육각형 ABCDEF에서

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ 라고 할 때, 다음 벡터의 크기를 구하여라.

$$(1) \vec{a} + \vec{b}$$

$$(2) \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$$

$$(3) -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$



유제 051 서로 평행하지도 않고 영벡터도 아닌 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 다음 등식을 만족시키는 실수 m, n 의 값을 구하여라.

$$(1) (m-2)\vec{a} + (n+1)\vec{b} = \vec{0}$$

$$(2) m^2\vec{a} - (n+1)\vec{b} = (2m-1)\vec{a} + (m-2)\vec{b}$$

필수예제 044**두 벡터가 평행할 조건**

서로 평행하지도 않고 영벡터도 아닌 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 세 벡터 $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ 가

$$\vec{p}=3\vec{a}-2\vec{b}, \vec{q}=3\vec{a}+5\vec{b}, \vec{r}=m\vec{a}+4\vec{b}$$

일 때, 두 벡터 $\vec{p}+\vec{q}, \vec{r}-\vec{p}$ 가 서로 평행하도록 하는 실수 m 의 값을 구하여라.

【풀이】 두 벡터가 평행하다? 딴 생각할 것 없다. 무조건 한 벡터는 다른 벡터의 실수배임을 떠올린다.

$$\vec{p}+\vec{q}=6\vec{a}+3\vec{b}, \vec{r}-\vec{p}=(m-3)\vec{a}+6\vec{b}$$

$$\vec{p}+\vec{q}, \vec{r}-\vec{p} \text{가 서로 평행하므로 } \vec{r}-\vec{p}=k(\vec{p}+\vec{q}) \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)}$$

$$\therefore (m-3)\vec{a}+6\vec{b}=6k\vec{a}+3k\vec{b} \text{에서 } m-3=6k, 6=3k$$

$$\therefore k=2, m=15$$

필수예제 045**세 점이 한 직선 위에 있을 조건**

서로 평행하지도 않고 영벡터도 아닌 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a}+2\vec{b}, \overrightarrow{OB}=2\vec{a}+\vec{b}, \overrightarrow{OC}=m\vec{a}-\vec{b}$$

일 때, 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있도록 하는 실수 m 의 값을 구하여라.

【풀이】 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있다? 두 점씩 골라 벡터를 만들고 한 벡터의 실수배!

이때 주어진 벡터가 전부 시점이 O인 벡터니까 시점 통일 공식을 적용해서 정리하면 끝.

$$\overrightarrow{AC}=\vec{a}-3\vec{b} \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)}$$

$$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}) \text{ 이므로 } (\vec{a}-3\vec{b})-(\vec{a}+2\vec{b})=k((2\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}+2\vec{b}))$$

$$(m-1)\vec{a}-3\vec{b}=k\vec{a}-k\vec{b} \text{에서 } m-1=k, -3=-k$$

$$\therefore k=3, m=4$$

'영벡터가 아닌 두 벡터가 평행'

대원칙

라는 말이 나오면 벡터의 실수배를 이용한다.

'세 점 A, B, C가 한 직선 위'

$$\Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b}=k\vec{a} \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)}$$

정답과 풀이 12쪽 ▶

유제 052 서로 평행하지도 않고 영벡터도 아닌 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 세 벡터 $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ 가

$$\vec{p}=3\vec{a}+\vec{b}, \vec{q}=\vec{a}-2\vec{b}, \vec{r}=\vec{a}+m\vec{b}$$

일 때, 두 벡터 $\vec{p}+\vec{q}, \vec{p}+\vec{r}$ 가 서로 평행하도록 하는 실수 m 의 값을 구하여라.

유제 053 서로 평행하지도 않고 영벡터도 아닌 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a}+\vec{b}, \overrightarrow{OB}=m\vec{a}+3\vec{b}, \overrightarrow{OC}=-\vec{a}-3\vec{b}$$

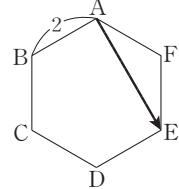
일 때, 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있도록 하는 실수 m 의 값을 구하여라.

연습문제

Step 1

- 065** 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정육각형 ABCDEF에서 \overrightarrow{AE} 의 크기 및 두 꼭짓점을 시점과 종점으로 하는 벡터 중 \overrightarrow{AE} 와 크기가 같은 벡터의 개수를 순서대로 구한 것은?

- ① $|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{3}$, 2개
- ② $|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{3}$, 5개
- ③ $|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{3}$, 11개
- ④ $|\overrightarrow{AE}| = 2\sqrt{3}$, 5개
- ⑤ $|\overrightarrow{AE}| = 2\sqrt{3}$, 11개



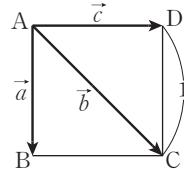
- 066** 평면 위의 서로 다른 다섯 개의 점 A, B, C, D, E에 대하여 다음 중 \overrightarrow{AE} 와 항상 같은 벡터는?

- ① $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}$
- ② $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE}$
- ③ $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DC}$
- ④ $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EB}$
- ⑤ $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{EB}$

- 067** 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 $\vec{x} - 2\vec{y} = \vec{a}$, $3\vec{x} + 2\vec{y} = 2\vec{b}$ 일 때, $\vec{x} + 2\vec{y} = m\vec{a} + n\vec{b}$ 이다. 실수 m, n 에 대하여 $2m+n$ 의 값을 구하여라.

- 068** 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ 일 때, 다음 벡터의 크기를 구하여라.

- (1) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
- (2) $2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$
- (3) $\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c}$



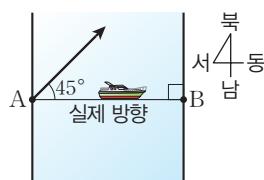
- 069** 서로 평행하지도 않고 영벡터도 아닌 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 등식 $(m^2+1)\vec{a} - (2m+3)\vec{b} = (4m-3)\vec{a} + (n-4)\vec{b}$ 를 만족시키는 실수 m, n 의 값을 구하여라.

- 070** 서로 평행하지도 않고 영벡터도 아닌 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} - 2\vec{b}, \overrightarrow{OB} = m\vec{a}, \overrightarrow{OC} = -2\vec{a} + \vec{b}$$

일 때, 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있도록 하는 실수 m 의 값을 구하여라.

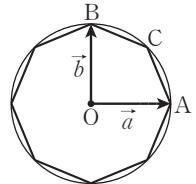
- 071** 북쪽에서 남쪽으로 흐르는 강의 서쪽과 동쪽에 A 마을과 B 마을이 마주 보고 있다. A 마을에서 B 마을로 가기 위해 배의 운항 방향을 오른쪽 그림과 같이 북동쪽으로 잡았더니 실제 진행 방향이 정동쪽이 되었다. 강 물의 속력이 시속 10 km 일 때, 배의 운항 속력 v 와 실제 진행 속력 V 를 각각 구하여라.



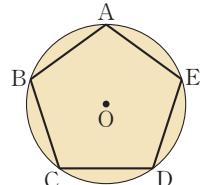
Step 2

- 072** 사각형 ABCD와 임의의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$ 가 성립할 때, 사각형 ABCD는 어떤 사각형인지 말하여라.

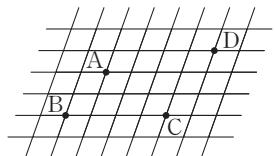
- 073** 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 O에 내접하는 정팔각형에서 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 일 때, $\overrightarrow{OC} = m\vec{a} + n\vec{b}$ 이다. 실수 m, n 에 대하여 $100mn$ 의 값을 구하여라.



- 074** 오른쪽 그림과 같이 원 O에 내접하는 정오각형 ABCDE에서 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}| = 100$ 일 때, 원 O의 넓이를 구하여라.

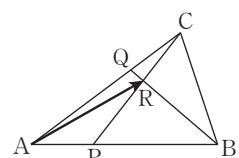


- 075** 오른쪽 그림과 같이 일정한 간격의 평행선이 서로 만나고 있다. 네 점 A, B, C, D에 대하여 $\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ 일 때, 실수 m, n 의 합 $m+n$ 의 값을 구하여라.

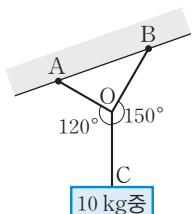


- 076** 서로 평행하지도 않고 영벡터도 아닌 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 등식 $\vec{x} - 3\vec{b} = -\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{x} + \vec{y} = m(\vec{a} + 2\vec{b}) + 3\vec{b}$ 를 동시에 만족시키는 두 벡터 \vec{x}, \vec{y} 가 서로 평행할 때, 실수 m 의 값을 구하여라.

- 077** 오른쪽 그림과 같은 $\triangle ABC$ 의 두 변 AB, AC 위의 점 P, Q에 대하여 $\overline{AP} : \overline{PB} = 1 : 2$, $\overline{AQ} : \overline{QC} = 3 : 2$ 이다. \overline{BQ} 와 \overline{CP} 의 교점 R에 대하여 $\overrightarrow{AR} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ 일 때, 실수 m, n 의 합 $m+n$ 의 값을 구하여라.



- 078** 오른쪽 그림과 같이 비스듬한 천장의 두 지점 A, B에 끈의 양 끝을 고정하고, 그 끈의 한 점 O에 무게 10 kg중의 물체를 매달아 놓았다. $\angle AOC = 120^\circ$, $\angle BOC = 150^\circ$ 일 때, 끈 OA에 가해지는 힘은 몇 kg중인지 구하여라.





고슴도치의 사랑



고슴도치 한 마리에
보통 5천 개의 가시가 있다고 합니다.

고슴도치는 이렇게 많은 가시를 가지고도
서로 사랑을 하고 새끼를 낳고 어울린다고 합니다.

어떻게 가능할까요?

바늘과 바늘 사이, 가시와 가시 사이를
조심스럽게 잘 연결해서
서로 찔리지 않도록 하므로 가능하답니다.

우리에게도 많은 가시가 있습니다.
그리고 그 가시로 서로를 찌르고 상처를 줍니다.

우리는 가까울수록
더 많은 아픔과 상처를 주고받으면서 살아갑니다.

어떻게 하면 가시가 있더라도
서로 사랑하며 안아줄 수 있을까요?

고슴도치처럼 조심조심
서로를 살피고 아끼고 이해하며,
아프지 않게 말하고 양보하면 되겠지요.

그러면 아픔을 안고도 사랑할 수 있겠지요.

사랑의 시작은 바로 배려!
나보다는 상대를 더욱 살피는 것입니다.
나의 배려에서 사랑이 출발합니다.



사랑밭 새벽편지 www.m-letter.or.kr

사랑밭 새벽편지 www.m-letter.or.kr는 방송통신심의위원회 청소년권장사이트로, 사랑밭 새벽편지를 받아 보면 꿈이 생기고, 열정
이 솟는다는 200만 독자의 따뜻한 마음처럼 청소년들의 기슴에도 사랑밭 새벽편지가 사랑의 꽃씨를 심고 꽃 피우리라 기대합니다.



II 평면벡터

-
- 1 벡터의 연산
 - 2 평면벡터의 성분과 내적**
 - 3 평면 운동



1 위치벡터	070
• 연습문제	074
2 평면벡터의 성분	075
3 평면벡터의 내적	080
• 연습문제	088
4 평면벡터를 이용한 직선의 방정식	090
5 평면벡터를 이용한 원의 방정식	097
• 연습문제	099

1

위치벡터

2. 평면벡터의 성분과 내적

01 위치벡터

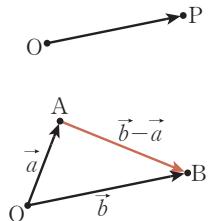
(1) 위치벡터

정해진 점 O 를 시점으로 하는 벡터 \overrightarrow{OP} 를 점 P 의 위치벡터라고 한다.

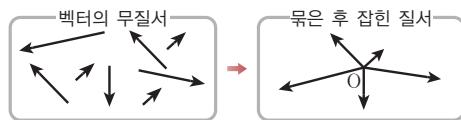
(2) 위치벡터의 성질

두 점 A, B 의 위치벡터를 각각 \vec{a}, \vec{b} 라고 하면

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$



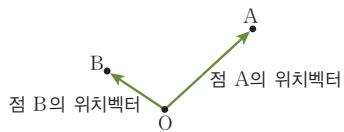
풀이자료 벡터는 크기와 방향만 같으면 모두 같은 벡터이다. 그러니 골치가 아프다. 똑같은 놈들이 무한 복제되어 여기저기 깔려 있으니 일단 정신이 너무 없다. 이 녀석들을 한군데로 끌고 오자. 모든 벡터의 시점을 한 점으로 꽉 둉어 도망하지 못하게 하는 것이다. 이렇게 둉어 놓으니 어떤가? 좋지 아니한가.



풀이자료 모든 벡터의 시점을 한 점 O 로 통일하면 멋진 현상이 하나 보인다.

바로 벡터 하나와 점 하나(종점)가 일대일 대응한다는 것! 한 점을 가리키는 벡터는 오직 하나뿐이다. 이 벡터를 그 점의 위치벡터라고 한다.

'어떤 점의 위치벡터'란 '일정한 점을 시점으로 하여 그 어떤 점을 가리키는 벡터'



위치벡터를 말하려면 반드시 시점이 먼저 정해져 있어야 한다.

만약 누군가 칠판에 점을 하나 찍어 놓고 "이 점의 위치벡터가 뭐냐?"고 물을 때의 정확한 대답. "시점이 어딘데?"

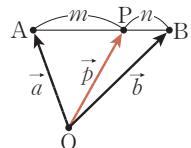
풀이자료 일반적으로 평면에서 위치벡터의 시점은 좌표평면의 원점 O 로 잡는다. 또, 원점 O 의 위치벡터는 $\vec{0}$ 이다.

02 선분의 내분점과 외분점의 위치벡터

두 점 A, B 의 위치벡터를 각각 \vec{a}, \vec{b} 라고 할 때,

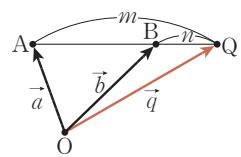
(1) **내분점의 위치벡터** : 선분 AB 를 $m : n$ ($m > 0, n > 0$)으로 내분하는 점 P 의 위치벡터를 \vec{p} 라고 하면

$$\vec{p} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$$



(2) **외분점의 위치벡터** : 선분 AB 를 $m : n$ ($m > 0, n > 0, m \neq n$)으로 외분하는 점 Q 의 위치벡터를 \vec{q} 라고 하면

$$\vec{q} = \frac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$$



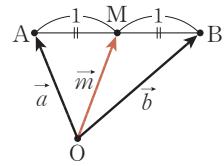
풀이자료 시점을 고정해 각 점에 위치벡터를 부여하면 벡터 이론에 어떤 이득을 줄까? 당장 선분의 내분점과 외분점 얘기가 벡터에서도 가능해진다. 시점을 점 O 로 고정한 위치벡터를 도입하지 않으면 한 점의 벡터를 묻는 질문은 의미가 없다.

한 점을 가리키는 벡터가 어디 한 개뿐이겠는가?

03 선분의 중점의 위치벡터

두 점 A, B의 위치벡터를 각각 \vec{a}, \vec{b} 라고 할 때, 선분 AB의 중점 M의 위치벡터를 \vec{m} 이라고 하면

$$\vec{m} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$



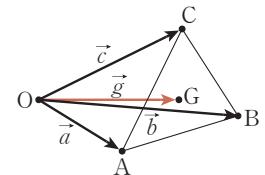
(증명)

선분의 중점은 그 선분을 1 : 1로 내분하는 점이다. 선분의 중점의 위치벡터는 내분점의 위치벡터 공식 $\frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$ 에 $m=1, n=1$ 을 대입한 것과 같다.

04 삼각형의 무게중심의 위치벡터

세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 라 하고 삼각형 ABC의 무게중심 G의 위치벡터를 \vec{g} 라고 하면

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$



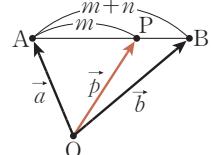
한 걸음 더

◎ 선분의 내분점과 외분점 및 삼각형의 무게중심의 위치벡터의 확인

(1) 오른쪽 그림과 같이 $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{m}{m+n} \overrightarrow{AB}$ 에서

$$\overrightarrow{AP} = \frac{m}{m+n} (\vec{b} - \vec{a}) \text{이므로}$$

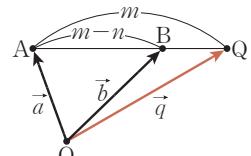
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \vec{a} + \frac{m}{m+n} (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$$



(2) 오른쪽 그림과 같이 $m > n$ 일 때,

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{AQ} = \frac{m}{m-n} \overrightarrow{AB} \text{에서 } \overrightarrow{AQ} = \frac{m}{m-n} (\vec{b} - \vec{a}) \text{이므로}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \vec{a} + \frac{m}{m-n} (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$$

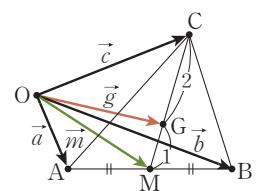


(3) 오른쪽 그림에서 \overrightarrow{AB} 의 중점 M의 위치벡터를 \vec{m} 이라고 하면

$$\vec{m} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

삼각형 ABC의 무게중심 G는 선분 CM을 2 : 1로 내분하므로

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2\vec{m} + \vec{c}}{2+1} = \frac{2 \cdot \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + \vec{c}}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$



필수예제 046**위치벡터**

세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 라고 할 때, 다음 벡터를 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 로 나타내어라.

$$(1) \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{BC}$$

$$(2) 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$$

【풀이】 위치벡터가 주어지면 공통으로 갖는 시점(O)이 있다는 것이다. 시점 통일 공식을 이용해서 벡터를 나타내어라.

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$(1) \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) + 3(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = -\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} = -\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$$

$$(2) 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} = 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) - (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) \\ = -3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = -3\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$$

필수예제 047**선분의 내분점과 외분점의 위치벡터**

세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 위치벡터를 구하여라.

(2) 선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점 Q의 위치벡터를 구하여라.

(3) 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P와 3 : 2로 외분하는 점 Q에 대하여 선분 PQ의 중점 M의 위치 벡터를 구하여라.

【풀이】 내분점 $\rightarrow \frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$, 외분점 $\rightarrow \frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$, 중점 $\rightarrow \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

$$(1) 점 P의 위치벡터는 \frac{2\vec{b}+\vec{a}}{2+1} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

$$(2) 점 Q의 위치벡터는 \frac{3\vec{b}-2\vec{a}}{3-2} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$$

(3) 두 점 P, Q의 위치벡터가 각각 $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$, $-2\vec{a} + 3\vec{b}$ 이므로 선분 PQ의 중점 M의 위치벡터는

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) + (-2\vec{a} + 3\vec{b})}{2} = -\frac{5}{6}\vec{a} + \frac{11}{6}\vec{b}$$

대원칙

(1) 선분 AB를 $m:n$ ($m>0, n>0$)으로 내분하는 점의 위치벡터는 $\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$, 중점의 위치벡터는 $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

(2) 선분 AB를 $m:n$ ($m>0, n>0, m\neq n$)으로 외분하는 점의 위치벡터는 $\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$

정답과 풀이 12쪽 ▶

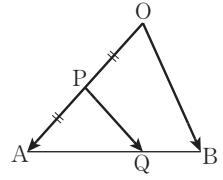
유제 054 직사각형 ABCD에서 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 라고 할 때,
 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$ 를 만족시키는 실수 p, q, r 의 값을 구하여라.

유제 055 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 \vec{a}, \vec{b} 라고 하고 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점 P의 위치벡터를 \vec{p} , 외분하는 점 Q의 위치벡터를 \vec{q} 라고 하자. $\vec{p} + \vec{q} = m\vec{a} + n\vec{b}$ 를 만족시키는 실수 m, n 의 합 $m+n$ 의 값을 구하여라.

필수예제 048

선분의 내분점과 외분점의 위치벡터의 활용

오른쪽 그림과 같은 $\triangle OAB$ 에서 변 OA 의 중점을 P , 변 AB 를 $2 : 1$ 로 내분하는 점을 Q 라고 할 때, $\overrightarrow{PQ} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ 를 만족시키는 실수 m, n 의 값을 구하여라.



풀이 $\overrightarrow{PQ} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ 의 우변이 시점이 O인 벡터들로 이루어져 있음에 착안한다.

→ 좌변의 벡터를 시점이 O인 벡터로 바꾼다.

$$\begin{aligned} \text{I 풀이 } \quad & \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \text{이고 } \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OQ} = \frac{2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}}{2+1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} \text{이므로} \\ & \overrightarrow{PQ} = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} \right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} \quad \therefore m = -\frac{1}{6}, n = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

필수예제 049

삼각형의 무게중심의 위치벡터

세 점 A, B, C 의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 라 하고 $\triangle ABC$ 의 무게중심을 G 라고 하자. \overline{BC} 를 $3 : 1$ 로 내분하는 점을 P 라고 할 때, \overrightarrow{GP} 를 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 로 나타내어라.

풀이 \overrightarrow{GP} 를 시점이 O인 벡터로 바꾸고 필요한 위치벡터는 내분점과 삼각형의 무게중심의 위치벡터 공식을 이용하여 구한다.

$$\begin{aligned} \text{I 풀이 } \quad & \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OG} \text{에서 } \overrightarrow{OP} = \frac{3\vec{c} + \vec{b}}{3+1} = \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c}, \overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \text{이므로} \\ & \overrightarrow{GP} = \left(\frac{1}{4}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c} \right) - \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{12}\vec{b} + \frac{5}{12}\vec{c} \end{aligned}$$

	내분점의 위치벡터	외분점의 위치벡터	중점의 위치벡터	무게중심의 위치벡터
대원칙	 $\vec{p} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$	 $\vec{q} = \frac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n} \quad (\text{단, } m \neq n)$	 $\vec{m} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$	 $\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$

정답과 풀이 12쪽 ▶

유제 056 $\triangle ABC$ 에서 세 점 A, B, C 의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 라고 하자. 선분 AB 의 중점을 M , 선분 BC 를 $1 : 2$ 로 내분하는 점을 N 이라고 할 때, \overrightarrow{MN} 을 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 로 나타내어라.

유제 057 $\triangle ABC$ 의 무게중심을 G 라고 할 때, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = k\overrightarrow{GC}$ 를 만족시키는 실수 k 의 값을 구하여라.

유제 058 좌표평면 위의 $\triangle ABC$ 의 무게중심 G 의 좌표가 $G(3, 4)$ 이다. 원점 O 에 대한 세 점 A, B, C 의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 라고 할 때, $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ 의 값을 구하여라.

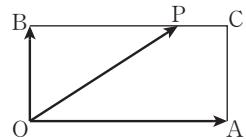
연습문제

정답과 풀이 42쪽 ▶

Step 1

- 079** 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 라 하고, 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점을 P, 선분 PC를 2 : 3으로 외분하는 점을 Q라고 하자. 점 Q의 위치벡터를 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 로 나타내어라.
- 080** 세 점 A, B, P의 위치벡터를 각각 \vec{a} , \vec{b} , \vec{p} 라고 하면 $3\vec{a} + \vec{b} = 4\vec{p}$ 가 성립할 때, 점 P의 위치를 말하여라.

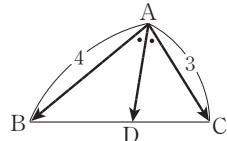
- 081** 오른쪽 그림과 같은 직사각형 OACB에서 선분 BC를 3 : 1로 내분하는 점을 P라고 할 때, $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ 를 만족시키는 실수 m , n 의 값을 구하여라.



- 082** $\triangle ABC$ 에서 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 라고 하자. 두 선분 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 하고 $\triangle ABC$ 의 무게중심을 G라고 할 때, $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}$ 을 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 로 나타내어라.

Step 2

- 083** 오른쪽 그림과 같은 $\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 의 이등분선과 변 BC가 만나는 점을 D라 하고, $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 3$ 이다. $\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ 를 만족시키는 실수 m , n 의 곱 mn 의 값을 구하여라.



- 084** 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 라고 할 때, $5\vec{a} = 3\vec{b} + 2\vec{c}$, $|\vec{b} - \vec{c}| = 20^\circ$ 이 성립한다. 이때 선분 AB의 길이를 구하여라.

- 085** $\triangle OAB$ 에서 \overline{OA} 의 중점을 C, \overline{BC} 의 중점을 D, \overline{AB} 를 2 : 1로 내분하는 점을 E라고 할 때, $\overrightarrow{DE} = m\overrightarrow{OE}$ 를 만족시키는 실수 m 의 값을 구하여라.

- 086** 평면 위의 점 P와 $\triangle ABC$ 에 대하여 $2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AB}$ 일 때, $\triangle PAB$ 와 $\triangle PBC$ 의 넓이의 비를 가장 간단한 자연수의 비로 나타내어라.

01 평면벡터의 성분

(1) 평면에서의 단위벡터

좌표평면 위에서 원점 O 를 시점으로 하고 두 점 $E_1(1, 0)$, $E_2(0, 1)$ 을 각각 종점으로 하는 두 단위 벡터를 다음과 같이 나타낸다.

$$\overrightarrow{OE}_1 = \vec{e}_1, \overrightarrow{OE}_2 = \vec{e}_2$$

(2) 평면벡터의 성분

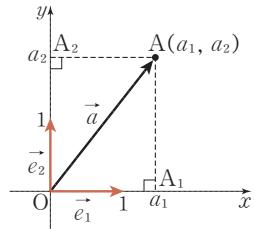
좌표평면 위의 임의의 벡터 \vec{a} 에 대하여 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ 가 되는 점 $A(a_1, a_2)$ 에서

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$$

① 두 실수 a_1, a_2 를 벡터 \vec{a} 의 성분이라고 한다.

→ a_1 은 벡터 \vec{a} 의 x 성분, a_2 는 벡터 \vec{a} 의 y 성분

② 벡터 \vec{a} 를 성분으로 나타내면 $\vec{a} = (a_1, a_2)$



풍선자료 누군가 “벡터는 화살표인데 벡터의 성분을 종점으로만 나타내는 게 말이 돼?”라고 한다면 “시점은 늘 원점 O 야.”라고 대답하면 끝. 시점이 원점 O 로 고정되어 있으니 종점만 있어도 화살표는 얼마든지 그릴 수 있다.

풍선자료 시점을 고정해서 벡터와 점을 일대일 대응이 되도록 만들면 내분점, 외분점, 무게중심을 다룰 수 있다는 데서 끝나는 게 아니다. 이보다 훨씬 중요한 효과는 벡터와 좌표평면이 한 몸이 된다는 것! 좌표평면에서 벡터의 시점을 원점 O 로 딱 정해버리면 종점이 되는 점 A 가 바로 \overrightarrow{OA} 를 나타낼 수 있다.

大원칙

좌표평면 위의 점 (a_1, a_2) 의 위치벡터를 \vec{a} 라고 하면

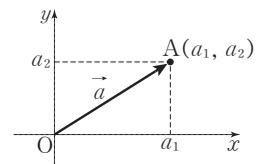
$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 = (a_1, a_2)$$

02 평면벡터의 크기와 서로 같은 조건

두 평면벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ 에 대하여

(1) 평면벡터의 크기 : $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

(2) 평면벡터가 서로 같은 조건 : $\vec{a} = \vec{b} \iff a_1 = b_1, a_2 = b_2$



풍선자료 시점이 원점 O 로 정해진 상태에서는 벡터의 종점 A 만 알면 \overrightarrow{OA} 의 모든 것을 알 수 있다. 벡터의 모든 것이란 크기와 방향.

\overrightarrow{OA} 의 크기? → 원점에서 점 A 까지의 거리!

\overrightarrow{OA} 의 방향? → 원점에서 점 A 를 쳐다보는 방향!

풍선자료 두 벡터가 서로 같다는 건 크기와 방향이 같다는 것. 평행이동하면 겹쳐진다는 것이다.

시점이 고정되어 있는 평면벡터에서는 두 벡터가 서로 같다는 것은 종점이 서로 같다는 이야기!!

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \rightarrow (\text{점 } A) = (\text{점 } B) \rightarrow x\text{좌표는 } x\text{좌표끼리}, y\text{좌표는 } y\text{좌표끼리} \text{ 같다.}$

03 평면벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배

두 평면벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ 에 대하여

$$(1) \text{덧셈} : \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$(2) \text{뺄셈} : \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

$$(3) \text{실수배} : k\vec{a} = (ka_1, ka_2) \quad (\text{단, } k \text{는 실수})$$

증명자료 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배

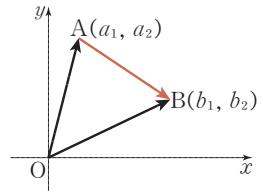
→ x 성분은 x 성분끼리, y 성분은 y 성분끼리 더하고 뺀다. 또, 실수배는 모든 성분에 실수를 다 곱한다.

04 평면벡터의 성분과 크기

두 점 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ 에 대하여

$$(1) \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

$$(2) |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$



증명자료 점의 좌표와 벡터가 주어지면? 무조건 시점을 O로 만들고 시작한다. 시점이 O인 벡터의 성분은 종점의 좌표와 똑같으니까.

→ [1단계] 두 점 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ 가 주어지면 벡터 $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$, $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2)$ 를 만든다.

[2단계] 시점 통일 공식 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ 를 이용한다.

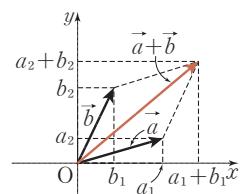
• 한 걸음 더

◎ 평면벡터의 성분에 의한 덧셈, 뺄셈, 실수배의 확인

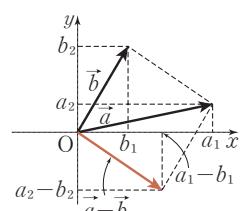
두 평면벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ 에 대하여

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2, \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 \circ \text{므로}$$

$$\begin{aligned} (1) \text{덧셈} : \vec{a} + \vec{b} &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) + (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2) \\ &= (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (2) \text{뺄셈} : \vec{a} - \vec{b} &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) - (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2) \\ &= (a_1 - b_1)\vec{e}_1 + (a_2 - b_2)\vec{e}_2 \\ &= (a_1 - b_1, a_2 - b_2) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (3) \text{실수배} : k\vec{a} &= k(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) \\ &= ka_1\vec{e}_1 + ka_2\vec{e}_2 \\ &= (ka_1, ka_2) \quad (\text{단, } k \text{는 실수}) \end{aligned}$$

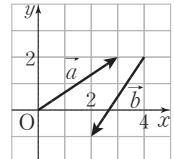
필수예제 050

평면벡터의 성분 표시

다음 물음에 답하여라. (단, $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$)

(1) 세 평면벡터 $\vec{a} = 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$, $\vec{b} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{c} = \vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$ 를 각각 성분으로 나타내어라.

(2) 오른쪽 그림과 같은 두 평면벡터 \vec{a} , \vec{b} 를 각각 \vec{e}_1 , \vec{e}_2 로 나타낸 다음 성분으로 나타내어라.



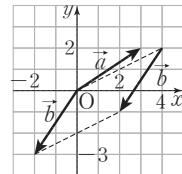
풀이 벡터를 성분으로 나타낼 때, 시점은 원점 $O(0, 0)$ 이다. 종점이 $A(a, b)$ 이면 $\overrightarrow{OA} = (a, b)$

$$(1) \vec{a} = (3, 5), \vec{b} = (-1, 2), \vec{c} = (1, -4)$$

$$(2) \vec{a} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 = (3, 2)$$

\vec{b} 를 시점이 원점 O 가 되도록 평행이동하면 오른쪽 그림과 같으므로

$$\vec{b} = -2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 = (-2, -3)$$



필수예제 051

평면벡터의 크기와 연산

세 평면벡터 $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{b} = (-2, 3)$, $\vec{c} = (-3, 2)$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) $\vec{a} - (2\vec{b} + \vec{c})$ 를 성분으로 나타내어라.

(2) $(\vec{a} - 3\vec{c}) - 2(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})$ 의 크기를 구하여라.

풀이 성분으로 나타낸 벡터의 연산 \rightarrow x 성분은 x 성분끼리, y 성분은 y 성분끼리 계산한다.

$$(1) \vec{a} - (2\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c} = (1, 3) - 2(-2, 3) - (-3, 2) \\ = (1, 3) - (-4, 6) - (-3, 2) = (8, -5)$$

$$(2) (\vec{a} - 3\vec{c}) - 2(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}) = -\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = -(1, 3) - 2(-2, 3) + (-3, 2) = (0, -7) \text{이므로} \\ |(\vec{a} - 3\vec{c}) - 2(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})| = \sqrt{0^2 + (-7)^2} = 7$$

대원칙

$\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ 일 때

$$(1) \vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2) \quad (2) k\vec{a} = (ka_1, ka_2) \quad (3) |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

정답과 풀이 13쪽 ▶

유제 059 세 평면벡터 $\vec{a} = (2, -1)$, $\vec{b} = (-2, 3)$, $\vec{c} = (-1, 3)$ 에 대하여
 $-(-2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) + 2(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c})$ 를 성분으로 나타내어라.

유제 060 세 평면벡터 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-2, 1)$, $\vec{c} = (-1, 1)$ 에 대하여 $|\vec{c} - 2\vec{a} - 3\vec{b}|$ 의 값을 구하여라.

유제 061 두 평면벡터가 $\vec{a} = (3, 2)$, $\vec{b} = (2, -1)$ 일 때, $2\vec{a} - 6\vec{x} - 3\vec{b}$ 를 만족시키는 벡터 \vec{x} 에 대하여
 $6\vec{x}$ 의 크기를 구하여라.

필수예제 052**평면벡터가 서로 같을 조건**

세 평면벡터 $\vec{a}=(-1, 4)$, $\vec{b}=(-1, 3)$, $\vec{c}=(-2, 5)$ 에 대하여 $\vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}$ 일 때, m^2+n^2 의 값을 구하여라. (단, m, n 은 실수)

【풀이】 성분으로 나타낸 두 벡터가 서로 같다. $\rightarrow x$ 성분은 x 성분끼리, y 성분은 y 성분끼리 같다.

【풀이】 $\vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}$ 를 성분으로 나타내면

$$(-1, 4)=m(-1, 3)+n(-2, 5)=(-m, 3m)+(-2n, 5n)=(-m-2n, 3m+5n)$$

$$\therefore -m-2n=-1, 3m+5n=4$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } m=3, n=-1$$

$$\therefore m^2+n^2=3^2+(-1)^2=\mathbf{10}$$

필수예제 053**평면벡터의 성분과 크기**

좌표평면 위의 세 점 A(7, 3), B(10, -1), C(3, 6)에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 벡터 \overrightarrow{AB} 의 성분

(2) 벡터 \overrightarrow{AB} 의 크기

(3) 벡터 \overrightarrow{CA} 의 성분

(4) 벡터 \overrightarrow{CA} 의 크기

【풀이】 점의 좌표와 벡터가 주어지면 \rightarrow [1단계] 시점이 O인 벡터를 만든다.

[2단계] 시점 통일 공식 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ 를 이용한다.

【풀이】 [1단계] $\overrightarrow{OA}=(7, 3)$, $\overrightarrow{OB}=(10, -1)$, $\overrightarrow{OC}=(3, 6)$ 이므로

$$[2단계] (1) \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(10, -1)-(7, 3)=(3, -4)$$

$$(2) |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$$

$$(3) \overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=(7, 3)-(3, 6)=(4, -3)$$

$$(4) |\overrightarrow{CA}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$$

(1) 성분으로 나타낸 두 벡터가 서로 같으면 각 성분끼리 같다.

大원칙

$\rightarrow \vec{a}=(a_1, a_2), \vec{b}=(b_1, b_2)$ 일 때, $\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1, a_2=b_2$

(2) 점의 좌표와 벡터가 주어지면 일단 시점이 O인 벡터를 만들고 생각한다.

$\rightarrow A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$ 일 때, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(b_1-a_1, b_2-a_2)$, $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

정답과 풀이 13쪽 ▶

유제 062 세 평면벡터 $\vec{a}=(1, 1)$, $\vec{b}=(-1, 2)$, $\vec{c}=(5, 7)$ 에 대하여 $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$ 일 때, $k+5l$ 의 값을 구하여라. (단, k, l 은 실수)

유제 063 좌표평면 위의 세 점 A(2, 3), B(5, -1), C(-2, 2)에 대하여 점 D가 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ 를 만족시킬 때, 점 D의 좌표를 구하여라.

필수예제 054**두 평면벡터가 평행할 조건**

세 평면벡터 $\vec{a}=(1, 3)$, $\vec{b}=(2, -1)$, $\vec{c}=(-2, 3)$ 에 대하여 $2\vec{a}+\vec{b}$, $m\vec{b}-\vec{c}$ 가 서로 평행하도록 하는 실수 m 의 값을 구하여라.

【풀이】 두 벡터가 평행하다? \rightarrow 한 벡터는 다른 벡터의 실수배임을 떠올린다.

$$\begin{aligned} 2\vec{a}+\vec{b} &= 2(1, 3) + (2, -1) = (4, 5) \\ m\vec{b}-\vec{c} &= m(2, -1) - (-2, 3) = (2m+2, -m-3) \\ 2\vec{a}+\vec{b}, m\vec{b}-\vec{c} \text{ 가 서로 평행하므로 } m\vec{b}-\vec{c} &= k(2\vec{a}+\vec{b}) \text{ (단, } k \text{ 는 } 0 \text{ 이 아닌 실수)} \\ \text{즉, } (2m+2, -m-3) &= k(4, 5) \text{ 에서 } 2m+2=4k, -m-3=5k \\ \text{두 식을 연립하여 풀면 } k &= -\frac{2}{7}, m = -\frac{11}{7} \end{aligned}$$

필수예제 055**평면벡터에서의 점의 자취**

두 점 A(3, 1), B(1, 3)에 대하여 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=10$ 을 만족시키는 점 P의 자취의 방정식을 구하여라.

【풀이】 점 P(x, y)의 자취의 방정식? $\rightarrow x, y$ 사이의 관계식을 구하라는 말!

【풀이】 P(x, y)라고 하면

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB} &= (\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OP} \\ &= (3, 1)+(1, 3)-2(x, y) = (4-2x, 4-2y) \\ \text{이때 } |\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}| &= 10 \text{ 이므로 } \sqrt{(4-2x)^2+(4-2y)^2} = 10 \\ \text{양변을 제곱하면 } (4-2x)^2+(4-2y)^2 &= 100 \\ \therefore (x-2)^2+(y-2)^2 &= 25 \end{aligned}$$

【참고】 여기서 한 가지 팁! $(4-2x)^2+(4-2y)^2=100$ 을 정리할 때 무조건 전개해야 할까? 수가 크고 계산이 복잡해서 눈이 핑핑 돌아갈 것이다. 그러지 말고 x, y 의 계수로 묶어낸 후 양변을 나누어 정리하면 훨씬 쉽다.

$$(4-2x)^2+(4-2y)^2=100 \rightarrow 2^2(2-x)^2+2^2(2-y)^2=100 \rightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=25$$

(1) '영벡터가 아닌 두 벡터가 평행하다.'라는 말이 나오면 벡터의 실수배를 이용한다.

【원칙】

$\rightarrow \vec{a}=(a_1, a_2), \vec{b}=(b_1, b_2)$ 일 때, $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b}=k\vec{a} \iff b_1=ka_1, b_2=ka_2$ (단, k 는 0이 아닌 실수)

(2) 벡터의 크기 조건이 주어진 경우, 점 P(x, y)의 자취의 방정식을 구할 때에는

$\vec{a}=(a_1, a_2)$ 일 때, $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ 임을 이용하여 x, y 사이의 관계식을 구한다.

정답과 풀이 13쪽 ▶

유제 064 두 평면벡터 $\vec{a}=(1, 4)$, $\vec{b}=(x, 1)$ 에 대하여 $\vec{a}+2\vec{b}$, $2\vec{a}+\vec{b}$ 가 서로 평행하도록 하는 x 의 값을 구하여라.

유제 065 세 점 A(1, 1), B(4, 1), C(1, 4)에 대하여 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=3$ 을 만족시키는 점 P의 자취의 길이를 구하여라.

3

평면벡터의 내적

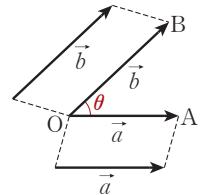
2. 평면벡터의 성분과 내적

01 두 평면벡터가 이루는 각

영벡터가 아닌 두 평면벡터 \vec{a}, \vec{b} 를 각각 시점을 한 점 O로 하는 위치벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}, \vec{b}=\overrightarrow{OB}$ 로 나타낼 때,

$$\angle AOB = \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

를 두 평면벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기라고 한다.



통신자료 여기저기 흘어져 있는 두 벡터 사이의 각의 크기를 어떻게 따지나고? 일단 두 벡터가 같은 지점에서 시작하도록 끌고 온 다음에 두 벡터를 변으로 하는 각을 구하면 된다.

02 평면벡터의 내적

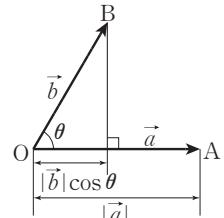
(1) 평면벡터의 내적

영벡터가 아닌 두 평면벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기가 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) 일 때,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

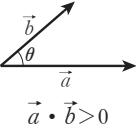
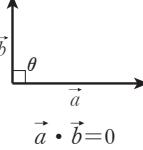
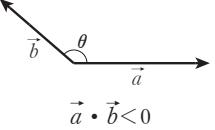
를 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 의 내적이라고 한다.

(2) $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$ 이면 $\vec{a} \cdot \vec{b}=0$



통신자료 벡터의 실수배는 실수랑 벡터를 곱하는 사이비 곱셈이라고 했다. 내적이 벡터랑 벡터를 곱하는 진정한 벡터의 곱셈이라 할 수 있다. 그런데 벡터의 내적은 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배와 비교할 때 커다란 차이점이 있다. 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배의 결과는? 벡터였다. 그러나 두 벡터의 내적의 계산 결과는? 바로 실수!

통신자료 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 영벡터가 아니면 $|\vec{a}|$ 도 양수, $|\vec{b}|$ 도 양수이므로 $\cos \theta$ 의 부호에 따라 내적은 양수일 수도, 0일 수도, 음수일 수도 있다.

$0^\circ \leq \theta < 90^\circ$	$\theta = 90^\circ$	$90^\circ < \theta \leq 180^\circ$
 $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$	 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$	 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$
왜나? $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ 이면 $\cos \theta > 0$	왜나? $\theta = 90^\circ$ 이면 $\cos \theta = 0$	왜나? $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ 이면 $\cos \theta < 0$

특히 이 중에서 두 벡터가 수직이면 내적이 0이라는 사실은 훗날 각종 벡터 문제에서 맹활약을 펼치게 될 내용!!

통신자료 $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0 = |\vec{a}|^2$

03 평면벡터의 내적과 성분

두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2), \vec{b}=(b_1, b_2)$ 에 대하여

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

04 평면벡터의 내적의 성질

세 평면벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 와 실수 k 에 대하여

- (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ← 교환법칙
- (2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ ← 분배법칙
- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ ← 분배법칙
- (3) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ ← 결합법칙

▶ 풍선자료 벡터의 내적은 교환법칙과 분배법칙에 자유롭다. 내적과 실수배를 함께 해도 결합법칙이 성립한다. 수나 식의 연산에서처럼 편안하게 다루어도 좋다. 특히 교환법칙은 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 꼴 문제에서 맹활약을 하게 될 것이다.

▶ 풍선자료 두 평면벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 다음이 성립한다.

- ① $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$
- ② $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$

05 두 평면벡터가 이루는 각의 크기

영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ 가 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)라고 하면

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

▶ 풍선자료 두 벡터의 시점을 같게 만들면 두 벡터가 이루는 각을 눈으로 확인하는 것은 어렵지 않다. 그러나 그 각의 크기를 실제로 구할 땐? 각도기를 사용할 수도 없는 일이다. 이때 벡터의 내적을 이용한다.

(1) 두 벡터의 크기와 내적을 알면? $\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ 에서 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ 로 구한다.

(2) 두 벡터가 성분으로 나타내어져 있다면? $\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ 이므로 $\cos \theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$ 로 구한다.

06 평면벡터의 수직 조건과 평행 조건

영벡터가 아닌 두 평면벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여

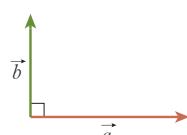
(1) 수직 조건 : $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

(2) 평행 조건 : $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}| |\vec{b}| \iff \vec{b} = k\vec{a}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)

▶ 풍선자료 영벡터가 아닌 두 벡터가 수직일 땐 $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ 이므로 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{2} = 0$

또, 그 역도 성립한다. $\therefore \vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

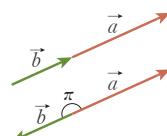
나중에 배우게 될 꼬인 위치에 있는 두 직선이 수직임을 확인하는 강력한 도구가 바로 내적이 0인 두 벡터이다.



▶ 풍선자료 영벡터가 아닌 두 벡터가 평행한 것은 오른쪽과 같이 같은 방향이거나 반대 방향 중 하나. 즉, 이루는 각의 크기가 $\theta = 0$ 이거나 $\theta = \pi$ 이거나.

이때 $\cos 0 = 1, \cos \pi = -1$ 이므로 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = \pm |\vec{a}| |\vec{b}|$

또, 그 역도 성립한다. $\therefore \vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}| |\vec{b}|$



▶ 풍선자료 두 벡터가 평행하다는 조건은 내적을 활용하는 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}| |\vec{b}|$ 보다는 $\vec{b} = k\vec{a}$ 를 이용하는 것이 더 좋을 때가 많다.

◎ 평면벡터의 내적과 성질의 확인

영벡터가 아닌 두 평면벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기가 θ 일 때,
두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 를 각각 원점 O를 시점으로 하는 위치벡터
 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}=(a_1, a_2), \vec{b}=\overrightarrow{OB}=(b_1, b_2)$ 로 나타내자.

(1) 내적의 성질 이용

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BA}|^2 &= |\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|^2 = |\vec{a}-\vec{b}|^2 \\ &= (\vec{a}-\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

위 등식을 성분으로 나타내면

$$(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 = (a_1^2+a_2^2) - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (b_1^2+b_2^2)$$

이것을 정리하면 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

(2) 피타고라스 정리 이용

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때, 점 A에서 \overrightarrow{OB} 에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\triangle AHB$ 가 직각삼각형이므로

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 = (\overline{OA}\sin\theta)^2 + (\overline{OB}-\overline{OA}\cos\theta)^2 \\ &= \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2 \times \overline{OA} \times \overline{OB} \times \cos\theta \end{aligned}$$

따라서 (1)과 같은 방법으로 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

같은 방법으로 위의 식은 $\theta=0, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ 일 때에도 성립한다.

(3) 삼각함수의 덧셈정리 이용

두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β 라고 하자. $\alpha > \beta$ 일 때, $\theta = \alpha - \beta$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \\ &= \frac{a_1}{|\vec{a}|} \times \frac{b_1}{|\vec{b}|} + \frac{a_2}{|\vec{a}|} \times \frac{b_2}{|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\ \Rightarrow a_1b_1 + a_2b_2 &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta = \vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

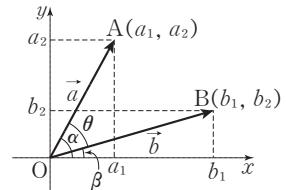
$\alpha < \beta$ 일 때에도 같은 방법으로 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ 임을 확인할 수 있다.

$\alpha = \beta$ 일 때, $\theta = 0$ 이므로 $\vec{b} = k(a_1, a_2)$ ($k > 0$ 인 실수)로 놓으면

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \times k |\vec{a}| \times \cos 0 = k |\vec{a}|^2 = k(a_1^2 + a_2^2)$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 = a_1 \times ka_1 + a_2 \times ka_2 = k(a_1^2 + a_2^2)$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$



◎ 평면벡터의 내적의 성질의 확인

세 평면벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2), \vec{b}=(b_1, b_2), \vec{c}=(c_1, c_2)$ 와 실수 k 에 대하여

(1) 교환법칙 $\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = b_1a_1 + b_2a_2 = \vec{b} \cdot \vec{a}$

(2) 분배법칙 $\Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (a_1, a_2) \cdot (b_1+c_1, b_2+c_2) = (a_1b_1 + a_1c_1) + (a_2b_2 + a_2c_2)$
 $= (a_1b_1 + a_2b_2) + (a_1c_1 + a_2c_2) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

(3) 결합법칙 $\Rightarrow (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = (ka_1, ka_2) \cdot (b_1, b_2) = ka_1b_1 + ka_2b_2$

$$= a_1(kb_1) + a_2(kb_2) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$$

필수예제 056

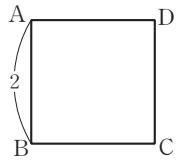
평면벡터의 내적

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD에서 다음을 구하여라.

$$(1) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$(2) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$(3) \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB}$$



증명자료 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 의 내적은 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \rightarrow (\text{크기}) \times (\text{크기}) \times (\text{코사인})$ 으로 계산한다.
이때 (3)과 같이 벡터가 물고 늘어지는 상황에서는 반드시 시점을 같게 한 후 θ 를 찾아야 한다.

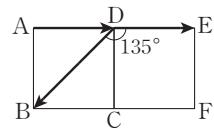
| 풀이 | (1) 정사각형의 한 내각의 크기는 90° 이므로 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 2 \times 2 \times \cos 90^\circ = 0$

$$(2) \angle CAB = 45^\circ \text{이므로 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 2\sqrt{2} \times \cos 45^\circ = 4$$

$$(3) \text{오른쪽 그림에서 } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DE} \text{이므로}$$

$$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DB}) \text{가 이루는 각의 크기} = \angle BDE = 135^\circ$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB} = 2 \times 2\sqrt{2} \times \cos 135^\circ = -4$$



필수예제 057

성분으로 나타내어진 평면벡터의 내적

다음 물음에 답하여라.

(1) 두 평면벡터 $\vec{a} = (1, -2), \vec{b} = (-2, -3)$ 에 대하여 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 를 구하여라.

(2) 두 평면벡터 $\vec{a} = (-2, 3), \vec{b} = (x, 2)$ 에 대하여 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 일 때, x 의 값을 구하여라.

증명자료 성분으로 나타내어진 평면벡터의 내적은 $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$
 $\rightarrow (x\text{성분끼리의 곱}) + (y\text{성분끼리의 곱})$ 으로 계산한다.

| 풀이 | (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times (-2) + (-2) \times (-3) = 4$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{이므로 } -2x + 3 \times 2 = 0 \quad \therefore x = 3$$

(1) 도형에서의 벡터의 내적은 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \rightarrow (\text{크기}) \times (\text{크기}) \times (\text{코사인})$ 을 이용한다.

대원칙 (2) 성분으로 나타내어진 벡터의 내적은 $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$

$\rightarrow (x\text{성분끼리의 곱}) + (y\text{성분끼리의 곱})$ 을 이용한다.

유제 066 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정육각형 ABCDEF에서 세 대각선의 교점을 O라고 할 때, 다음을 구하여라.

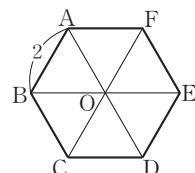
$$(1) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$(2) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$$

$$(3) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$(4) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF}$$

정답과 풀이 13쪽 ▶



유제 067 두 평면벡터 $\vec{a} = (-1, 2), \vec{b} = (2, -2)$ 에 대하여 $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$ 를 구하여라.

유제 068 두 평면벡터 $\vec{a} = (2x+1, 3), \vec{b} = (x-2, -2)$ 에 대하여 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ 일 때, 양수 x 의 값을 구하여라.

필수예제 058**평면벡터의 내적의 성질(1)**

두 평면벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 이고 $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3$ 일 때, $(2\vec{a}-3\vec{b}) \cdot (\vec{a}+2\vec{b})$ 를 구하여라.

풀이 벡터의 내적의 연산에서는 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙을 자유롭게 사용할 수 있다. 수나 식의 계산처럼 편안하게 해라.
이때 $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0 = |\vec{a}|^2$ 의 성질이 요긴하게 쓰인다.

$$\begin{aligned} \text{[풀이]} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{3} = 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 3 \text{이므로} \\ (2\vec{a}-3\vec{b}) \cdot (\vec{a}+2\vec{b}) &= 2\vec{a} \cdot \vec{a} + 4\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b} \cdot \vec{a} - 6\vec{b} \cdot \vec{b} = 2|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 6|\vec{b}|^2 \\ &= 2 \times 2^2 + 3 - 6 \times 3^2 = -43 \end{aligned}$$

필수예제 059**평면벡터의 내적의 성질(2)**

두 평면벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=3, |\vec{a}+\vec{b}|=2\sqrt{3}$ 일 때, 다음을 구하여라.

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

(2) $|\vec{a}-\vec{b}|$

(3) $|3\vec{a}-2\vec{b}|$

풀이 (1) $|\vec{a}+\vec{b}|=2\sqrt{3}$ 의 양변을 제곱하면 $|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 12$
 $1^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 3^2 = 12 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$
(2) $|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1^2 - 2 \times 1 + 3^2 = 8 \quad \therefore |\vec{a}-\vec{b}| = 2\sqrt{2}$
(3) $|3\vec{a}-2\vec{b}|^2 = 9|\vec{a}|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 9 \times 1^2 - 12 \times 1 + 4 \times 3^2 = 33 \quad \therefore |3\vec{a}-2\vec{b}| = \sqrt{33}$

대원칙

(1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

(2) $|\vec{a} \pm \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$ (복부호 동순)

(3) $(\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$

(4) $|k\vec{a} \pm l\vec{b}|^2 = k^2|\vec{a}|^2 \pm 2kl\vec{a} \cdot \vec{b} + l^2|\vec{b}|^2$ (복부호 동순)

정답과 풀이 14쪽 ▶

유제 069 두 평면벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 이고 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2$ 일 때, $(\vec{a}+k\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b})=6$ 을 만족시키는 실수 k 의 값을 구하여라.

유제 070 두 평면벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 이고 $|\vec{a}|=2, |\vec{a}+\vec{b}|=2\sqrt{7}$ 일 때, \vec{b} 의 크기를 구하여라.

유제 071 두 평면벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 $|\vec{a}|=4, |\vec{b}|=3, |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$ 일 때, $|2\vec{a}+\vec{b}|$ 를 구하여라.

필수예제 060

두 평면벡터가 이루는 각의 크기(1)

다음 물음에 답하여라.

(1) 두 평면벡터 $\vec{a}=(0, -2), \vec{b}=(3, 3)$ 이 이루는 각의 크기를 구하여라.

(2) 두 평면벡터 $\vec{a}=(3, 1), \vec{b}=(-2, 1)$ 에 대하여 $\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+2\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 구하여라.

풀이 벡터가 성분으로 주어지면 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \cos \theta = a_1 b_1 + a_2 b_2 \Rightarrow \cos \theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

| 풀이 | (1) 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)라고 하면

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{0 \times 3 + (-2) \times 3}{\sqrt{0^2 + (-2)^2} \sqrt{3^2 + 3^2}} = \frac{-6}{2 \times 3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \theta = \frac{3}{4}\pi$$

$$(2) \vec{a} + \vec{b} = (3, 1) + (-2, 1) = (1, 2), \vec{a} + 2\vec{b} = (3, 1) + 2(-2, 1) = (-1, 3) \text{이므로}$$

$\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)라고 하면

$$\cos \theta = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}| |\vec{a} + 2\vec{b}|} = \frac{1 \times (-1) + 2 \times 3}{\sqrt{1^2 + 2^2} \sqrt{(-1)^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{5} \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

필수예제 061

두 평면벡터가 이루는 각의 크기(2)

두 평면벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3, |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$ 일 때, 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기를 구하여라.

풀이 $|\vec{a} + l\vec{b}|$ 의 꼴이 보이면? 무조건 제곱부터 하고 필요한 걸 찾자.

$$|\vec{a} + l\vec{b}|^2 \text{에서 } \vec{a}, \vec{b} \text{를 구한 다음 } \rightarrow |\vec{a}|, |\vec{b}|, \vec{a} \cdot \vec{b} \text{를 } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \text{에 대입한다.}$$

| 풀이 | $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{7}$ 의 양변을 제곱하면 $|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 7$

$$2^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 3^2 = 7 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 3$$

두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)라고 하면

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{3}{2 \times 3} = \frac{1}{2} \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2), \vec{b}=(b_1, b_2)$ 가 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)라고 하면

대원칙 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = a_1 b_1 + a_2 b_2 \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

정답과 풀이 14쪽 ▶

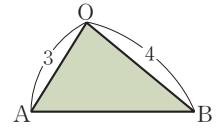
유제 072 세 평면벡터 $\vec{a}=(1, 2), \vec{b}=(-1, 3), \vec{c}=(2, -1)$ 에 대하여 $\vec{a}-\vec{b}, \vec{a}-\vec{c}$ 가 이루는 각의 크기를 구하여라.

유제 073 두 평면벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=2, |\vec{a}+3\vec{b}|=3\sqrt{3}$ 일 때, 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기를 구하여라.

필수예제 062

평면벡터의 내적과 삼각형의 넓이

오른쪽 그림과 같이 $\overrightarrow{OA}=3$, $\overrightarrow{OB}=4$ 인 $\triangle OAB$ 에서 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}=6$ 일 때,
 $\triangle OAB$ 의 넓이를 구하여라.



▶ 풀이 삼각형의 두 변의 길이는 주어졌다. 그럼 넓이를 구하기 위해 필요한 것은? 바로 끼인각!

끼인각은 벡터의 내적에서 나온다. 크기까지는 아니더라도 최소한 코사인 값은 나온다. 그럼 자동으로 끼인각에 대한 사인 값도 나온다.

$$|\text{풀이}| \quad \angle AOB = \theta \text{라고 하면 } \triangle OAB = \frac{1}{2} \times \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \times \sin \theta = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \sin \theta \quad \dots \dots \quad \textcircled{1}$$

$$\text{이때 } \cos \theta = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} = \frac{6}{3 \times 4} = \frac{1}{2} \text{이므로 } \theta = \frac{\pi}{3} (\because 0 < \theta < \pi)$$

$$\text{따라서 } \textcircled{1} \text{에서 } \triangle OAB = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$$

| 참고 | θ 가 특수각이 아닌 경우에는 어떻게 하냐고? $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서 $\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ 니까 $\cos \theta$ 의 값에서 바로 $\sin \theta$ 의 값을 구한다. $\Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2}$ 에서 $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\because 0 < \theta < \pi$)

필수예제 063

좌표평면 위의 삼각형의 넓이

좌표평면 위의 세 점 $O(0, 0)$, $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\triangle OAB$ 의 넓이를 a_1, a_2, b_1, b_2 를 이용하여 나타내어라.

▶ 풀이 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b} \rightarrow |\vec{a}|, |\vec{b}|, \vec{a} \cdot \vec{b}, \cos \theta \rightarrow \triangle OAB = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$

| 풀이 | $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 라고 하면 $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

$$\text{따라서 } \angle AOB = \theta \text{라고 하면 } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \text{이므로}$$

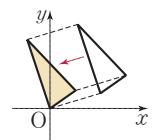
$$\triangle OAB = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2} = \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

| 참고 | 삼각형의 세 꼭짓점 중 하나가 원점이 아닐 땐? 세 점 중 하나가 원점이 되도록 만들면 된다.

어떻게?

삼각형을 평행이동해서!



영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ 가 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)라고 하면

대원칙

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2, \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

정답과 풀이 14쪽 ▶

유제 074 세 점 $O(0, 0)$, $A(2, 4)$, $B(4, 2)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\triangle OAB$ 의 넓이를 구하여라.

필수예제 064**평면벡터의 수직 조건**

다음 물음에 답하여라.

- (1) 두 벡터 $\vec{a} = (x, -2)$, $\vec{b} = (-1, 1)$ 이 서로 수직일 때, x 의 값을 구하여라.
- (2) 두 벡터 $\vec{a} = (2, -1)$, $\vec{b} = (1, 3)$ 에 대하여 $\vec{a} + \vec{b}$, $k\vec{a} - \vec{b}$ 가 서로 수직일 때, 실수 k 의 값을 구하여라.

【풀이】 두 벡터가 수직이면 뭘 더 생각하는가? 무조건 내적이 0이다.

$$|\text{풀이}| \quad (1) \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{이므로 } -x - 2 = 0 \quad \therefore x = -2$$

$$(2) \vec{a} + \vec{b} = (3, 2), k\vec{a} - \vec{b} = (2k-1, -k-3) \text{이고 } (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (k\vec{a} - \vec{b}) = 0 \text{이므로}$$

$$3(2k-1) + 2(-k-3) = 0, 4k - 9 = 0 \quad \therefore k = \frac{9}{4}$$

필수예제 065**평면벡터의 수직과 평행**

두 벡터 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (3, -4)$ 에 대하여 \vec{a} 와 $\vec{p} - \vec{b}$ 가 서로 평행하고 \vec{b} 와 \vec{p} 가 서로 수직일 때, $|\vec{p}|$ 를 구하여라.

【풀이】 평행 조건과 수직 조건이 한꺼번에 등장하면 일단 평행 조건을 먼저 생각한다.

두 벡터가 평행이라고? 한 벡터는 다른 벡터의 실수배! 두 벡터가 수직이라고? 두 벡터의 내적은 0!

$$|\text{풀이}| \quad \vec{p} = (x, y) \text{라고 하면 } \vec{p} - \vec{b} = (x-3, y+4)$$

$$\vec{a} \text{와 } \vec{p} - \vec{b} \text{가 서로 평행하므로 } \vec{p} - \vec{b} = k\vec{a} \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)}$$

$$\text{즉, } x-3=k, y+4=2k \text{에서 } x=k+3, y=2k-4 \quad \cdots \cdots \textcircled{①}$$

$$\text{또, } \vec{b} \text{와 } \vec{p} \text{가 서로 수직이므로 } \vec{b} \cdot \vec{p} = 0 \text{에서 } 3x - 4y = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{②}$$

$$\textcircled{①} \text{을 } \textcircled{②} \text{에 대입하면 } 3(k+3) - 4(2k-4) = 0, -5k + 25 = 0 \quad \therefore k = 5$$

$$\text{따라서 } \textcircled{①} \text{에 의해 } \vec{p} = (8, 6) \text{이므로 } |\vec{p}| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \mathbf{10}$$

(1) 두 평면벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ 에 대하여

【원칙】 ① 수직 조건 : $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ② 평행 조건 : $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b} = k\vec{a}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)

(2) 수직 조건과 평행 조건이 함께 주어지면 평행 조건 \rightarrow 수직 조건의 순서로 적용한다.

정답과 풀이 14쪽 ▶

유제 075 두 벡터 $\vec{a} = (1, -x)$, $\vec{b} = (x+4, -1)$ 에 대하여 $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ 가 서로 수직일 때, x 의 값을 구하여라.

유제 076 영벡터가 아닌 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 $|\vec{a}| = \sqrt{2}|\vec{b}|$ 이고 $2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + 3\vec{b}$ 가 서로 수직일 때, 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기를 구하여라.

유제 077 두 벡터 $\vec{a} = (-1, 3)$, $\vec{b} = (2, 1)$ 에 대하여 \vec{a} 와 \vec{c} 가 서로 평행하고, \vec{a} 와 \vec{d} 가 서로 수직이다. $\vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$ 일 때, 두 벡터 \vec{c}, \vec{d} 를 각각 성분으로 나타내어라.

연습문제

Step 1

- 087 좌표평면 위의 세 점 $A(1, -2)$, $B(-3, 0)$, $C(1, 4)$ 에 대하여

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$$

를 만족시키는 점 P 의 좌표가 $P(x, y)$ 일 때, $x+y$ 의 값을 구하여라.

- 088 두 평면벡터 $\vec{a}=(x+1, -2)$, $\vec{b}=(-2, x-2)$ 가 서로 평행할 때, 모든 x 의 값의 합을 구하여라.

- 089 두 평면벡터 $\vec{a}=(k+1, 3)$, $\vec{b}=(-2, k-1)$ 에 대하여 $|\vec{a}|=5$ 일 때, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 를 구하여라.

- 090 두 평면벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$ 이고 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=2\sqrt{3}$ 일 때, $3\vec{a}+2\vec{b}$ 의 크기를 구하여라.

- 091 영벡터가 아닌 두 평면벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|, |2\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-3\vec{b}|$$

일 때, 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기를 구하여라.

- 092 평면벡터 $\vec{a}=(2, -1)$ 에 수직이고 크기가 $2\sqrt{5}$ 인 벡터를 $\vec{b}=(x, y)$ 라고 할 때, $x+y$ 의 값을 구하여라.

- 093 영벡터가 아닌 두 평면벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 $2|\vec{a}|=|\vec{b}|$ 이고 $\vec{a}-\vec{b}, 5\vec{a}+2\vec{b}$ 가 서로 수직일 때, 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기를 구하여라.

- 094 세 평면벡터 $\vec{a}=(x, -2)$, $\vec{b}=(4, 4-y)$, $\vec{c}=(2, 3)$ 에 대하여 \vec{a} 와 \vec{b} 가 서로 수직이고 \vec{b} 와 \vec{c} 가 서로 평행할 때, x^2+y^2 의 값을 구하여라.

Step 2

- 095** 좌표평면 위의 세 점 $O(0, 0)$, $A(3, 4)$, $B(4, 3)$ 과 음이 아닌 실수 m, n 에 대하여

$$\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}, m+n \leq 1$$

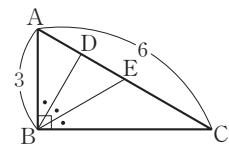
을 모두 만족시키는 점 P 가 나타내는 도형의 둘레의 길이를 구하여라.

- 096** 오른쪽 그림과 같이 $\angle B=90^\circ$, $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=6$ 인 직각삼각형 ABC에

서 $\angle B$ 를 삼등분하는 직선이 \overline{AC} 와 만나는 점을 각각 D, E라고 하자.

$$a = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}, b = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BE}, c = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$$

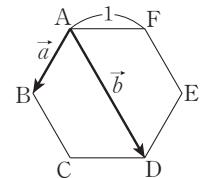
일 때, 실수 a, b, c 사이의 대소 관계를 구하여라.



- 097** 두 평면벡터 $\vec{a}=(1, 2)$, $\vec{b}=(-3, 1)$ 과 실수 t 에 대하여 $f(t)=(\vec{a}+t\vec{b}) \cdot (t\vec{a}-\vec{b})$ 일 때, $f(t)$ 의 최댓값을 구하여라.

- 098** 두 평면벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 $|\vec{a}+\vec{b}|=4$, $|\vec{a}-\vec{b}|=2$ 일 때, $|\vec{a}-2\vec{b}|^2+|2\vec{a}-\vec{b}|^2$ 의 값을 구하여라.

- 099** 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ 라고 하면 $|x\vec{a}+\vec{b}|$ 는 $x=p$ 일 때 최솟값 q 를 가진다. 실수 p, q 에 대하여 $p+q^2$ 의 값을 구하여라.

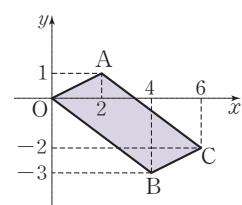


- 100** 세 평면벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 에 대하여 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{c}|=7$ 이고 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ 일 때, 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기를 구하여라.

- 101** 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 네 점

$$O(0, 0), A(2, 1), B(4, -3), C(6, -2)$$

를 꼭짓점으로 하는 평행사변형 AOBC의 넓이를 구하여라.



- 102** 두 평면벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{a}+\vec{b}|=4$ 이고 $\vec{a}+m\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}$ 가 서로 수직일 때, 실수 m 의 값을 구하여라.

4

평면벡터를 이용한 직선의 방정식

2. 평면벡터의 성분과 내적

01 방향벡터를 이용한 직선의 방정식

(1) 방향벡터

점 A를 지나고 영벡터가 아닌 벡터 \vec{u} 에 평행한 직선 l 위의 한 점을 P라 하고, 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 \vec{a}, \vec{p} 라고 하면

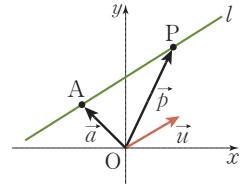
$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u} \quad (\text{단, } t \text{는 실수}) \quad \leftarrow \text{벡터방정식}$$

이때 벡터 \vec{u} 를 직선 l 의 방향벡터라고 한다.

(2) 방향벡터를 이용한 직선의 방정식

점 A(x_1, y_1)을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (u_1, u_2)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y - y_1}{u_2} \quad (\text{단, } u_1 u_2 \neq 0)$$



▶ 풍선자료 좌표평면에서 직선의 방정식을 구할 때 한 점의 좌표와 기울기를 필요했다. 여기서 기울기를 대체하는 것이 바로 방향벡터!

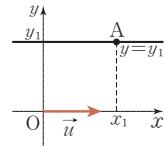
$$\rightarrow (\text{직선의 기울기}) = \frac{(y \text{의 증가량})}{(x \text{의 증가량})} = \frac{(방향벡터의 } y \text{ 성분)}{(방향벡터의 } x \text{ 성분)}$$

▶ 풍선자료 방향벡터의 성분 중 0이 있으면 어떻게 하느냐고? 직선의 방정식에서 분모에 들어갈 값이 0이니 난감하기도 하다.

이럴 때의 규칙! 분모가 0이 되면 등호의 연결 고리를 끊고 (분자)=0으로 정리하면 끝. 그럼 남은 건 어떻게 하느냐고? 간단하다. 그냥 버린다. 도형의 방정식은 등호가 있는 등식이니까 등호로 연결되지 못하면 바로 탈락!

(1) 점 A(x_1, y_1)을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (u_1, 0)$ 일 때, \vec{u} 는 x축에 평행하므로 직선의 방정식은

$$y = y_1$$

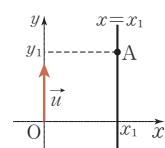


직선의 방정식은 $\frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y - y_1}{0} \rightarrow$ 등호 연결을 끊고 $\frac{x - x_1}{u_1}$ 은 버린다.

$$\rightarrow y - y_1 = 0 \text{에서 } y = y_1$$

(2) 점 A(x_1, y_1)을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (0, u_2)$ 일 때, \vec{u} 는 y축에 평행하므로 직선의 방정식은

$$x = x_1$$



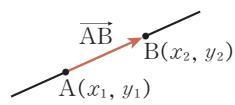
직선의 방정식은 $\frac{x - x_1}{0} = \frac{y - y_1}{u_2} \rightarrow$ 등호 연결을 끊고 $\frac{y - y_1}{u_2}$ 은 버린다.

$$\rightarrow x - x_1 = 0 \text{에서 } x = x_1$$

02 두 점을 지나는 직선의 방정식

두 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (\text{단, } x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2)$$



▶ 풍선자료 직선의 방정식을 구하려면 지나는 한 점의 좌표와 방향벡터가 필요하다. 그런데 지나는 점만 두 개 주어지고 방향벡터를 모르면? 찾으면 된다. 방향벡터란 직선에 평행한 벡터. 직선에 평행하기만 하면 어떤 벡터라도 방향벡터의 역할을 할 수 있다.

▶ 풍선자료 두 점을 이용해서 방향벡터를 만들었다. 그럼 지나는 점은? 두 점 중 아무거나 하나 골라서 쓰면 된다.

03 법선벡터를 이용한 직선의 방정식

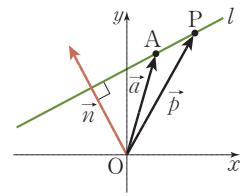
(1) 법선벡터 : 점 A를 지나고 영벡터가 아닌 벡터 \vec{n} 에 수직인 직선 l 위의 한 점을 P라 하고, 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 \vec{a}, \vec{p} 라고 하면

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0 \quad \leftarrow \text{벡터방정식}$$

이때 벡터 \vec{n} 을 직선 l 의 법선벡터라고 한다.

(2) 법선벡터를 이용한 직선의 방정식 : 점 A(x_1, y_1)을 지나고 법선벡터가 $\vec{n} = (a, b)$ 인 직선의 방정식은

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$



▶ 풍선자료 법선벡터를 이용한 직선의 방정식을 정리하면 우리에게 익숙한 일차방정식이다.

$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0 \Rightarrow ax + by - (ax_1 + by_1) = 0 \Rightarrow ax + by + c = 0$ (단, $-(ax_1 + by_1) = c$)
즉, 일차방정식 $ax + by + c = 0$ 은 법선벡터가 $\vec{n} = (a, b)$ 인 직선을 나타내는 것이라는 사실!

04 두 직선이 이루는 각

(1) 방향벡터가 각각 $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2)$ 인 두 직선 l, m 이 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)라고 하면

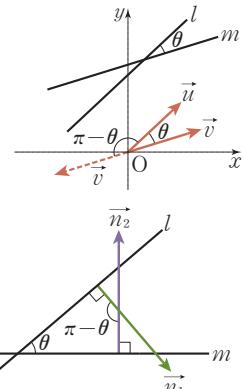
크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)라고 하면

$$\cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|u_1 v_1 + u_2 v_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

(2) 법선벡터가 각각 \vec{n}_1, \vec{n}_2 인 두 직선 l, m 이 이루는 각의 크기를

크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)라고 하면

$$\cos \theta = |\cos(\pi - \theta)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$



▶ 풍선자료 직선은 항상 자신과 평행한 방향벡터를 업고 다닌다. 두 직선이 이루는 각이 바로 두 직선의 방향벡터가 이루는 각!

또, 직선은 항상 자신과 수직인 법선벡터를 업고 다닌다. 두 직선이 이루는 각이 바로 두 직선의 법선벡터가 이루는 각이다.
두 직선이 이루는 각은 두 벡터가 이루는 각 이야기로 바꿔 생각하면 된다.

▶ 풍선자료 두 직선이 이루는 각의 크기는 일반적으로는 항상 예각을 다룬다. 내가 구한 것이 둔각 쪽이면 180° 에서 빼서 예각으로 바꾸면 된다. 그런데 $\cos \theta$ 의 값의 부호에 주목하면 빼는 작업 없이 바로 예각을 구한다는 사실! $\cos \theta$ 의 값이 양수이면 예각, 음수이면 둔각이다. 그래서 절댓값을 씌워서 구하면 항상 예각이 구해진다.

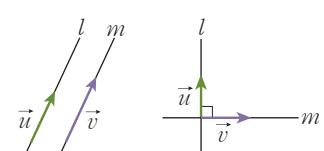
05 두 직선의 평행과 수직

두 직선 l, m 의 방향벡터가 각각 $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2)$ 일 때,

(1) 평행 조건 : $l // m \iff \vec{u} // \vec{v} \iff \vec{u} = k\vec{v}$

$$\iff u_1 = kv_1, u_2 = kv_2 \quad (\text{단, } k \text{는 } 0 \text{ 이 아닌 실수})$$

(2) 수직 조건 : $l \perp m \iff \vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$



▶ 풍선자료 두 직선이 평행하면 두 직선의 방향벡터도 평행하다. 두 직선이 수직이면 두 직선의 방향벡터도 수직이다.
계속되는 이야기지만 평행하면 실수배, 수직이면 내적이 0!

• 한 걸음 더

◎ 방향벡터를 이용한 직선의 방정식의 확인

점 A(x_1, y_1)을 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{u} = (u_1, u_2)$ 에 평행한 직선 l 위의 임의의 점을 P(x, y)라 하고, 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 \vec{a}, \vec{p} 라고 하자.

(1) $\overrightarrow{AP} \parallel \vec{u}$ 이므로 $\overrightarrow{AP} = t\vec{u}$ 를 만족시키는 실수 t 가 존재한다.

이때 벡터의 덧셈에 의하여 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$ 이므로

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u} \quad (\text{단, } t \text{는 실수}) \quad \dots \textcircled{1}$$

역으로, $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 벡터 \vec{p} 를 위치벡터로 하는 점 P는 t 의 값에 관계없이 직선 l 위에 있다.

따라서 $\textcircled{1}$ 은 점 A를 지나고 벡터 \vec{u} 에 평행한 직선 l 의 벡터방정식이다.

(2) $\textcircled{1}$ 에서 $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{u} = (u_1, u_2), \vec{p} = (x, y)$ 이므로

$$(x, y) = (x_1, y_1) + t(u_1, u_2) = (x_1 + tu_1, y_1 + tu_2)$$

이때 두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$\begin{cases} x = x_1 + tu_1 \\ y = y_1 + tu_2 \end{cases} \quad (\text{단, } t \text{는 실수}) \quad \dots \textcircled{2}$$

따라서 $\textcircled{2}$ 은 점 A를 지나고 벡터 \vec{u} 에 평행한 직선 l 을 매개변수 t 를 이용하여 나타낸 것이다.

(3) $u_1u_2 \neq 0$ 일 때, $\textcircled{2}$ 에서 $t = \frac{x - x_1}{u_1}, t = \frac{y - y_1}{u_2}$ 이므로 매개변수 t 를 소거하면

$$\frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y - y_1}{u_2} \quad (\text{단, } u_1u_2 \neq 0) \quad \dots \textcircled{3}$$

따라서 $\textcircled{3}$ 은 점 A(x_1, y_1)을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (u_1, u_2)$ 인 직선 l 의 방정식이다.

- 벡터의 평행 조건에 사용되는 t 는 0이 아닌 실수이지만 직선의 방정식에서 사용되는 t 는 0을 포함한 실수이다. 이는 점 P가 직선 l 위의 임의의 점이므로 점 A도 될 수 있어야 하기 때문이다.
- 일반적으로 직선의 방정식은 (1) 또는 (3)을 사용하고, 직선 위의 임의의 점의 좌표를 한 문자로 나타낼 때 (2)의 방법을 사용한다.

◎ 법선벡터를 이용한 직선의 방정식의 확인

점 A(x_1, y_1)을 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n} = (a, b)$ 에 수직인 직선 l 위의 임의의 점을 P(x, y)라 하고, 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 \vec{a}, \vec{p} 라고 하자.

(1) $\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$ 이므로 $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$ 이다. 즉,

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

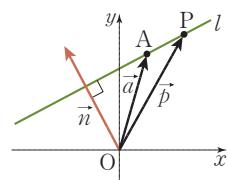
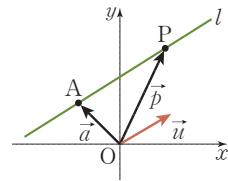
역으로, $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 벡터 \vec{p} 를 위치벡터로 하는 점 P는 직선 l 위에 있다.

따라서 $\textcircled{1}$ 은 점 A를 지나고 벡터 \vec{n} 에 수직인 직선 l 의 벡터방정식이다.

(2) $\textcircled{1}$ 에서 $\vec{p} - \vec{a} = (x - x_1, y - y_1)$ 이므로 $(x - x_1, y - y_1) \cdot (a, b) = 0$ 이다. 즉,

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

따라서 $\textcircled{2}$ 은 점 A를 지나고 벡터 \vec{n} 에 수직인 직선 l 의 방정식을 음함수로 나타낸 표현이다.



필수예제 066**방향벡터가 주어진 직선의 방정식**

다음 직선의 방정식을 구하여라.

- (1) 점 $(2, 3)$ 을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (2, 3)$ 인 직선
- (2) 점 $(-1, 4)$ 를 지나고 벡터 $\vec{u} = (3, -1)$ 에 평행한 직선
- (3) 점 $(3, -2)$ 를 지나고 벡터 $\vec{u} = (2, 0)$ 에 평행한 직선
- (4) 점 $(-1, 3)$ 을 지나고 벡터 $\vec{u} = (0, -3)$ 에 평행한 직선

▶ 풀이자료 일단 지나는 한 점과 방향벡터부터 확인할 것! 지나는 점과 방향벡터를 이용한 직선의 방정식 공식에 대입하면 끝. 특히 방향벡터의 한 성분이 0이면 좌표축에 평행한 직선이다.

| 풀이 | (1) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3}$ (2) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-1} \quad \therefore \frac{x+1}{3} = 4-y$
 (3) 방향벡터의 y 성분이 0이므로 직선의 방정식은 $y = -2$
 (4) 방향벡터의 x 성분이 0이므로 직선의 방정식은 $x = -1$

필수예제 067**두 점을 지나는 직선의 방정식**

다음 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

- (1) A(1, 3), B(-2, 6)
- (2) A(-2, 2), B(-1, -1)

▶ 풀이자료 방향벡터란 직선에 평행한 벡터! 직선에 평행하기만 하면 어떤 벡터라도 방향벡터가 될 수 있다.
 두 점 A, B를 지나는 직선의 방향벡터는 \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BA} , …로 무수히 많다. 일반적으로는 \overrightarrow{AB} 를 쓴다.

| 풀이 | (1) $\frac{x-1}{-2-1} = \frac{y-3}{6-3} \quad \therefore x-1 = 3-y$ (2) $\frac{x-(-2)}{-1-(-2)} = \frac{y-2}{-1-2} \quad \therefore x+2 = \frac{y-2}{-3}$

(1) 점 A(x_1, y_1)을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (u_1, u_2)$ 인 직선의 방정식은 $\frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2}$ (단, $u_1, u_2 \neq 0$)

▶ 대원칙 특히 $u_1=0, u_2 \neq 0$ 이면 직선의 방정식은 $x=x_1$, $u_1 \neq 0, u_2=0$ 이면 직선의 방정식은 $y=y_1$

(2) 두 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)를 지나는 직선의 방정식은 $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ (단, $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$)

정답과 풀이 15쪽 ▶

유제 078 점 $(1, 3)$ 을 지나고 다음 벡터 \vec{u} 에 평행한 직선의 방정식을 구하여라.

- (1) $\vec{u} = (-2, 5)$
- (2) $\vec{u} = (0, -2)$
- (3) $\vec{u} = (4, 0)$

유제 079 점 $(1, -2)$ 를 지나고 직선 $\frac{x+1}{2} = \frac{2-y}{3}$ 에 평행한 직선의 방정식을 구하여라.

유제 080 두 점 A(2, 3), B(3, 1)을 지나는 직선의 방정식이 $\frac{x-a}{2} = \frac{y-1}{b}$ 일 때, 상수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

필수예제 068**법선벡터가 주어진 직선의 방정식**

다음 직선의 방정식을 구하여라.

- (1) 점 (2, 3)을 지나고 법선벡터가 $\vec{n} = (2, 3)$ 인 직선
- (2) 점 (-1, 4)를 지나고 벡터 $\vec{n} = (3, -1)$ 에 수직인 직선

풀이 일단 지나는 한 점과 법선벡터가 확인되면 직선의 방정식 공식에 대입!

| 풀이 | (1) $2(x-2) + 3(y-3) = 0 \quad \therefore 2x + 3y - 13 = 0$
(2) $3(x+1) - (y-4) = 0 \quad \therefore 3x - y + 7 = 0$

| 참고 | 한 직선의 법선벡터와 방향벡터는 서로 수직이다. 직선의 기울기를 방향벡터와 법선벡터의 성분을 이용하여 나타내면 수직인 두 직선의 기울기의 곱이 -1임을 확인할 수 있다.

$$\rightarrow (\text{직선의 기울기}) = \frac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})} = \frac{\text{(방향벡터의 } y\text{ 성분)}}{\text{(방향벡터의 } x\text{ 성분)}} = -\frac{\text{(법선벡터의 } x\text{ 성분)}}{\text{(법선벡터의 } y\text{ 성분)}}$$

필수예제 069**일차방정식과 직선**

점 (1, 2)를 지나고 다음 조건을 만족시키는 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 직선 $3x - 2y + 4 = 0$ 에 평행한 직선 (2) 직선 $\frac{x+2}{5} = \frac{y-4}{3}$ 에 수직인 직선

풀이 일차방정식 $ax + by + c = 0$ 을 직선의 방정식이라고 부르는 이유는? 좌표평면 위에서 직선을 나타내기 때문이다.
특히 이 일차방정식은 법선벡터가 $\vec{n} = (a, b)$ 인 직선을 나타낸다.

| 풀이 | (1) 직선 $3x - 2y + 4 = 0$ 의 법선벡터가 $\vec{n} = (3, -2)$ 이므로 구하는 직선의 법선벡터도 $\vec{n} = (3, -2)$ 이다.
따라서 구하는 직선의 방정식은 $3(x-1) - 2(y-2) = 0 \quad \therefore 3x - 2y + 1 = 0$

(2) 직선 $\frac{x+2}{5} = \frac{y-4}{3}$ 의 방향벡터가 $\vec{u} = (5, 3)$ 이므로 구하는 직선의 법선벡터가 $\vec{n} = (5, 3)$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $5(x-1) + 3(y-2) = 0 \quad \therefore 5x + 3y - 11 = 0$

원칙

(1) 점 A(x_1, y_1)을 지나고 법선벡터가 $\vec{n} = (a, b)$ 인 직선의 방정식은 $a(x-x_1) + b(y-y_1) = 0$

(2) 일차방정식 $ax + by + c = 0$ 은 법선벡터가 $\vec{n} = (a, b)$ 인 직선을 나타낸다.

정답과 풀이 15쪽 ▶

유제 081 다음 점 A를 지나고 벡터 \vec{n} 에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

(1) A(1, 2), $\vec{n} = (-2, 5)$ (2) A(-3, 0), $\vec{n} = (1, 4)$ (3) A(-2, 3), $\vec{n} = (0, -2)$

유제 082 직선 $2x - y - 5 = 0$ 위의 점 (2, -1)을 지나면서 이 직선에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

유제 083 직선 $\frac{x+1}{2} = \frac{2-y}{3}$ 에 수직인 직선 l이 두 점 (3, 4), (a, 6)을 지날 때, a의 값을 구하여라.

필수예제 070**두 직선이 이루는 각(1)**

두 직선 $\frac{x+1}{3} = y - 2$, $\frac{x-3}{2} = 1 - y$ 가 이루는 각의 크기를 구하여라.

풀이 직선은 항상 자신과 평행한 방향벡터를 업고 다닌다. 따라서 두 직선이 이루는 각의 크기는 두 직선의 방향벡터가 이루는 각의 크기와 같다.

| 풀이 | 두 직선의 방향벡터는 각각 $\vec{u} = (3, 1)$, $\vec{v} = (2, -1)$ 이므로 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)라고 하면

$$\cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|3 \times 2 + 1 \times (-1)|}{\sqrt{3^2 + 1^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{10} \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

필수예제 071**두 직선이 이루는 각(2)**

두 직선 $2x - y + 3 = 0$, $4x + 2y - 3 = 0$ 이 이루는 각의 크기를 θ 라고 할 때, $\cos \theta$ 의 값을 구하여라.

$$\left(\text{단}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

풀이 직선은 항상 자신에게 수직인 법선벡터를 끌고 다닌다. 따라서 두 직선이 이루는 각의 크기는 두 직선의 법선벡터가 이루는 각의 크기와 같다.

| 풀이 | 두 직선의 법선벡터는 각각 $\vec{n}_1 = (2, -1)$, $\vec{n}_2 = (4, 2)$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|2 \times 4 + (-1) \times 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2} \sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}} = \frac{3}{5}$$

두 직선이 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)라고 하면 두 직선의 방향벡터가 이루는 각의 크기도 θ , 두 직선의 법

대원칙

선벡터가 이루는 각의 크기도 θ 임을 이용하여 $\cos \theta$ 와 θ 를 구한다.

$$(1) \text{방향벡터가 각각 } \vec{u}, \vec{v} \text{이면 } \cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \quad (2) \text{법선벡터가 각각 } \vec{n}_1, \vec{n}_2 \text{이면 } \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

정답과 풀이 15쪽 ▶

유제 084 다음 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ 라고 할 때, $\sin \theta$ 의 값을 구하여라. $\left(\text{단}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$

$$(1) \frac{x+1}{2} = -y, \frac{x}{4} = \frac{y-1}{3}$$

$$(2) \frac{x+3}{2} = y+3, x-2 = \frac{y+1}{3}$$

유제 085 다음 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하여라.

$$(1) x+2y-5=0, 3x+y+2=0$$

$$(2) \sqrt{3}x+y-2=0, x+\sqrt{3}y+\sqrt{3}=0$$

필수예제 072**두 직선의 평행과 수직**

다음 조건을 만족시키는 상수 a 의 값을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

$$(1) \text{ 두 직선 } \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{a}, -\frac{x}{2} = y + 3 \text{ 이 평행하다.}$$

(2) 두 직선 $2x - 3y + 5 = 0, ax + 4y - 3 = 0$ 이 수직이다.

【풀이】 두 직선이 평행 \rightarrow 방향벡터끼리 평행 또는 법선벡터끼리 평행 \rightarrow 실수배!

두 직선이 수직 \rightarrow 방향벡터끼리 수직 또는 법선벡터끼리 수직 \rightarrow 내적이 0!

| 풀이 | (1) 두 직선의 방향벡터는 각각 $\vec{u} = (3, a), \vec{v} = (-2, 1)$ 이므로 $\vec{u} = k\vec{v}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)

$$\text{즉, } (3, a) = k(-2, 1) \text{에서 } 3 = -2k, a = k \quad \therefore k = -\frac{3}{2}, a = -\frac{3}{2}$$

(2) 두 직선의 법선벡터는 각각 $\vec{n}_1 = (2, -3), \vec{n}_2 = (a, 4)$ 이므로 $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

$$\text{즉, } 2a + (-3) \times 4 = 0 \text{에서 } 2a = 12 \quad \therefore a = 6$$

필수예제 073**수선의 발**

점 A(-3, 2)에서 직선 $\frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{4}$ 에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, 점 H의 좌표를 구하여라.

【풀이】 수선의 발이란 수직인 직선의 발바닥. 수직으로 내린 직선이 주어진 직선과 만나는 점이다. 즉, $(\text{수선의 발}) = (\text{주어진 직선 위의 점}) + (\text{수선과 주어진 직선이 수직})$ 을 순서대로 적용하면 된다.

[1단계] 주어진 직선 위의 점 \rightarrow 이제껏 사용하지 않은 '매개변수로 나타낸 직선의 방정식'을 도입!

[2단계] 수선과 직선이 수직 \rightarrow 직선의 방향벡터와 \overrightarrow{AH} 의 내적이 0!

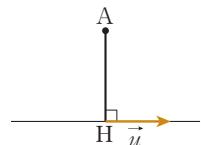
| 풀이 | 점 H는 주어진 직선 위의 점이므로 $\frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{4} = t$ (t 는 실수)로 놓으면

$$x = 2t - 2, y = 4t - 1 \quad \therefore H(2t-2, 4t-1)$$

$$\therefore \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = (2t+1, 4t-3)$$

직선의 방향벡터는 $\vec{u} = (2, 4)$ 이므로 $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$ 에서

$$2(2t+1) + 4(4t-3) = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{2} \quad \therefore H(-1, 1)$$



(1) 두 직선이 평행 또는 수직이면 두 직선의 방향벡터끼리 평행 또는 수직, 두 직선의 법선벡터끼리 평행 또는 수직 임을 이용한다. \rightarrow 벡터의 평행은 실수배, 벡터의 수직은 내적이 0임을 이용한다.

【원칙】

(2) 직선 밖의 한 점에서 직선에 내린 수선을 발을 구할 때에는 수선의 발의 x 좌표와 y 좌표를 한 문자로 나타내고 수직인 두 벡터의 내적이 0임을 이용하여 해결한다.

정답과 풀이 16쪽 ▶

유제 086 다음 두 직선이 평행할 때와 수직일 때의 상수 a 의 값을 각각 구하여라.

$$(1) \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3}, \frac{x+4}{a} = y + 3 \quad (2) 3x + ay - 1 = 0, 2x - y + 5 = 0$$

유제 087 점 A(-1, 4)에서 직선 $\frac{x-4}{2} = \frac{y-5}{3}$ 에 내린 수선의 발을 H(a, b)라고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

5

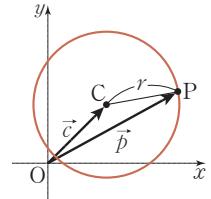
평면벡터를 이용한 원의 방정식

2. 평면벡터의 성분과 내적

01 평면벡터를 이용한 원의 방정식(1)

중심이 $C(x_1, y_1)$, 반지름의 길이가 r 인 원 위의 한 점을 $P(x, y)$ 라 하고 두 점 C, P 의 위치벡터를 각각 \vec{c}, \vec{p} 라고 할 때, 원의 방정식은

$$\begin{aligned} |\vec{p}-\vec{c}|=r &\iff (\vec{p}-\vec{c}) \cdot (\vec{p}-\vec{c})=r^2 && \leftarrow \text{벡터방정식} \\ &\iff (x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2 \end{aligned}$$

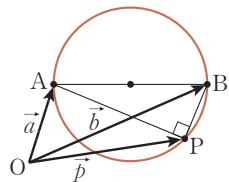


증명자료 원의 정의를 기억하는가? 평면 위의 한 점(원의 중심)에서의 거리(반지름)가 일정한 점의 집합이 원이다. 원의 벡터방정식은 이 정의를 벡터로 고스란히 바꾼 것일 뿐이다. 말로 된 정의를 식으로 바꿔 쓰면 끝.

02 평면벡터를 이용한 원의 방정식(2)

두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 를 지름의 양 끝점으로 하는 원 위의 한 점을 $P(x, y)$ 라 하고 세 점 A, B, P 의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}$ 라고 할 때, 원의 방정식은

$$\begin{aligned} (\vec{p}-\vec{a}) \cdot (\vec{p}-\vec{b})=0 && \leftarrow \text{벡터방정식} \\ &\iff (x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0 \end{aligned}$$



증명자료 잊을 만하면 튀어나오는 원의 성질! 여기서도 한참 잊고 지낸 원의 성질 중 반원에 대한 원주각의 크기가 90° 라는 걸 이용한다. 지름의 양 끝점 A, B 를 잇는 선분을 빗변으로 하는 직각삼각형의 나머지 한 꼭짓점 P 는 바로 원 위의 점!

• 한 걸음 더

◎ 원의 벡터방정식의 확인

(1) 중심이 점 C , 반지름의 길이가 r 인 원 위의 한 점을 P 라 하고 두 점 C, P 의 위치벡터를 각각 \vec{c}, \vec{p} 라고 하자.

벡터 \overrightarrow{CP} 의 크기는 r 로 일정하므로 $|\overrightarrow{CP}|=r \iff |\vec{p}-\vec{c}|=r \quad \dots \odot$

\odot 의 양변을 제곱하면 $|\vec{p}-\vec{c}|^2=r^2 \iff (\vec{p}-\vec{c}) \cdot (\vec{p}-\vec{c})=r^2 \quad \dots \odot$

역으로, \odot, \odot 을 만족시키는 벡터 \vec{p} 를 위치벡터로 하는 점 P 는 중심이 점 C , 반지름의 길이가 r 인 원 위에 있다.

(2) 두 점 A, B 를 지름의 양 끝점으로 하는 원 위의 한 점을 P 라 하고 세 점 A, B, P 의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}$ 라고 하자.

$\triangle PAB$ 는 $\angle APB=90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP} \iff \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}=0 \iff (\vec{p}-\vec{a}) \cdot (\vec{p}-\vec{b})=0 \quad \dots \odot$$

역으로, \odot 을 만족시키는 벡터 \vec{p} 를 위치벡터로 하는 점 P 는 두 점 A, B 를 지름의 양 끝점으로 하는 원 위에 있다.

필수예제 074

평면벡터를 이용한 원의 방정식

다음 조건을 만족시키는 원의 방정식을 벡터를 이용하여 구하여라.

- (1) 점 $(3, -2)$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원
- (2) 두 점 $(-2, 5), (4, 3)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원

증명 (1) 원 \rightarrow (중심 C~원 위의 점 P)=(반지름의 길이) $\rightarrow \overline{CP}=r \rightarrow |\vec{CP}|=r \rightarrow |\vec{p}-\vec{c}|=r$
(2) \overline{AB} 가 원의 지름 $\rightarrow \angle P=90^\circ$ 인 직각삼각형 PAB $\rightarrow \overline{AP} \perp \overline{BP} \rightarrow \overline{AP} \cdot \overline{BP}=0$

| 풀이 | (1) 원 위의 점을 $P(x, y)$, 중심을 $C(3, -2)$ 라 하고 두 점 P, C의 위치벡터를 각각

\vec{p}, \vec{c} 라고 하면

$$|\vec{p}-\vec{c}|=3$$

이때 $\vec{p}-\vec{c}=(x-3, y+2)$ 이므로

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}=3 \quad \therefore (x-3)^2+(y+2)^2=9$$

(2) 원 위의 점을 $P(x, y)$, 지름의 양 끝점을 A(-2, 5), B(4, 3)이라 하고 세 점 P,

A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{p}, \vec{a}, \vec{b}$ 라고 하자.

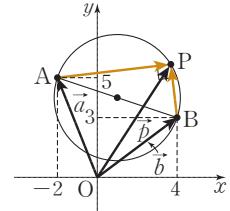
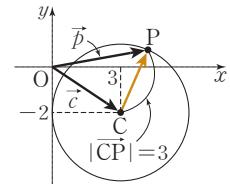
$\triangle PAB$ 는 $\angle APB=90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{AP} \perp \overline{BP} \iff \overline{AP} \cdot \overline{BP}=0 \iff (\vec{p}-\vec{a}) \cdot (\vec{p}-\vec{b})=0$$

이때 $\vec{p}-\vec{a}=(x+2, y-5), \vec{p}-\vec{b}=(x-4, y-3)$ 이므로

$$(x+2)(x-4)+(y-5)(y-3)=0$$

$$x^2-2x+y^2-8y+7=0 \quad \therefore (x-1)^2+(y-4)^2=10$$



원의 방정식을 벡터를 이용하여 구할 때에는

(1) 중심 C의 좌표와 반지름의 길이 r 가 주어졌을 때, 원 위의 점 P에 대하여 $|\vec{CP}|=r \iff |\vec{p}-\vec{c}|=r$ 를 이용 한다.

(2) 지름의 양 끝점 A, B가 주어졌을 때, 원 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP} \cdot \overline{BP}=0 \iff (\vec{p}-\vec{a}) \cdot (\vec{p}-\vec{b})=0$ 을 이용한다.

정답과 풀이 16쪽 ▶

유제 088 다음 조건을 만족시키는 원의 방정식을 벡터를 이용하여 구하여라.

- (1) 점 $(1, 2)$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원
- (2) 두 점 $(-3, 1), (5, -5)$ 를 지름의 양 끝점으로 하는 원

유제 089 좌표평면 위의 두 점 C(2, -1), P(x, y)의 위치벡터를 각각 \vec{c}, \vec{p} 라고 할 때, 다음을 만족시키는 점 P는 어떤 도형 위에 있는지 말하여라.

$$(1) |\vec{p}|=3$$

$$(2) |\vec{p}-\vec{c}|=1$$

유제 090 세 평면벡터 $\vec{a}=(-3, 5), \vec{b}=(-1, 1), \vec{p}=(x, y)$ 에 대하여 $(\vec{p}-\vec{a}) \cdot (\vec{p}-\vec{b})=0$ 이 성립 할 때, 위치벡터가 \vec{p} 인 점 P의 자취의 넓이를 구하여라.

Step 1

103 점 $(4, 3)$ 을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (-1, 2)$ 인 직선이 점 $(-2, a)$ 를 지날 때, a 의 값을 구하여라.

104 직선 $\frac{x+5}{3} = 2 - y$ 에 수직이고 점 $(2, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식이 $px + y + q = 0$ 일 때, 상수 p, q 의 합 $p+q$ 의 값을 구하여라.

105 두 점 $(2, -1), (-1, 5)$ 를 지나는 직선에 평행하고 점 $A(4, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식이 $\frac{x-a}{b} = \frac{y-1}{-2}$ 일 때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하여라.

106 직선 $\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{4}$ 이 x 축과 이루는 각의 크기가 α , y 축과 이루는 각의 크기가 β 일 때, $\cos\alpha + \cos\beta$ 의 값을 구하여라. (단, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$)

107 두 점 $(-1, 3), (2, 4)$ 를 지나는 직선 l 과 직선 $\frac{x+1}{a} = \frac{y-3}{2}$ 이 서로 수직일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

108 두 직선 $3x + y - 5 = 0, 2x - ay + 1 = 0$ 이 서로 수직일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

109 좌표평면 위의 두 점 $A(1, 2), P(x, y)$ 와 원점 O 에 대하여 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OP} = \vec{p}$ 라고 할 때, 다음을 만족시키는 점 P 는 어떤 도형 위에 있는지 말하여라.

$$(1) \vec{p} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$$

$$(2) \vec{a} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$$

110 두 점 $A(4, -3), B(2, -1)$ 에 대하여 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ 을 만족시키는 점 P 의 자취는 중심의 좌표가 (a, b) 이고 반지름의 길이가 r 인 원이다. 이때 abr 의 값을 구하여라.

Step 2

111 두 직선 $ax+y-3=0$, $x+3y+1=0$ 이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 일 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

112 두 직선 $l : \frac{x+2}{3} = 2-y$, $m : x-2y+3=0$ 이 이루는 각의 크기가 θ 일 때, $\sin \theta$ 의 값을 구하여라. $\left(\text{단}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$

113 두 직선 $l : x+2 = \frac{y-1}{2}$, $m : 6x+ay-3=0$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

(1) 수직일 때

(2) 평행할 때

114 두 점 $A(1, 0)$, $B(2, -2)$ 를 지나는 직선에 수직이고 점 $C(-1, 2)$ 를 지나는 직선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S 라고 할 때, $4S$ 의 값을 구하여라.

115 점 $A(0, -5)$ 에서 직선 $\frac{x+1}{2} = \frac{3-y}{3}$ 에 내린 수선의 발을 H 라고 할 때, 두 점 A, H 를 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

116 두 점 $C(3, -1)$, $P(x, y)$ 의 위치벡터를 각각 \vec{c}, \vec{p} 라고 하면
 $(\vec{p}-\vec{c}) \cdot (\vec{p}-\vec{c}) = 10$
 일 때, $|\vec{p}|$ 의 값이 최대가 되는 점 P 의 좌표를 구하여라.

117 점 $(-1, 2)$ 를 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(1, -3)$ 인 직선과 두 점 $(0, 3)$, $(2, -1)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원이 두 점 A, B 에서 만날 때, \overline{AB}^2 의 값을 구하여라.



II 평면벡터



- 1 벡터의 연산
- 2 평면벡터의 성분과 내적
- 3 평면 운동**



1 속도와 가속도	102
2 속도와 거리	104
• 연습문제	106

01 평면 위를 움직이는 점의 속도와 가속도

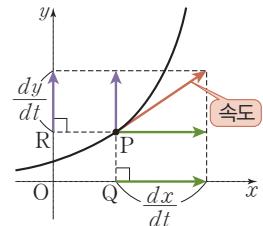
좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y) 가 $x=f(t), y=g(t)$ 일 때, 점 P의 시각 t에서의 속도, 속력, 가속도, 가속도의 크기는 다음과 같다.

$$(1) \text{ 속도} : \vec{v} = (v_x, v_y) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (f'(t), g'(t))$$

$$(2) \text{ 속력} : |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$$

$$(3) \text{ 가속도} : \vec{a} = (a_x, a_y) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right) = (f''(t), g''(t))$$

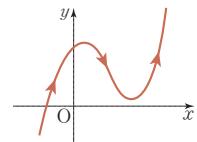
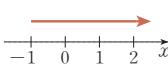
$$(4) \text{ 가속도의 크기} : |\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2} \right)^2} = \sqrt{[f''(t)]^2 + [g''(t)]^2}$$



【증명자료】 직선 운동이란? 직선 위를 위아래 또는 좌우로 움직이는 것.

평면 운동이란? 평면 위에서 여기저기로 움직이는 것.

수직선 2개를 x축, y축으로 해서 좌표평면을 만든 것과 같은 원리로 직선 운동에서 평면 운동으로 확장할 수 있다. 위아래로의 직선 운동과 좌우로의 직선 운동을 함께 고려하면 평면 운동을 설명할 수 있다.



운동이란 시간에 따라 위치가 변하는 것이다. 즉, 운동의 묘사는 위치의 묘사, 운동의 분석은 위치의 분석. 그래서 직선 위에서 위치를 나타내는 값은 x 하나뿐이지만 평면 위에서 위치를 나타내려면 (x, y) 로 나타내어야 한다.

직선 운동과 평면 운동의 차이점은 바로 이것이다. 점의 위치를 묘사하는 방법이 다르다는 것!

- 직선 운동에서의 위치의 묘사 : 시각 t에서의 위치가 $x=f(t)$
- 평면 운동에서의 위치의 묘사 : 시각 t에서의 위치가 $x=f(t), y=g(t)$

【증명자료】 평균속력과 순간속력은 다른 개념이다.

“서울에서 부산까지 자동차로 온 후 계산해 보았더니 평균속력이 시속 80 km이었다.”고 해도 출발점부터 도착점까지 줄곧 시속 80km를 유지한 건 아닐 것이다. 오르막에선 좀 천천히 가기도 했고 고속도로가 뻥뻥 뛸리면 좀 빨리 가기도 한 것이다. 순간속력은 어떤 특정한 순간의 속력이다. 경찰이 단속하면서 스피드 건으로 ‘택’ 재는 그게 바로 순간속력이다.

평소 우리가 이렇게 사용하는 순간속력이 여기서 다루는 속력이고, 순간속도가 여기서 다루는 속도이다. 이때 속력은 하나의 실수 값인 반면, 속도는 그 순간에 속력만큼의 크기로, 움직이는 방향까지 나타낸다.

직선 운동에서의 속도와 가속도는 이미 <미적분 I>에서 학습한 바 있다.

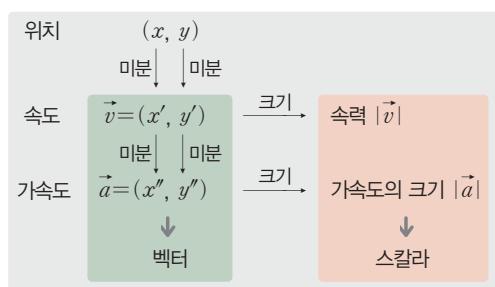
수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $x=f(t)$ 일 때

$$\rightarrow \text{속도 } v \text{는 } v = \frac{dx}{dt} = f'(t), \text{ 가속도 } a \text{는 } a = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t)$$

【증명자료】 평면 위의 한 점 P(x, y)는 벡터 하나를 결정한다. 바로 원점 을 시점으로 하고 점 P를 종점으로 하는 위치벡터 $\vec{p}=(x, y)$ 이다.

점 P의 시각 t에서의 속도 \vec{v} 역시 크기와 방향이 모두 존재하는 벡터! 속도를 나타내는 벡터 \vec{v} 의 x성분은 x축 방향으로의 속도, y성분은 y축 방향으로의 속도가 된다.

같은 방법으로, 점 P의 시각 t에서의 가속도 \vec{a} 도 벡터! x축 방향으로의 가속도를 x성분으로, y축 방향으로의 가속도를 y성분 으로!



필수예제 075**속도와 가속도**

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가 $x=t^2-3t$, $y=3t^2+t-1$ 일 때, 다음 물음에 답하여라.

- (1) 시각 t 에서의 속도 \vec{v} 와 속력 $|\vec{v}|$ 를 각각 구하여라.
- (2) 시각 t 에서의 가속도 \vec{a} 와 가속도의 크기 $|\vec{a}|$ 를 각각 구하여라.

▶ 풀이자료 위치를 미분하면 속도, 속도를 미분하면 가속도! 직선에서의 운동과 다를 게 없다.

다만, 성분이 두 종류이므로 각각 미분한다는 것. 속도와 가속도만 구하면 각각의 크기는 쉽게 구할 수 있다.

| 풀이 | (1) $\frac{dx}{dt}=2t-3$, $\frac{dy}{dt}=6t+1$ 이므로 속도 \vec{v} 는 $\vec{v}=(2t-3, 6t+1)$

따라서 속력 $|\vec{v}|$ 는 $|\vec{v}|=\sqrt{(2t-3)^2+(6t+1)^2}=\sqrt{40t^2+10}$

(2) $\frac{d^2x}{dt^2}=2$, $\frac{d^2y}{dt^2}=6$ 이므로 가속도 \vec{a} 는 $\vec{a}=(2, 6)$ $\therefore |\vec{a}|=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$

필수예제 076**속도와 가속도의 응용**

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가 $x=2t$, $y=6t-2t^2$ 이다. 점 P의 속력이 최소가 될 때의 시각과 그때의 속력의 최솟값을 구하여라.

▶ 풀이자료 위치 → 미분해서 속도 → 속도의 크기, 즉 속력의 순서로 구한다. 이때 속력은 시각 t 에 대한 함수! 주어진 t 의 값의 범위에서 함수의 종류에 따라 최댓값 또는 최솟값을 가질 때를 찾는다.

| 풀이 | $\frac{dx}{dt}=2$, $\frac{dy}{dt}=6-4t$ 이므로 속도 \vec{v} 는 $\vec{v}=(2, -4t+6)$

즉, 속력 $|\vec{v}|$ 는 $|\vec{v}|=\sqrt{2^2+(-4t+6)^2}=\sqrt{4(2t-3)^2+4}$

이때 $4(2t-3)^2 \geq 0$ 에서 $4(2t-3)^2+4 \geq 4$ 이므로 속력이 최소가 되는 시각은 $t=\frac{3}{2}$ 이고 그때의 속력의 최솟값은 $\sqrt{4}=2$ 이다.

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가 $x=f(t)$, $y=g(t)$ 일 때,

▶ 원칙

(1) 속도 : $\vec{v}=(f'(t), g'(t))$

(2) 속력 : $|\vec{v}|=\sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}$

(3) 가속도 : $\vec{a}=(f''(t), g''(t))$

(4) 가속도의 크기 : $|\vec{a}|=\sqrt{(f''(t))^2+(g''(t))^2}$

정답과 풀이 16쪽 ▶

유제 091 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가 $x=2 \cos 3t$, $y=2 \sin 3t$ 일 때, 다음 물음에 답하여라.

- (1) 시각 t 에서의 속도 \vec{v} 와 속력 $|\vec{v}|$ 를 각각 구하여라.
- (2) 시각 t 에서의 가속도 \vec{a} 와 가속도의 크기 $|\vec{a}|$ 를 각각 구하여라.

유제 092 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가 $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$ 일 때, 점 P의 속력이 최대가 되는 시각과 그때의 속력의 최댓값을 구하여라. (단, $0 \leq t \leq 2\pi$)

01 평면 위를 움직이는 점의 이동거리

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y) 가 $x=f(t), y=g(t)$ 일 때, 시각 $t=a$ 에서 $t=b$ 까지 점 P가 움직인 거리를 s 라고 하면

$$s = \int_a^b |\vec{v}| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt$$

▶ 풍선자료

직선 운동에서의 점의 이동거리는 이미 <마적분 I>에서 학습했다. 점의 이동거리는 속력의 정적분!

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$ 일 때, $t=a$ 에서 $t=b$ 까지 점 P의 이동거리 $\rightarrow \int_a^b |v(t)| dt$
그럼 평면 위를 움직이는 점의 이동거리도 같을까? 그렇다. 평면 운동에서도 점의 이동거리는 속력의 정적분!

02 곡선의 길이

닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 의 길이를 l 이라고 하면 $l = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$

▶ 풍선자료

닫힌 구간 $[a, b]$ 에서의 곡선 $x=f(t), y=g(t)$ 의 길이는 바로 위에 있는 점의 이동거리! 이처럼 평면에서의 위치가 시각 t에 대한 함수로 각각 주어지면, 즉 매개변수 t를 이용해서 주어지면 이동거리를 얼마든지 구할 수 있다.
그런데! 매개변수 t가 없이 주어지면 어떻게 할까? 다시 말해, 곡선이 $y=f(x)$ 꼴로 주어질 때 말이다.
이건 사실 알고 보면 엄청 간단하다. t를 도입하면 된다. 어떻게? $x=t, y=f(t)$ 라고 만드는 것!

$$y=f(x) \Rightarrow x=t, y=f(t) \Rightarrow l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

▶ 한 걸음 더

◎ 평면 위를 움직이는 점의 이동거리의 확인

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y) 가

$$x=f(t), y=g(t)$$

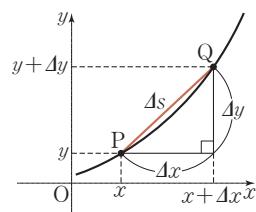
일 때, 시각 a 에서 t ($a \leq t \leq b$)까지 움직인 거리를 $s(t)$ 라고 하자.

오른쪽 그림과 같이 시각이 t에서 $t + \Delta t$ 까지 변할 때, 점 P가 점 Q까지 움직인다고 하면 시각의 변화량 Δt 가 충분히 작으면 움직인 거리의 변화량 Δs 는 \overline{PQ} 의 길이 $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ 에 가까워진다.

$$\begin{aligned} \therefore \frac{ds}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = |\vec{v}| \end{aligned}$$

따라서 $s(t)$ 는 $|\vec{v}|$ 의 한 부정적분이므로 시각 $t=a$ 에서 $t=b$ 까지 점 P가 움직인 거리 s 는

$$s = \int_a^b |\vec{v}| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad \leftarrow (\text{이동거리}) = (\text{속력의 정적분})$$



필수예제 077**평면 위를 움직이는 점의 이동거리**

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y) 가 $x=2t^2-1$, $y=\frac{3}{2}t^2-1$ 일 때, 시각 $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

증명자료 점의 위치 \rightarrow (위치의 미분) = (속도) \rightarrow | 속도 | = (속력) \rightarrow (이동거리) = $\int (\text{속력}) dt$

| 풀이 | $\frac{dx}{dt}=4t$, $\frac{dy}{dt}=3t$ 이므로 $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는
 $\int_1^3 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_1^3 \sqrt{(4t)^2 + (3t)^2} dt = \int_1^3 5t dt = \left[\frac{5}{2}t^2\right]_1^3 = 20$

필수예제 078**곡선의 길이**

$-1 \leq x \leq 1$ 일 때, 곡선 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 의 길이를 구하여라.

증명자료 곡선 $y=f(x) \iff x=t$, $y=f(t)$ 로 바꿔 생각하면 속도는 $\vec{v}=(1, f'(t))$ 이다.
 \rightarrow 속력 $|\vec{v}| = \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$ 을 x의 구간에서 정적분하면 곡선의 길이이다.

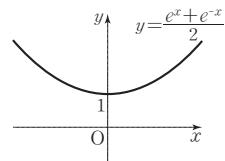
| 풀이 | $y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 이므로 구하는 곡선의 길이는
 $\int_{-1}^1 \sqrt{1^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]_{-1}^1 = e - \frac{1}{e}$

| 참고 | 곡선 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 은 현수선이란 유명한 곡선.

줄의 양쪽 끝을 고정하고 중간을 자유로이 늘어뜨렸을 때 발생하는 곡선.

이 곡선을 응용해서 만든 다리가 바로 현수교.

샌프란시스코의 상징인 금문교나 우리나라의 남해 대교, 영종 대교 등.

**대원칙**

(1) 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y) 가 $x=f(t)$, $y=g(t)$ 일 때, 시각 $t=a$ 에서 $t=b$ 까지

점 P가 움직인 거리 $\rightarrow \int_a^b |\vec{v}| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt$

(2) 닫힌 구간에서의 곡선 $y=f(x)$ 의 길이는 곡선 $x=t$, $y=f(t)$ 의 길이로 바꿔 생각하면 쉽다.

\rightarrow 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 의 길이는 $\int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$ 로 구한다.

정답과 풀이 17쪽 ►

유제 093 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y) 가 $x=3 \sin t + 4 \cos t$,
 $y=4 \sin t - 3 \cos t$ 일 때, 시각 $t=0$ 에서 $t=\pi$ 까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

유제 094 $1 \leq x \leq 3$ 일 때, 곡선 $y = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{x}$ 의 길이를 구하여라.

Step 1

118 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가 $x=\sqrt{t}$, $y=2\ln t$ 일 때, 점 P의 시각 $t=4$ 에서의 속력을 구하여라.

119 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가 $x=2t+1$, $y=\frac{1}{2}t^2-\ln t$ 일 때, 점 P의 속력이 최소가 되는 순간의 속도를 구하여라. (단, $t > 0$)

120 $1 \leq t \leq e$ 일 때, 곡선 $x=\ln t$, $y=\frac{t}{2} + \frac{1}{2t}$ 의 길이를 구하여라.

121 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가 $x=\frac{1}{2}t^2-t$, $y=\frac{4}{3}t\sqrt{t}$ 일 때, 시각 $t=1$ 에서 x 좌표가 다시 0이 될 때까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

Step 2

122 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가 $x=e^t \cos t$, $y=e^t \sin t$

이다. 점 P의 속력이 $\sqrt{2e}$ 일 때의 시각이 t_1 , 가속도의 크기가 $2e\sqrt{e}$ 일 때의 시각이 t_2 일 때, t_1+t_2 의 값을 구하여라.

123 물로켓과 같이 지면에 비스듬하게 공중으로 쏘아 올린 물체는 포물선 운동을 한다. 지면과 60° 의 각을 이루는 방향으로 초속 20 m의 속도로 물로켓을 쏘아 올리면 쏜 지 t 초 후 물로켓이 수평으로 날아간 거리 x m, 높이 y m는 각각

$$x=10t, y=10\sqrt{3}t - 10t^2$$

이다. 물로켓이 땅에 떨어질 때의 속력을 구하여라.

124 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가 $x=4\cos^3 t$, $y=4\sin^3 t$ 일 때, 시각 $t=0$ 에서 속력이 6이 될 때까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라. (단, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$)

125 $1 \leq x \leq a$ 일 때, 곡선 $y=\frac{1}{8}x^2 - \ln x$ 의 길이가 $1+\ln 3$ 이 되도록 하는 유리수 a 의 값을 구하여라. (단, $a > 1$)



III 공간도형과 공간벡터



1 공간도형

- 2 공간좌표
- 3 공간벡터

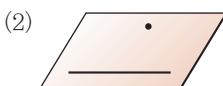


1 직선, 평면의 위치 관계	108
2 직선과 평면의 평행과 수직	111
3 삼수선의 정리	115
4 정사영	119
• 연습문제	123

01 평면의 결정조건

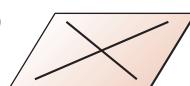
(1) 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점

(3) 한 점에서 만나는 두 직선



(2) 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점

(4) 평행한 두 직선

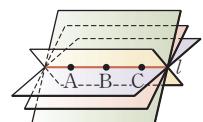


【 풍선자막】 두 점이 주어지면 직선은 하나로 결정된다. 직선을 결정한 것처럼 하나의 평면을 결정하는 조건이 바로 평면의 결정조건이다. 그런데 평면의 결정조건을 잘 보면 직선 때와는 달리 '그냥 세 점'이라던가 '그냥 두 직선'이라고 하지 않는다. 왜냐?

(1) 그냥 세 점이 아닌 이유

하나의 평면으로 결정되지 않는 경우가 있기 때문이다.

오른쪽 그림과 같이 한 직선 위의 세 점일 때, 이 세 점을 지나는 평면은 무수히 많다.

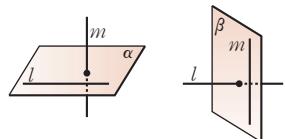


(2) 그냥 두 직선이 아닌 이유

평면이 만들어지지 않는 경우가 있기 때문이다.

오른쪽 그림과 같은 두 직선이 주어지는 경우가 그런 경우이다.

한 직선을 포함하는 평면을 그려 놓고 보면 다른 직선이 그 평면을 끊어 버리니까.



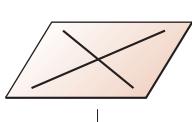
02 두 직선의 위치 관계

(1) **꼬인 위치** : 공간에서 서로 만나지도 않고 평행하지도 않은 두 직선의 위치 관계(2) **두 직선의 위치 관계**

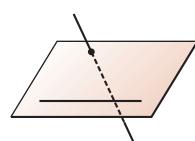
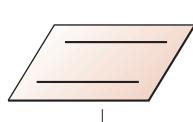
① 한 점에서 만난다.

② 평행하다.

③ 꼬인 위치에 있다.



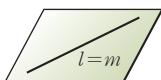
한 평면 위에 있다.



한 평면 위에 있지 않다.

【 풍선자막】 중학교 1학년 때 평면에서의 두 직선의 위치 관계를 배웠다. 너무 오래 전이어서 가물가물하다고? 다시 한 번 짚어 보자면

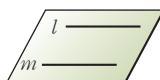
① 일치한다.



② 한 점에서 만난다.



③ 평행하다.



의 세 종류. 평면에서의 위치 관계 중 ①, ②는 만나는 경우이고 ③은 만나지 않는 경우. 이 중에서 ①은 공간에서의 위치 관계로 보지 않는다. 대신 이것 말고 특이한 또 하나가 있다. 두 직선이 만나지도 않고 평행하지도 않은 이른바 꼬인 위치.

만나지도 않고 평행하지도 않은 두 직선은 '꼬인 위치에 있다.'고 한다.

【 풍선자막】 평면의 결정조건 중 그냥 두 직선으로는 평면이 만들어지지 않을 때가 있다고 했다. 그게 바로 꼬인 위치의 두 직선이 주어질 때이다.

즉, 주어진 두 직선이 → 만날 거면 한 점에서 만나야 한 평면을 결정한다. → 위치 관계 ①
안 만날 거면 평행해야 한 평면을 결정한다. → 위치 관계 ②

03 직선과 평면의 위치 관계

(1) 교점 : 공간에서 직선과 평면이 만나는 점

(2) 직선과 평면의 위치 관계

① 포함된다.



무수히 많은 점을 공유한다.

② 한 점에서 만난다.



한 점을 공유한다.

③ 평행하다.



공유하는 점이 없다.

04 두 평면의 위치 관계

(1) 교선 : 공간에서 만나는 두 평면이 공유하는 직선

(2) 두 평면의 위치 관계 : ① 만난다.



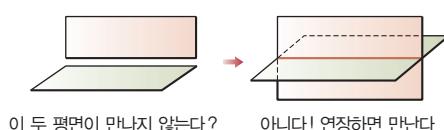
한 직선을 공유한다.

② 평행하다.



공유하는 점이 없다.

증명자료 혹시 오른쪽 첫 번째 그림처럼 평행하지도 만난지도 않는 서로 다른 두 평면이 있다고 생각하는 벗들에게, 평면이란 그런 것이 아니라. 저대로는 사각형일 뿐. 평면이란 시방으로 무한히 뻗어 있는 면. 결국 평면을 연장하여 그리면 두 평면은 만난다. 평면과 사각형의 차이점은 직선과 선분의 차이점과 유사하다.



이 두 평면이 만나지 않는다? 아니다! 연장하면 만난다.

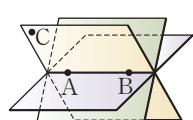
증명자료 직선의 결정조건은 공간으로 확장되면 교선 때문에 원래 우리가 알고 있던 조건 외에 하나가 더 생긴다.

① 서로 다른 두 점은 단 하나의 직선을 결정한다. ② 서로 만나는 두 평면은 단 하나의 직선을 결정한다.

한 걸음 더

평면의 결정조건의 확인

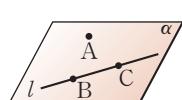
공간에서 두 점 A, B를 지나는 직선 AB를 포함하는 평면은 무수히 많지만 직선 AB 위에 있지 않은 점 C를 지나는 평면은 오직 하나뿐이다.



따라서 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점은 하나의 평면을 결정한다.

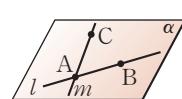
이로부터 나머지 세 조건 (2), (3), (4)도 이끌어낼 수 있다.

(2) 오른쪽 그림과 같은 세 점 A, B, C는 (1)에 의해 한 평면 α 를 결정하고 직선 l 이 이 평면 위에 있다.



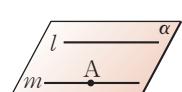
→ 한 직선 l 과 그 위에 있지 않은 한 점 A는 한 평면 α 를 결정한다.

(3) 오른쪽 그림과 같은 세 점 A, B, C는 (1)에 의해 한 평면 α 를 결정하고 직선 l , m 은 이 평면 위에 있다.



→ 한 점 A에서 만나는 두 직선 l , m 은 한 평면 α 를 결정한다.

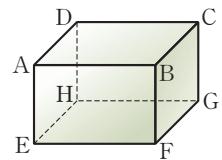
(4) 오른쪽 그림과 같은 직선 l 과 점 A는 (2)에 의해 한 평면 α 를 결정하고 직선 l , m 은 이 평면 위에 있다. → 평행한 두 직선 l , m 은 한 평면 α 를 결정한다.



필수예제 079 평면의 결정조건

오른쪽 그림과 같은 직육면체에 대하여 평면이 결정되는 것을 모두 말하여라.

- (1) 세 점 A, B, E
- (2) 직선 AB와 점 F
- (3) 직선 AB와 직선 BC
- (4) 직선 AB와 직선 CG
- (5) 직선 AB와 직선 GH
- (6) 직선 AG와 직선 BF



정답자료 평면의 결정조건에서 제한된 조건에 주의하여 판단해야 한다.

- (1) 그냥 세 점 No! → 한 직선 위에 있지 않아야 하고, 서로 다른 세 점이어야 한다.
- (2) 그냥 한 직선과 한 점 No! → 한 점은 직선 밖의 점이어야 한다.
- (3) 그냥 두 직선 No! → 평행한 두 직선이거나 한 점에서 만나는 두 직선이어야 한다.

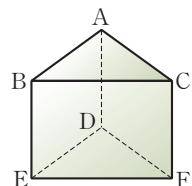
| 풀이 | (1), (2)는 평면 AEFB, (3)은 평면 ABCD, (5)는 평면 ABGH를 결정한다.

- (4) 만나지도 않고 평행하지도 않은 두 직선이므로 한 평면을 결정할 수 없다.
 - (6) 만나지도 않고 평행하지도 않은 두 직선이므로 한 평면을 결정할 수 없다.
- 따라서 평면이 결정되는 것은 (1), (2), (3), (5)이다.

필수예제 080 입체도형에서의 위치 관계

오른쪽 그림과 같은 삼각기둥에서 각 모서리를 연장한 직선 및 각 면을 포함하는 평면에 대하여 다음을 구하여라.

- | | |
|-----------------------|-------------------------|
| (1) 직선 AB와 평행한 직선 | (2) 직선 AB와 꼬인 위치에 있는 직선 |
| (3) 평면 ABC와 평행한 직선 | (4) 직선 AB와 평행한 평면 |
| (5) 직선 AB를 교선으로 하는 평면 | (6) 평면 ABC와 평행한 평면 |



정답자료 모서리 AB는 그림에 그려진 만큼의 선분이지만 직선 AB는 모서리 AB를 한없이 늘인 것. 평면 ABC 역시 삼각형 ABC를 사방으로 한없이 늘인 평면.

| 풀이 | (1) 직선 DE

(2) 직선 CF, 직선 EF, 직선 DF

(3) 직선 DE, 직선 EF, 직선 DF

(4) 평면 DEF

(5) 평면 ABC, 평면 ABED

(6) 평면 DEF

평면의 결정조건에서 제한된 조건을 만족하는지 확인하는 것이 중요하다.

대원칙

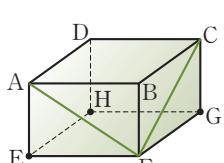
① 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점

② 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점

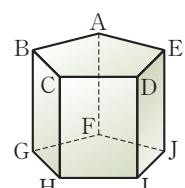
③ 한 점에서 만나는 두 직선

④ 평행한 두 직선

유제 095 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 세 점 E, G, H와 두 직선 AF, CF로 결정되는 서로 다른 평면의 개수를 구하여라.



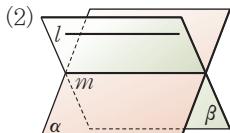
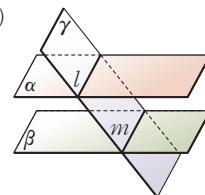
유제 096 오른쪽 그림과 같은 오각기둥에서 각 모서리를 연장한 직선 및 각 면을 포함하는 평면에 대하여 직선 AB와 꼬인 위치에 있는 직선의 개수를 a , 평행한 평면의 개수를 b 라고 하자. 또, 평면 ABCDE와 만나는 평면의 개수를 c 라고 할 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.



01 직선과 직선의 평행 관계

(1) 평행한 두 평면 α, β 와 다른 평면 γ 가 만나서 생기는 교선이 l, m 일 때, $l \parallel m$

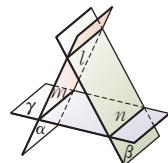
(2) 직선 l 과 평면 α 가 평행하고, 직선 l 을 포함하는 평면 β 와 평면 α 의 교선이 m 일 때, $l \parallel m$



증명자료 (1) 두 평면 α, β 가 안 만나므로 각 평면 위의 두 직선 l, m 도 안 만난다. 그런데 두 직선 l, m 은 한 평면 γ 위에 있다. 한 평면 위에 있는데 안 만나는 두 직선은 어떻게 되는가? 당연히 평행하다.

(2) 직선 l 은 평면 α 와 안 만나므로 평면 α 위의 직선 m 과도 안 만난다. 그런데 두 직선 l, m 은 한 평면 β 위에 있다. 한 평면 위에 있는데 안 만나는 두 직선은 역시나 평행!

증명자료 두 평면 α, β 의 교선 l 에 평행한 평면 γ 와 두 평면 α, β 의 교선이 각각 m, n 일 때, $m \parallel n$ 이 성립 한다. 위의 내용 (2)로부터 두 직선 l, m 이 평행하고 또 두 직선 l, n 이 평행! 자연스럽게 두 직선 m, n 도 서로 평행하다.



02 직선과 평면의 평행 관계

두 직선 l, m 이 평행할 때, 직선 l 을 포함하고 직선 m 을 포함하지 않는 평면 α 에 대하여 $m \parallel \alpha$

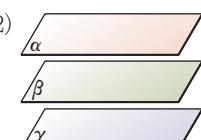
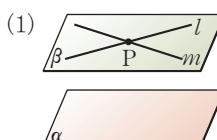


증명자료 $l \parallel m$ 이므로 두 직선 l, m 을 포함하는 평면 β 가 하나 결정된다. 그러므로 직선 m 위의 점 중 혹시 하나라도 평면 α 위에 있다면 그 점은 직선 l 위의 점이다. 그런데 l, m 이 평행하다는 조건에 모순이므로 직선 m 위의 점은 절대 평면 α 위에 있을 수 없다. 이런 직선 m 과 평면 α 의 위치 관계는 바로 평행!

03 평면과 평면의 평행 관계

(1) 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P 에서 만나는 두 직선 l, m 이 모두 평면 α 에 평행하면 두 직선 l, m 을 포함하는 평면 β 에 대하여 $\alpha \parallel \beta$

(2) 서로 다른 세 평면 α, β, γ 에 대하여 $\alpha \parallel \beta, \beta \parallel \gamma$ 이면 $\alpha \parallel \gamma$



증명자료 둘 다 결론을 부정하면 얘기가 이상해진다. 귀류법을 이용해서 어렵지 않게 확인 가능!

(1) 두 평면 α, β 가 평행하지 않고 가정하면 두 평면의 교선 n 이 존재한다. 이때 교선 n 은 평면 α 에 포함되고 $l \parallel \alpha, m \parallel \alpha$ 이므로 직선 n 은 두 직선 l, m 과 만나지 않는다. 그런데 세 직선 l, m, n 은 모두 평면 β 에 포함되므로 01의 (2)로부터 $l \parallel n, m \parallel n \therefore l \parallel m$

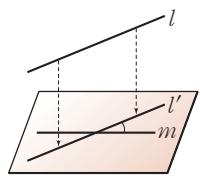
이는 두 직선 l, m 이 한 점에서 만난다는 가정에 모순이므로 α, β 는 평행할 수밖에.

(2) 두 평면 α, γ 가 평행하지 않고 가정하면 교선 l 이 존재한다. 그런데 평면 β 위에 있지 않은 직선 l 위의 점을 지나면서 β 에 평행한 2개의 평면 α, γ 가 존재하는 것은 모순이다. α, γ 가 평행하지 않고는 도리가 없다.

04 꼬인 위치에 있는 두 직선이 이루는 각

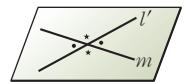
(1) 꼬인 위치에 있는 두 직선이 이루는 각

두 직선 l, m 이 꼬인 위치에 있을 때, 직선 l 을 직선 m 과 한 점에서 만나도록 평행이동한 직선 l' 과 직선 m 이 이루는 각 중 크지 않은 것을 두 직선 l, m 이 이루는 각이라고 한다.



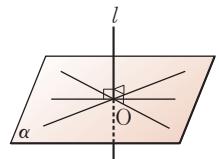
(2) 수직인 두 직선 : 두 직선 l, m 이 이루는 각의 크기가 90° 일 때, 두 직선 l, m 은 서로 수직이라 하고 기호 $l \perp m$ 으로 나타낸다.

증명자료 공간에서 만나는 두 직선은 한 평면을 결정하므로 그 평면 위에서 두 직선이 이루는 각을 정할 수 있다. 하지만 두 직선이 꼬인 위치에 있으면 이 두 직선으로는 평면을 결정할 수가 없어서 이루는 각이 고 뭐고 따지기가 어렵다. 그래서 직선 하나를 평행이동해서 한 평면을 결정하게 만든 다음, 두 직선이 이루는 각을 따진다. 우리는 앞으로 둘 중 크지 않은 쪽의 각을 두 직선이 이루는 각이라고 하기로 약속하자.

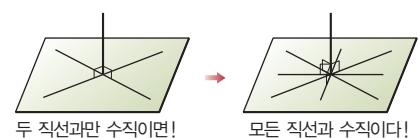


05 직선과 평면의 수직 관계

직선 l 이 평면 α 와 한 점 O 에서 만나고 점 O 를 지나는 평면 α 위의 모든 직선과 수직일 때, 직선 l 과 평면 α 는 수직이라 하고, 기호 $l \perp \alpha$ 로 나타낸다.
이때 직선 l 을 평면 α 의 수선, 점 O 를 수선의 발이라고 한다.



증명자료 직선이 평면과 수직임을 보이려면 평면 위의 모든 직선과 수직임을 보여야 하느냐고? 놀라지 마시라. 평면 위의 서로 다른 두 직선과만 수직이면 직선이 평면과 수직이다. 이것이 바로 '직 \perp 평의 정리'.
직 \perp 평의 정리가 응용되는 대표적인 상황은 꼬인 위치에 있는 두 직선이 수직임을 보일 때.



• 한 걸음 더

◎ [직 \perp 평의 정리] 확인

점 O 를 지나고 평면 α 위에 있으면서 두 직선 m, n 과 서로 다른 임의의 한 직선을 c 라 하고, 평면 α 위에서 세 직선 m, n, c 와 점 O 이외의 점에서 만나는 직선을 그어 그 교점을 차례로 A, B, C 라고 하자.

이때 직선 l 위에 $\overline{OP} = \overline{OP'}$ 인 서로 다른 두 점 P, P' 을 잡으면 두 직선 m, n 은 모두 $\overline{PP'}$ 의 수직이등분선이므로

$$\overline{AP} = \overline{AP'}, \overline{BP} = \overline{BP'}$$

이때 $\triangle PAB \cong \triangle P'AB$ 이므로 $\leftarrow \overline{AP} = \overline{AP'}, \overline{BP} = \overline{BP'}, \overline{AB}$ 는 공통

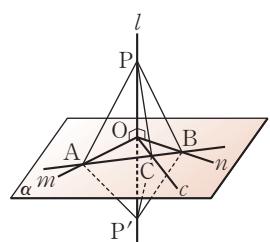
$$\angle PAB = \angle P'AB$$

또, $\triangle PAC \cong \triangle P'AC$ 이므로 $\leftarrow \overline{AP} = \overline{AP'}, \angle PAC = \angle P'AC, \overline{AC}$ 는 공통

$$\overline{PC} = \overline{P'C}$$

따라서 $\triangle CPP'$ 은 이등변삼각형이고, 점 O 는 $\overline{PP'}$ 의 중점이므로 $\overline{PP'} \perp \overline{OC} \rightarrow l \perp c$

즉, 직선 l 은 점 O 를 지나는 평면 α 위의 임의의 직선과 수직이므로 $l \perp \alpha$



필수예제 081

직선과 평면의 평행과 수직

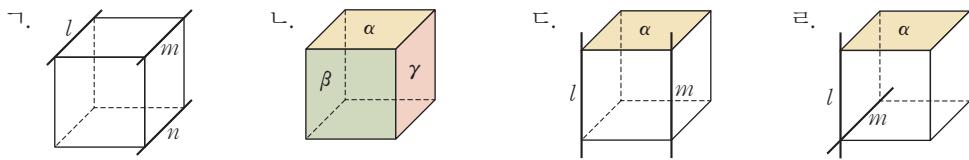
서로 다른 세 직선 l, m, n 과 서로 다른 세 평면 α, β, γ 에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 골라라.

보기

- ㄱ. $l \parallel m$ 이고 $l \parallel n$ 이면 $m \parallel n$ 이다.
 ㄴ. $\alpha \perp \beta$ 이고 $\beta \perp \gamma$ 이면 $\alpha \parallel \gamma$ 이다.
 ㄷ. $l \perp \alpha$ 이고 $m \perp \alpha$ 이면 $l \parallel m$ 이다.
 ㄹ. $l \perp \alpha$ 이고 $l \perp m$ 이면 $m \perp \alpha$ 이다.

정답자료 여러 개의 직선끼리, 평면끼리, 직선과 평면끼리의 평행과 수직 관계를 상상만으로 확인하라고? 어렵다. 이때 모든 모서리끼리, 평면끼리, 직선과 평면끼리 수직 또는 평행으로만 이루어진 도형을 도입! 바로 정육면체를 활용한다.

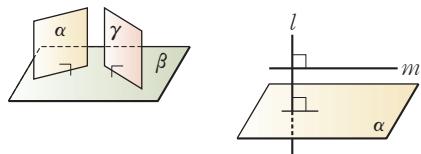
| 풀이 | 정육면체의 모서리를 직선으로, 면을 평면으로 생각하면 다음 그림과 같다.



- ㄴ, $\alpha \perp \beta$ 이고 $\beta \perp \gamma$ 이면 $\alpha \perp \gamma$ 일 수도 있다. (거짓)
 ㄹ, $l \perp \alpha$ 이고 $l \perp m$ 이면 $m \parallel \alpha$ 일 수도 있다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

| 참고 | 정육면체를 도입하지 않고도 반례를 떠올릴 수 있는 공간 감각의 소유자라면 정육면체 없이 접근해도 OK!
 ㄴ, ㄹ. 반례는 다음과 같다.



★ 원칙

여러 개의 직선끼리, 평면끼리, 직선과 평면끼리의 평행과 수직 관계를 확인할 때는 정육면체(또는 직육면체)를 이용한다. → 모서리를 직선으로, 면을 평면으로 생각하여 주어진 직선과 평면의 평행과 수직 관계를 확인한다.

정답과 풀이 17쪽 ▶

유제 097 서로 다른 세 직선 l, m, n 과 서로 다른 두 평면 α, β 에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 골라라.

보기

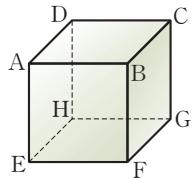
- ㄱ. $l \perp m$ 이고 $m \perp n$ 이면 $l \parallel n$ 이다.
 ㄴ. $l \perp \alpha$ 이고 $l \perp \beta$ 이면 $\alpha \parallel \beta$ 이다.
 ㄷ. $l \parallel \alpha$ 이고 $m \parallel \alpha$ 이면 $l \parallel m$ 이다.
 ㄹ. $l \parallel \alpha$ 이고 $\alpha \perp \beta$ 이면 $l \perp \beta$ 이다.

필수예제 082

꼬인 위치에 있는 두 직선이 이루는 각의 크기

오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 다음 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하여라.

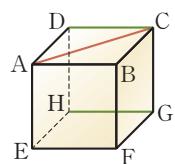
- (1) 직선 AC와 직선 GH
- (2) 직선 AC와 직선 DE
- (3) 직선 AC와 직선 HF



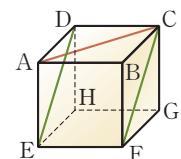
【풀이】 이루는 각을 구하려니 꼬인 위치에 있다고? 두 직선이 한 점에서 만나도록

- (1) 직선 GH를 직선 CD로 (2) 직선 DE를 직선 CF로 (3) 직선 HF를 직선 DB로 각각 평행이동하여 두 직선이 이루는 각의 크기를 구한다.

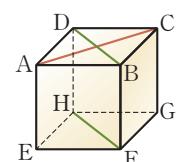
| 풀이 | (1) 직선 GH는 직선 CD와 평행하고 직선 AC와 직선 CD가 이루는 각의 크기는 45° 이다.
따라서 직선 AC와 직선 GH가 이루는 각의 크기도 45° 이다.



(2) 직선 DE는 직선 CF와 평행하고 $\triangle AFC$ 가 정삼각형이므로 직선 AC와 직선 CF가 이루는 각의 크기는 60° 이다.
따라서 직선 AC와 직선 DE가 이루는 각의 크기도 60° 이다.



(3) 직선 HF는 직선 DB와 평행하고 정사각형 ABCD의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로 직선 AC와 직선 DB가 이루는 각의 크기는 90° 이다.
따라서 직선 AC와 직선 HF가 이루는 각의 크기도 90° 이다.



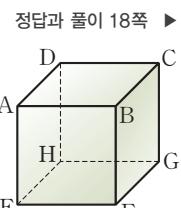
(1) 꼬인 위치에 있는 두 직선이 이루는 각의 크기를 구할 때에는 한 직선을 평행이동하여 다른 직선과 한 점에서 만나도록 만든 다음 두 직선이 이루는 각의 크기를 구한다.

(2) 꼬인 위치에 있는 두 직선 l, m 이 수직임을 보일 때에는 다음과 같이 한다.

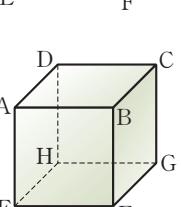
[1단계] 직선 m 을 포함한 평면 중 직선 l 과 수직인 두 직선을 포함한 평면 α 를 찾는다.

[2단계] 직그 평의 정리를 활용한다. \rightarrow 직선 l 이 평면 α 위의 두 직선과 수직이면 직선 l 과 평면 α 는 수직이다.

[3단계] 직선 l 은 평면 α 위의 모든 직선과 수직이므로 두 직선 l, m 이 수직이다.



유제 098 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 직선 AB와 직선 CE가 이루는 각의 크기를 α , 직선 AB와 직선 EG가 이루는 각의 크기를 β 라고 할 때,
 $\cos \alpha \times \cos \beta$ 의 값을 구하여라.



유제 099 오른쪽 그림과 같은 정육면체에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 골라라.

보기

- ㄱ. $\overline{BD} \perp \overline{AC}$
ㄷ. $\overline{BD} \perp (\text{평면 } ACG)$

- ㄴ. $\overline{BD} \perp \overline{CG}$
ㄹ. $\overline{BD} \perp \overline{AG}$

3

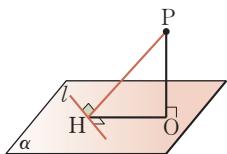
삼수선의 정리

01 삼수선의 정리

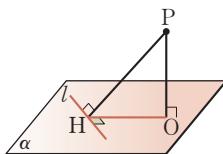
평면 α 위에 있지 않은 한 점 P와 평면 α 위의 직선 l, 직선 l 위의 한 점 H, 평면 α 위에 있으면서 직선 l 위에 있지 않은 점 O에 대하여 다음이 성립한다. 이를 **삼수선의 정리**라고 한다.

(1) $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OH} \perp l$ 이면

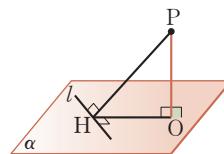
$$\overline{PH} \perp l$$

(2) $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{PH} \perp l$ 이면

$$\overline{OH} \perp l$$

(3) $\overline{OH} \perp l$, $\overline{PH} \perp l$, $\overline{PO} \perp \overline{OH}$ 이면

$$\overline{PO} \perp \alpha$$

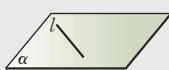


【 풍선자료】

삼수선의 정리란 3개의 수선이 어우러져 노래하는 정리. 다음 단원에서 배울 정사영의 정리와 함께 공간도형의 양대 산맥을 형성한다. 삼수선의 정리란 도대체 무엇인가?

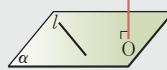
다음 그림과 같이 태초에 점 P와 직선 l, 평면 α 가 있었노라.

$$P \bullet$$



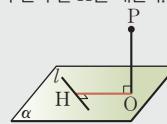
점 P에서 평면 α 에 수선의 발 O를 내린다.

$$P \bullet$$



점 O에서 직선 l에 수선의 발 H를 내린다.

$$P \bullet$$

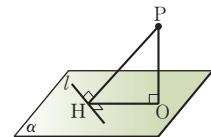


이때 묻는다. 직선 l과 \overline{PH} 는 수직인가? 그렇다는 것이 바로 삼수선의 정리 (1).

나머지 (2), (3)도 순서대로 따라가면서 생각해 보면 비슷한 이야기!

어렵게 생각할 것 없다. 이렇게 정리하면 된다.

오른쪽 그림의 세 직각 중 두 개만 직각이면 나머지 하나는 자동으로 직각



02 이면각

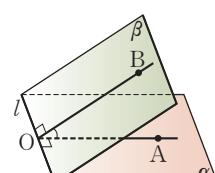
(1) **이면각** : 한 직선을 공유하는 두 반평면으로 이루어진 도형

(2) **이면각의 변** : 이면각을 만드는 두 반평면의 교선 \rightarrow 직선 l

(3) **이면각의 면** : 이면각을 만드는 두 반평면 \rightarrow 반평면 α , β

(4) **이면각의 크기** : 직선 l에서 만나는 두 반평면 α , β 에 대하여 직선 l 위의 점 O를 지나고 l에 수직인 두 반직선 OA, OB를 각각 반평면 α , β 위에 그을 때,

점 O의 위치에 관계없이 일정한 $\angle AOB$ 의 크기



【 풍선자료】

이면각의 크기란 교선에서 수직으로 각각 뺀어나간 두 직선이 이루는 각의 크기.

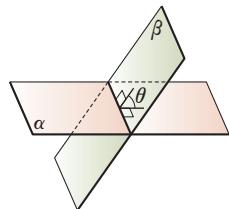
이면각의 크기를 구할 때에는 다음의 순서를 잘 밟으면 쉽다.

교선 찾기 \rightarrow 교선에서 수직으로 뺀어나간 두 직선 찾기 \rightarrow 두 직선이 이루는 각의 크기 구하기

03 두 평면이 이루는 각

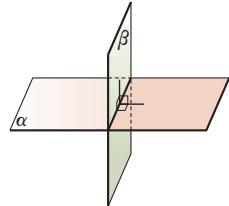
(1) 두 평면이 이루는 각

- ① 두 평면이 이루는 각의 크기 : 두 평면이 만날 때, 이 두 평면에 의해 생기는 두 쌍의 이면각의 크기 중 크지 않은 것
- ② 두 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라고 하면 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$



(2) 수직인 두 평면

두 평면 α, β 가 이루는 각의 크기가 90° 일 때, 두 평면 α, β 는 서로 수직이라 하고, 기호 $\alpha \perp \beta$ 로 나타낸다.



【증명자료】 두 직선이 이루는 각을 크기와 크지 않은 쪽의 각을 택한 것처럼 두 평면이 이루는 각도 마찬가지로 크기와 크지 않은 쪽의 각을 택하는 걸로 약속한다.

• 한 걸음 더

◎ 삼수선의 정리의 증명

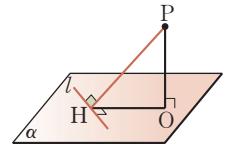
(1) $\overline{PO} \perp \alpha, \overline{OH} \perp l$ 이면 $\overline{PH} \perp l$
 $\overline{PO} \perp \alpha$ 이고 직선 l 은 평면 α 위에 있으므로

$$\overline{PO} \perp l$$

또, $\overline{OH} \perp l$ 이므로 \overline{PO} 와 \overline{OH} 로 결정되는 평면을 β 라고 하면
 $\beta \perp l$

그런데 \overline{PH} 는 평면 β 위에 있으므로

$$\overline{PH} \perp l$$



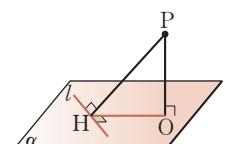
(2) $\overline{PO} \perp \alpha, \overline{PH} \perp l$ 이면 $\overline{OH} \perp l$
 $\overline{PO} \perp \alpha$ 이고 직선 l 은 평면 α 위에 있으므로

$$\overline{PO} \perp l$$

또, $\overline{PH} \perp l$ 이므로 \overline{PO} 와 \overline{PH} 로 결정되는 평면을 β 라고 하면
 $\beta \perp l$

그런데 \overline{OH} 는 평면 β 위에 있으므로

$$\overline{OH} \perp l$$



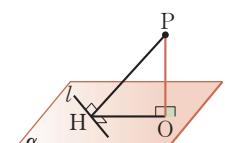
(3) $\overline{OH} \perp l, \overline{PH} \perp l, \overline{PO} \perp \overline{OH}$ 이면 $\overline{PO} \perp \alpha$
 $\overline{PH} \perp l$ 이고 $\overline{OH} \perp l$ 이므로 \overline{PH} 와 \overline{OH} 로 결정되는 평면을 β 라고 하면

$$\beta \perp l$$

그런데 \overline{PO} 는 평면 β 위에 있으므로

$$\overline{PO} \perp l$$

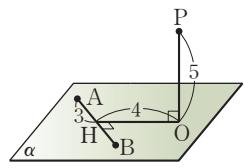
또, $\overline{PO} \perp \overline{OH}$ 이고 \overline{PO} 는 \overline{OH} 와 직선 l 로 결정되는 평면 α 에 수직이므로
 $\overline{PO} \perp \alpha$



필수예제 083

삼수선의 정리

오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 O라 하고, 점 O에서 평면 α 위의 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 고 하자. $\overline{OP}=5$, $\overline{OH}=4$, $\overline{AH}=3$ 일 때, \overline{AP} 의 길이를 구하여라.

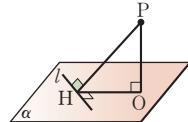


【풀이】

평면, 평면 위의 선분, 평면 밖의 점과 함께 직각이 2개 등장하면 삼수선의 정리!

바로 오른쪽 그림과 같은 상황이다. 세 직각 중 두 개가 직각이면 나머지 하나는 자동으로 직각!

→ 수선 PO, 수선 OH가 주어졌으므로 \overline{PH} 도 수선!



| 풀이 | 오른쪽 그림과 같이 두 점 P, H를 연결하면 $\triangle PHO$ 는 직각삼각형이므로

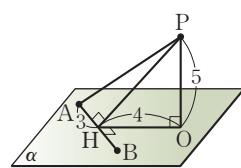
$$\overline{PH} = \sqrt{\overline{OH}^2 + \overline{OP}^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} \quad \leftarrow \text{피타고라스 정리}$$

이때 $\overline{PO} \perp \alpha$ 이고 $\overline{OH} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{PH} \perp \overline{AB}$$

따라서 두 점 P, A를 연결하면 $\triangle PAH$ 도 직각삼각형이므로

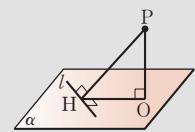
$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{PH}^2} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{41})^2} = 5\sqrt{2}$$



원칙

삼수선의 정리를 이용하여 직각을 이루는 두 선분을 찾아 해결한다.

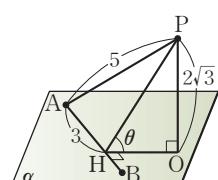
→ 오른쪽 그림의 세 개의 직각 중에서 두 개가 직각이면 나머지 하나는 자동으로 직각
이다.



유제 100

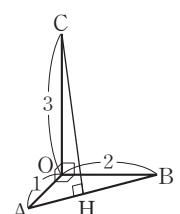
오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 O라 하고, 점 O에서 평면 α 위의 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하자. $\overline{AP}=5$, $\overline{AH}=3$, $\overline{OP}=2\sqrt{3}$ 이고 $\angle PHO=\theta$ 라고 할 때, $\cos \theta$ 의 값을 구하여라.

정답과 풀이 18쪽 ▶

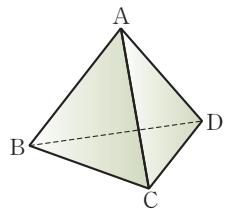


유제 101

오른쪽 그림과 같이 서로 직각으로 만나는 \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} 의 길이가 순서대로 1, 2, 3이다. 점 C에서 \overline{AB} 에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, \overline{CH} 의 길이를 구하여라.



오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정사면체 A-BCD에 대하여 평면 ABC와 평면 BCD가 이루는 각의 크기를 θ 라고 할 때, $\cos \theta$ 의 값을 구하여라.



▶ 풀이자료 이면각의 크기를 구할 때에는 다음과 같이 한다.

[1단계] 두 평면의 교선 위의 한 점에서 각각 교선에 수직인 두 직선을 긋는다. 이때 기왕이면 주어진 도형의 성질을 잘 활용할 수 있게 긋는 것이 보조선 긋기의 센스!

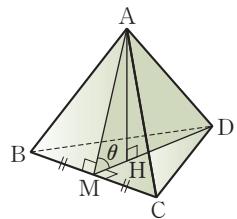
[2단계] 위의 두 직선이 이루는 각의 크기를 구한다.

| 풀이 | [1단계] 정사면체의 각 면이 정삼각형이므로 평면 ABC와 평면 BCD의 교선 BC의 중점 M에서 수직으로 뻗어나간 두 직선은 오른쪽 그림과 같이 각각 점 A, 점 D를 지나고 $\theta = \angle AMD$ 이다.

[2단계] 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$$\overline{AM} = \overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AB} = \sqrt{3}, \overline{MH} = \frac{1}{3} \overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{따라서 직각삼각형 } AMH \text{에서 } \cos \theta = \frac{\overline{MH}}{\overline{AM}} = \frac{1}{3}$$



| 참고 | [2단계]는 반드시 풀이처럼 할 필요는 없다. 다양한 방법 중에서 떠오르는 방법을 딱!

• 선분의 길이를 구하지 않고 선분의 길이 사이의 관계를 이용할 수도 있다.

$$\Rightarrow \overline{AM} = \overline{DM} \text{이므로 } \overline{MH} = \frac{1}{3} \overline{DM} = \frac{1}{3} \overline{AM} \quad \therefore \cos \theta = \frac{\overline{MH}}{\overline{AM}} = \frac{1}{3}$$

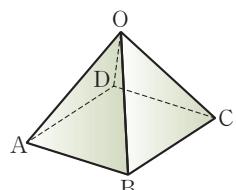
▶ 원칙

이면각의 크기 구하기 → [1단계] 두 평면의 교선 위의 한 점에서 각각 교선에 수직인 두 직선을 긋는다.

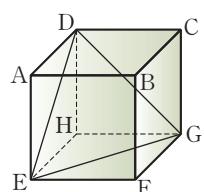
[2단계] 위의 두 직선이 이루는 각의 크기를 구한다.

정답과 풀이 18쪽 ▶

유제 102 오른쪽 그림과 같이 밑면은 정사각형이고 옆면은 모두 정삼각형인 사각뿔 O-ABCD에서 평면 OAB와 평면 ABCD가 이루는 각의 크기를 θ 라고 할 때, $\cos \theta$ 의 값을 구하여라.



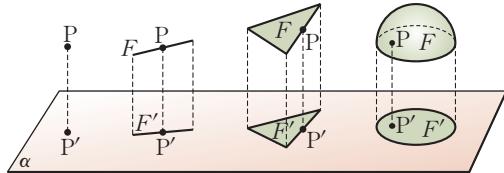
유제 103 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형을 밑면으로 하는 직육면체가 있다. 평면 DEG와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기가 60° 일 때, 직육면체의 높이를 구하여라.



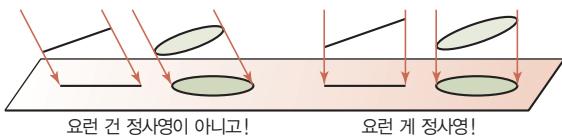
01 정사영

(1) 점 P 의 평면 α 위로의 정사영 : 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P 에서 평면 α 에 내린 수선의 발 P'

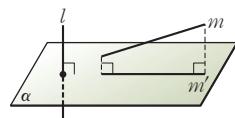
(2) 도형 F 의 평면 α 위로의 정사영 : 도형 F 에 속하는 각 점의 평면 α 위로의 정사영으로 이루어진 도형 F'



풍산자료 정사영(正射影)이란 바를 정, 쓸 사, 그림자 영. 즉, 바르게 쓸 때의 그림자라는 뜻이다. 평면에 똑바로 수직이 되도록 빛을 쏘아 생기는 그림자가 도형의 정사영이다. 비스듬히 빛을 쏘아 만들어진 그림자는 정사영이 아니다.



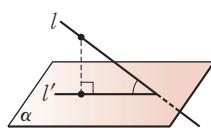
풍산자료 직선의 정사영은 항상 직선일까? 그렇지 않다. 오른쪽 그림을 보면 평면 α 에 수직인 직선 l 의 정사영은 점이 된다. 그러나 평면 α 와 수직이 아닌 직선 m 의 정사영은 직선 m' 이 됨을 알 수 있다. 이처럼 처음 도형과 비슷한 도형이 정사영이 될 것이라는 편견은 절대 금물!



02 직선과 평면이 이루는 각

직선 l 과 평면 α 가 수직이 아닐 때, 직선 l 의 평면 α 위로의 정사영 직선 l' 과 직선 l 이 이루는 각을 **직선 l 과 평면 α 가 이루는 각**이라 한다.

특히, $l \parallel \alpha$ 일 때, 직선 l 과 평면 α 가 이루는 각의 크기는 0° 이다.

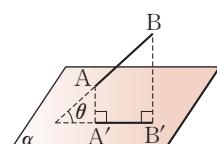


풍산자료 직선과 평면이 이루는 각은 크기가 크지 않은 쪽의 각을 생각한다.

03 정사영의 길이와 넓이

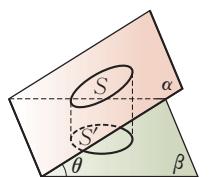
(1) 정사영의 길이 : 선분 AB 의 평면 α 위로의 정사영을 선분 $A'B'$ 이라 하고
직선 AB 과 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ 라고 하면

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$$



(2) 정사영의 넓이 : 평면 α 위에 있는 도형의 넓이를 S , 이 도형의 평면 β 위로의 정사영의 넓이를 S' 이라 하고 두 평면 α, β 가 이루는 각의 크기를 θ 라고 하면

$$S' = S \cos \theta \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$$



풍산자료 (1) 길이에 대한 정리 → 원래 선분의 길이에 $\cos \theta$ 를 곱하면 정사영의 길이가 된다.
(2) 넓이에 대한 정리 → 원래 도형의 넓이에 $\cos \theta$ 를 곱하면 정사영의 넓이가 된다.
그러니까 θ 만 정확히 찾아내면 끝.

필수예제 085**정사영의 길이**

선분 AB의 평면 α 위로의 정사영이 선분 A'B'이다. 직선 AB와 평면 α 가 이루는 각의 크기가 30° 일 때, 다음을 구하여라.

- (1) 선분 AB의 길이가 10일 때, 선분 A'B'의 길이
- (2) 선분 A'B'의 길이가 30일 때, 선분 AB의 길이

풀이 처음 도형과 그림자가 생기는 평면이 이루는 각의 크기가 $\theta \rightarrow$ (정사영의 길이) = (처음 도형의 길이) $\times \cos \theta$

| 풀이 | $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos 30^\circ$ 이므로

$$(1) \overline{A'B'} = 10 \times \cos 30^\circ = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

$$(2) 30 = \overline{AB} \cos 30^\circ \text{에서 } \overline{AB} = \frac{30}{\cos 30^\circ} = 20\sqrt{3}$$

필수예제 086**정사영의 넓이**

한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영이 삼각형 A'B'C'이라고 한다. 정삼각형 ABC를 포함하는 평면과 평면 α 가 이루는 각의 크기가 60° 일 때, 삼각형 A'B'C'의 넓이를 구하여라.

풀이 처음 도형과 그림자가 생기는 평면이 이루는 각의 크기가 $\theta \rightarrow$ (정사영의 넓이) = (처음 도형의 넓이) $\times \cos \theta$

$$| \text{풀이} | \triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3} \quad \therefore \triangle A'B'C' = \triangle ABC \times \cos 60^\circ = 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}$$

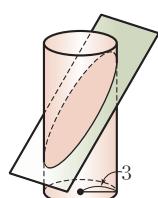
처음 도형과 그림자가 생기는 평면이 이루는 각의 크기가 θ 이면

$$\text{① (정사영의 길이)} = (\text{처음 도형의 길이}) \times \cos \theta \quad \text{② (정사영의 넓이)} = (\text{처음 도형의 넓이}) \times \cos \theta$$

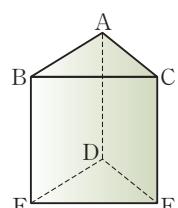
$$\rightarrow (\text{처음 도형의 길이}) = (\text{정사영의 길이}) \times \frac{1}{\cos \theta} \quad \rightarrow (\text{처음 도형의 넓이}) = (\text{정사영의 넓이}) \times \frac{1}{\cos \theta}$$

유제 104 오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 3인 원기둥을 밑면과 이루는 각의 크기가 60° 인 평면으로 자른 단면은 타원이다. 이때 이 타원의 장축의 길이를 구하여라.

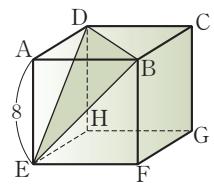
정답과 풀이 19쪽 ▶



유제 105 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형을 밑면으로 하고 높이가 6인 삼각기둥에서 평면 ABED의 평면 BEFC 위로의 정사영의 넓이를 구하여라.



오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 8인 정육면체에서 평면 BDE와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기가 θ 일 때, $\cos \theta$ 의 값을 구하여라.



【증명】 묻는 것은 θ 가 아니고 $\cos \theta$ 의 값. 처음 도형과 그림자가 생기는 평면이 이루는 각의 크기가 θ 이면

$$\text{정사영의 넓이} = (\text{처음 도형의 넓이}) \times \cos \theta \rightarrow \cos \theta = \frac{\text{정사영의 넓이}}{(\text{처음 도형의 넓이})}$$

처음 도형과 정사영만 찾으면 끝. 그림자가 생길 평면에 수직으로 빛을 비추어 정사영을 찾아야 하니까 처음 도형을 □EFGH로 정하면 △BDE 위에 그림자를 만들기가 어렵다. 상대적으로 더 작은 △BDE가 처음 도형!

| 풀이 | △BDE의 평면 EFGH 위로의 정사영은 △FHE이므로 $\triangle FHE = \triangle BDE \times \cos \theta$ ①

$$\triangle BDE \text{는 한 변의 길이가 } 8\sqrt{2} \text{인 정삼각형이므로 } \triangle BDE = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (8\sqrt{2})^2 = 32\sqrt{3}$$

$$\triangle FHE \text{는 } \overline{FE} = \overline{HE} = 8 \text{인 직각이등변삼각형이므로 } \triangle FHE = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32$$

$$\text{따라서 } ① \text{에 의해 } 32 = 32\sqrt{3} \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = \frac{32}{32\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

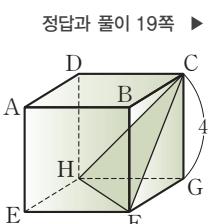
| 참고 | 교선에 수직인 두 직선을 그어서 이면각을 찾자니 정육면체에서 생각하기 참 애매하다. 이럴 때 정사영의 넓이를 활용하면 이면각의 크기에 대한 코사인 값을 간단히 구할 수 있다.

교선에 수직인 두 직선을 그어 이면각을 찾기 어려울 때, 정사영의 넓이를 활용한다.

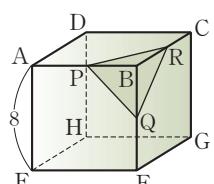
大 원칙

$$\text{두 평면이 이루는 각의 크기가 } \theta \text{이면 } \text{정사영의 넓이} = (\text{처음 도형의 넓이}) \times \cos \theta \rightarrow \cos \theta = \frac{\text{정사영의 넓이}}{(\text{처음 도형의 넓이})}$$

유제 106 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정육면체에서 평면 CHF와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기가 θ 일 때, $\cos \theta$ 의 값을 구하여라.



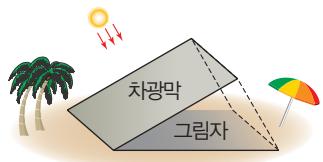
유제 107 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 8인 정육면체에서 세 모서리 AB, BF, BC의 중점을 각각 P, Q, R라고 하자. 평면 PQR와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기가 θ 일 때, $\cos \theta$ 의 값을 구하여라.



필수예제 088

정사영의 넓이의 실생활에의 활용

오른쪽 그림과 같이 해변에 설치된 차광막에 수직으로 햇빛이 비춰 그림자가 생겼다. 햇빛과 그림자가 이루는 각의 크기는 60° 이고 차광막의 넓이가 30 m^2 일 때, 그림자의 넓이를 구하여라.



【풀이】

실생활 문제에서는 처음 도형과 정사영을 정확히 판단해야 한다. 차광막에 햇빛이 비춰 그림자가 생겼으니까 차광막이 처음 도형, 그림자가 정사영이라고 오해하면 No.

정사영은 빛에 수직인 평면 위에 생기는 것! 빛이 차광막을 거쳐 그림자를 만들고 있는 상황이지만 빛에 수직인 건 차광막! 따라서 이를 수학적으로 해석하면 그림자의 정사영이 차광막이다.

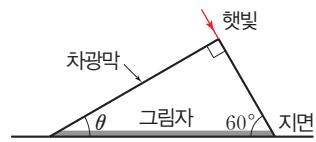
| 풀이 | 정면에서 본 상황을 간단하게 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.

이때 그림자와 차광막이 이루는 각의 크기를 θ 라고 하면 햇빛은 차광막에 수직으로 비추므로

$$\theta = 90^\circ - (\text{햇빛과 그림자가 이루는 각의 크기}) = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

그림자의 넓이를 $S \text{ m}^2$ 라고 하면 그림자의 정사영이 차광막이므로

$$30 = S \times \cos 30^\circ \quad \therefore S = \frac{30}{\cos 30^\circ} = 20\sqrt{3} (\text{m}^2)$$



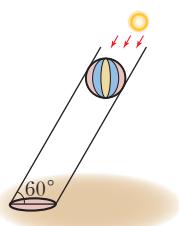
실생활 문제를 풀 때에는

【원칙】

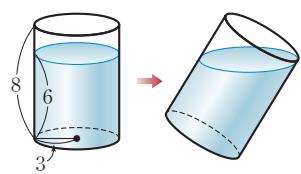
- (1) 처음 도형과 정사영이 되는 도형을 결정하고
- (2) 처음 도형과 정사영이 되는 도형이 이루는 각의 크기 θ 를 구한 다음,
- (3) (정사영의 넓이) = (처음 도형의 넓이) $\times \cos \theta$ 를 이용하여 구하는 값을 얻는다.

정답과 풀이 19쪽 ▶

유제 108 오른쪽 그림과 같이 하늘에 구 모양의 애드벌룬이 떠 있다. 햇빛과 지면이 이루는 각의 크기가 60° 일 때, 지면 위에 생긴 애드벌룬의 그림자의 넓이가 $12\sqrt{3}\pi \text{ m}^2$ 이다. 이때 이 애드벌룬의 반지름의 길이를 구하여라.

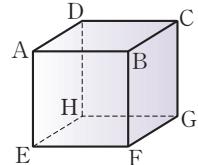


유제 109 오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 3, 높이가 8인 원기둥 모양의 컵에 높이가 6만큼 물이 들어 있다. 컵을 기울여 물이 쏟아지기 직전의 상태로 만들 때, 수면의 넓이를 구하여라.
(단, 컵의 두께는 고려하지 않는다.)

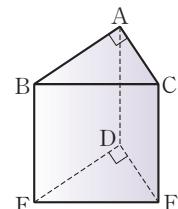


Step 1

- 126** 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 세 점 D, F, G와 세 직선 AB, BC, EH로 결정되는 서로 다른 평면의 개수를 구하여라.



- 127** 오른쪽 그림과 같이 밑면이 직각삼각형인 삼각기둥에서 각 모서리를 연장한 직선 및 각 면을 포함하는 평면에 대하여 모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 직선의 개수를 a , 모서리 AD와 수직으로 만나는 직선의 개수를 b , 모서리 BC와 한 점에서 만나는 평면의 개수를 c 라고 할 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

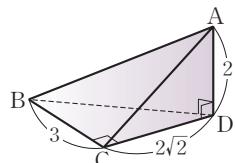


- 128** 서로 다른 두 직선 l, m 과 서로 다른 두 평면 α, β 에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 콜라라.

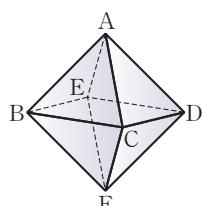
보기

- | | |
|--|--|
| ㄱ. $l \perp \alpha$ 이고 $l \parallel \beta$ 이면 $\alpha \perp \beta$ 이다. | ㄴ. $l \parallel \alpha$ 이고 $l \parallel \beta$ 이면 $\alpha \parallel \beta$ 이다. |
| ㄷ. $l \perp \alpha$ 이고 $m \parallel \alpha$ 이면 $l \perp m$ 이다. | ㄹ. $l \parallel \alpha$ 이고 $\alpha \perp \beta$ 이면 $l \parallel \beta$ 이다. |

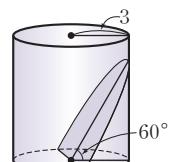
- 129** 오른쪽 그림과 같은 사면체 A-BCD에서 $\overline{AD} \perp \overline{BD}$, $\overline{AD} \perp \overline{CD}$, $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ 이고 $\overline{AD}=2$, $\overline{CD}=2\sqrt{2}$, $\overline{BC}=3$ 일 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하여라.



- 130** 오른쪽 그림과 같은 정팔면체의 이웃한 두 면이 이루는 각의 크기를 θ 라고 할 때, $\cos \theta$ 의 값을 구하여라.

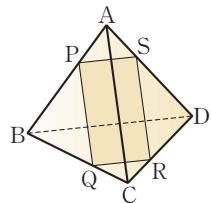


- 131** 오른쪽 그림과 같은 밑면의 반지름의 길이가 3인 원기둥을 밑면의 중심을 지나고 밑면과 이루는 각의 크기가 60° 인 평면으로 잘라 생기는 단면의 넓이를 구하여라.



Step 2

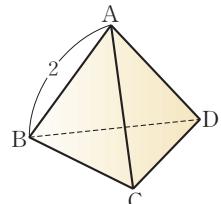
- 132** 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 10인 정사면체 A-BCD를 두 모서리 AC, BD에 평행한 평면으로 자를 때, 단면인 사각형 PQRS의 둘레의 길이를 구하여라.



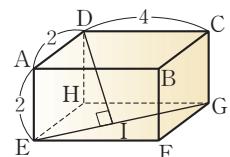
- 133** 서로 다른 세 평면 α, β, γ 에 대하여 조건 (가)를 만족시키는 경우 공간은 a 개로 분할되고, 조건 (나)를 만족시키는 경우 공간은 최대 b 개로 분할된다. 이때 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

(가) $\alpha // \beta$ 이고 $\beta // \gamma$ 이다.(나) 두 평면 α, β 의 교선과 평면 γ 는 평행하다.

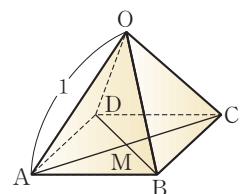
- 134** 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정사면체 A-BCD에서 \overline{BC} 와 \overline{AD} 사이의 최단 거리를 구하여라.



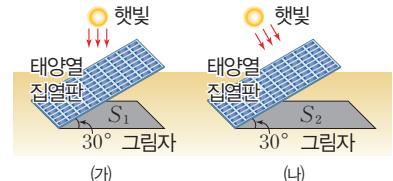
- 135** 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $\overline{AD} = \overline{AE} = 2$, $\overline{CD} = 4$ 이고 점 D에서 \overline{EG} 에 내린 수선의 발을 I라고 할 때, \overline{DI} 의 길이를 구하여라.

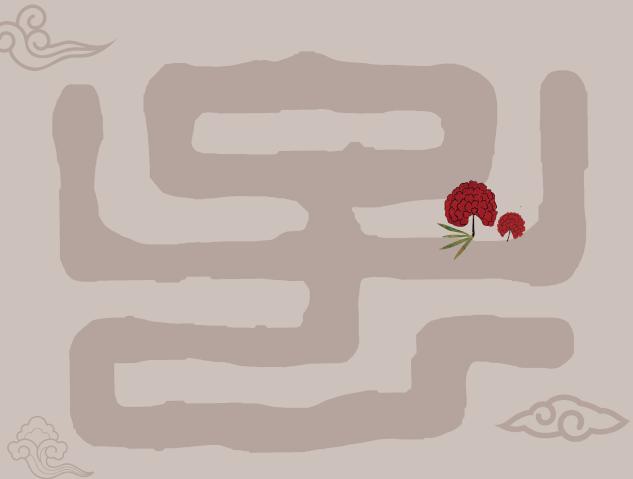


- 136** 오른쪽 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 1인 정사각뿔에서 밑면의 두 대각선 AC, BD의 교점을 M이라고 할 때, $\triangle MAB$ 의 평면 OAB 위로의 정사영의 넓이를 구하여라.



- 137** 넓이가 120 m^2 인 직사각형 모양의 태양열 집열판을 지면과 30° 의 각도를 이루도록 설치하였다. 오른쪽 그림의 (가)와 같이 햇빛이 지면에 수직으로 비출 때의 집열판의 그림자의 넓이를 S_1 , (나)와 같이 햇빛이 집열판에 수직으로 비출 때의 집열판의 그림자의 넓이를 S_2 라고 할 때, $\frac{S_2}{S_1}$ 의 값을 구하여라.





III 공간도형과 공간벡터



1 공간도형

2 공간좌표

3 공간벡터



1 공간에서의 점의 좌표	126
2 두 점 사이의 거리	129
3 선분의 내분점과 외분점	132
• 연습문제	136
4 구의 방정식	138
• 연습문제	144

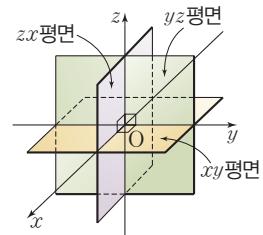
01 좌표공간

(1) **좌표공간** : 좌표축과 좌표평면이 정해진 공간

(2) **좌표공간에서의 좌표축** : 공간의 한 점 O 에서 서로 직교하는 세 수직선을 그었을 때, 이 세 수직선을 각각 x 축, y 축, z 축이라 하고 이들을 통틀어 **좌표축**, 점 O 를 **원점**이라고 한다.

(3) **좌표공간에서의 좌표평면**

- ① **xy 평면** : x 축과 y 축을 포함하는 평면
- ② **yz 평면** : y 축과 z 축을 포함하는 평면
- ③ **zx 평면** : z 축과 x 축을 포함하는 평면



▶ 풍선자기 평면에 수직선을 하나 그으면 실수를 좌표로 나타낼 수 있다. 평면에 수직으로 만나는 수직선 2개를 그으면 점의 위치를 좌표로 나타낼 수 있다. 같은 방법으로 생각을 확장하면 공간도 이와 마찬가지이다. 공간에서 서로 수직으로 만나는 수직선 3개를 그으면 공간에 있는 점의 위치를 좌표로 나타낼 수 있다. 좌표가 도입된 이 공간이 바로 좌표공간이다.

▶ 풍선자기 일반적으로는 원점 O 를 기준으로 해서 앞뒤 방향으로 x 축, 좌우 방향으로 y 축, 상하 방향으로 z 축을 놓는다.

02 공간좌표

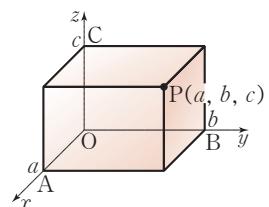
(1) **공간좌표** : 좌표공간의 한 점 P 에 대응하는 세 실수의 순서쌍 (a, b, c)

를 점 P 의 공간좌표라 하고, 기호 $P(a, b, c)$ 로 나타낸다.

(2) $P(a, b, c)$ 에서 a : 점 P 의 x 좌표

b : 점 P 의 y 좌표

c : 점 P 의 z 좌표



▶ 풍선자기 좌표공간에서 점 $P(a, b, c)$ 를 찍을 때에는

x 축에 a , y 축에 b , z 축에 c 를 찍고 \rightarrow 좌표축에 평행한 직선을 그어 직육면체를 만들면 원점과 마주 보는 꼭짓점이 점 P 이다. 좌표공간의 점 P 의 좌표를 읽을 때에는 이를 거꾸로 하면 된다.

▶ 풍선자기 일반적으로 그려진 좌표공간에서 x 좌표는 앞뒤로의 위치, y 좌표는 좌우로의 위치, z 좌표는 상하로의 위치를 읽는다.

03 좌표축 또는 좌표평면 위의 점

(1) **좌표축 위의 점**

① x 축 위의 점 : $(a, 0, 0)$ ② y 축 위의 점 : $(0, b, 0)$ ③ z 축 위의 점 : $(0, 0, c)$

(2) **좌표평면 위의 점**

① xy 평면 위의 점 : $(a, b, 0)$ ② yz 평면 위의 점 : $(0, b, c)$ ③ zx 평면 위의 점 : $(a, 0, c)$

▶ 풍선자기 좌표공간에서 좌표축이나 좌표평면 위의 점은 관계없는 좌표를 0으로 놓으면 된다.

04 수선의 발

(1) 좌표공간의 점 $P(a, b, c)$ 에서 x 축, y 축, z 축에 내린 수선의 발을 각각 A, B, C라고 하면

$$A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$$

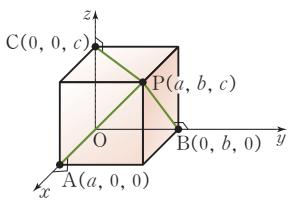
(2) 좌표공간의 점 $P(a, b, c)$ 에서 xy 평면, yz 평면, zx 평면에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라고 하면

$$D(a, b, 0), E(0, b, c), F(a, 0, c)$$

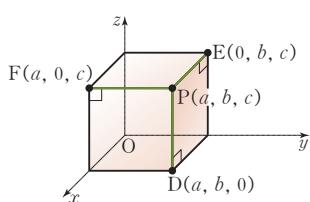
【증명】 좌표공간에 있는 점에서 좌표평면에 내린 수선의 발은 바로 그 점의 그 좌표평면 위로의 정사영!

실제로 각각 수선의 발을 내려 보면 다음 그림과 같다.

[좌표축에 내린 수선의 발]



[좌표평면에 내린 수선의 발]



【증명】 수선의 발은 어디에 내리는 발인지 보고 관계없는 좌표를 0으로 바꿔 버리면 된다.

05 점의 대칭이동

(1) 좌표공간의 점 $P(a, b, c)$ 를 x 축, y 축, z 축에 대하여 대칭이동한 점을 각각 A, B, C라고 하면

$$\begin{array}{lll} \textcircled{1} A(a, -b, -c) & \textcircled{2} B(-a, b, -c) & \textcircled{3} C(-a, -b, c) \end{array}$$

(2) 좌표공간의 점 $P(a, b, c)$ 를 xy 평면, yz 평면, zx 평면에 대하여 대칭이동한 점을 각각 D, E, F라고 하면

$$\begin{array}{lll} \textcircled{1} D(a, b, -c) & \textcircled{2} E(-a, b, c) & \textcircled{3} F(a, -b, c) \end{array}$$

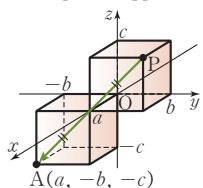
(3) 좌표공간의 점 $P(a, b, c)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 P' 이라고 하면

$$P'(-a, -b, -c)$$

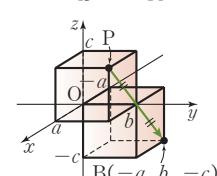
【증명】 좌표평면에서의 규칙과 다를 것은 없다. 다만 실제로 좌표공간에서 이를 눈으로 찾아야 할 때, 공간 감각이 다소 필요할 뿐.

실제로 각각 직육면체를 그려서 눈으로 확인해 보자.

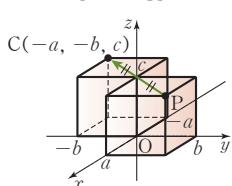
[x 축 대칭]



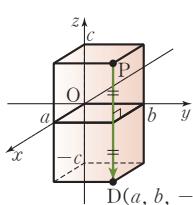
[y 축 대칭]



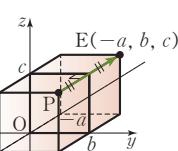
[z 축 대칭]



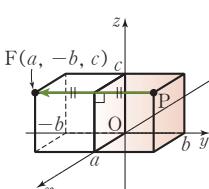
[xy 평면 대칭]



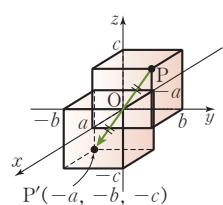
[yz 평면 대칭]



[zx 평면 대칭]



[원점 대칭]



【증명】 대칭이동한 점은 대칭의 기준을 확인하고 관계없는 좌표의 부호를 반대로 바꿔 버리면 된다.

01 두 점 사이의 거리

(1) 좌표공간에서 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

(2) 좌표공간에서 원점 $O(0, 0, 0)$ 과 점 $A(x_1, y_1, z_1)$ 사이의 거리는

$$\overline{OA} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

증명자료 좌표평면에서의 공식 \rightarrow 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 $\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

원점 $O(0, 0)$ 과 점 $A(x_1, y_1)$ 사이의 거리는 $\overline{OA} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

좌표공간에서의 두 점 사이의 거리 공식과 다른 것은 z 좌표뿐이다. x 축, y 축만 있던 좌표평면에 z 축을 추가해서 좌표공간을 만들었으니 좌표평면에서 쓰던 두 점 사이의 거리 공식에 z 축에 해당하는 만큼 없어 가는 것.

한 걸음 더

◎ 좌표공간에서 두 점 사이의 거리의 확인

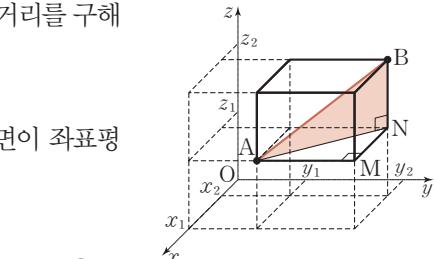
좌표공간의 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리를 구해 보자.

(i) 선분 AB 가 어느 좌표평면과도 평행하지 않을 때

오른쪽 그림과 같이 선분 AB 를 대각선으로 하고 각 면이 좌표평면에 평행한 직육면체를 생각하면

$$\overline{MN} = |x_2 - x_1|, \overline{AM} = |y_2 - y_1|,$$

$$\overline{BN} = |z_2 - z_1|$$



$\triangle AMN$ 은 직각삼각형이므로

$$\overline{AN}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MN}^2$$

그런데 $\triangle ANB$ 도 직각삼각형이므로

$$\overline{AB}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{BN}^2 = (\overline{AM}^2 + \overline{MN}^2) + \overline{BN}^2$$

위의 식에 ①을 대입하면

$$\overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad \dots \textcircled{2}$$

(ii) 선분 AB 가 세 좌표평면 중 하나와 평행할 때에도 ②은 성립한다.

특히, 원점 $O(0, 0, 0)$ 과 점 $A(x_1, y_1, z_1)$ 사이의 거리는

$$\overline{OA} = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2 + (z_1 - 0)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

필수예제 091**두 점 사이의 거리**

다음 물음에 답하여라.

(1) 점 $P(2, -1, 3)$ 과 x 축에 대하여 대칭인 점이 A , yz 평면에 대하여 대칭인 점이 B 일 때, 두 점 A , B 사이의 거리를 구하여라.

(2) 두 점 $A(1, 2, -3)$, $B(3, a, 1)$ 사이의 거리가 $2\sqrt{6}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 풀이자료 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리 공식에 z 좌표를 추가하기만 하면 된다.

$$\Rightarrow \text{두 점 } A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2) \text{ 사이의 거리는 } \overline{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

| 풀이 | (1) $A(2, 1, -3)$, $B(-2, -1, 3)$ 이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2-2)^2 + (-1-1)^2 + (3-(-3))^2} = 2\sqrt{14}$$

$$(2) \overline{AB} = 2\sqrt{6} \text{에서 } \overline{AB}^2 = 24 \text{이므로 } (3-1)^2 + (a-2)^2 + (1-(-3))^2 = 24$$

$$a^2 - 4a = 0, a(a-4) = 0 \quad \therefore a=0 \text{ 또는 } a=4$$

필수예제 092**같은 거리에 있는 점의 좌표**

좌표공간의 두 점 $A(-1, 1, 3)$, $B(3, 2, -2)$ 로부터 같은 거리에 있는 y 축 위의 점을 C 라고 할 때, 점 C 의 좌표를 구하여라.

▶ 풀이자료 좌표축이나 좌표평면 위의 점의 좌표를 정할 때는 관계없는 좌표를 0으로!

\Rightarrow ☆축 위의 점은 ☆좌표 빼고 나머지 좌표가 모두 0, ☆○평면 위의 점은 ☆좌표, ○좌표가 아닌 좌표는 0으로 놓는다.

| 풀이 | 점 C 는 y 축 위의 점이므로 $C(0, a, 0)$ 으로 놓을 수 있다.

$$\overline{AC} = \overline{BC} \text{에서 } \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \text{이므로}$$

$$\{0-(-1)\}^2 + (a-1)^2 + (0-3)^2 = (0-3)^2 + (a-2)^2 + \{0-(-2)\}^2$$

$$a^2 - 2a + 11 = a^2 - 4a + 17, 2a = 6 \quad \therefore a = 3 \quad \therefore C(0, 3, 0)$$

(1) 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리 $\rightarrow \overline{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$

(2) 좌표축 위의 점 또는 좌표평면 위의 점의 좌표는 관계없는 좌표를 0으로 놓는다.

대원칙

$\Rightarrow x$ 축 위의 점 : $(a, 0, 0)$ y 축 위의 점 : $(0, b, 0)$ z 축 위의 점 : $(0, 0, c)$

xy 평면 위의 점 : $(a, b, 0)$ yz 평면 위의 점 : $(0, b, c)$ zx 평면 위의 점 : $(a, 0, c)$

정답과 풀이 20쪽 ▶

유제 111 좌표공간의 세 점 $A(5, -2, 3)$, $B(3, 1, 2)$, $C(a, -1, 1)$ 에 대하여 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

유제 112 좌표공간의 세 점 $A(4, 0, 0)$, $B(2, 1, -1)$, $C(-3, 2, 1)$ 로부터 같은 거리에 있는 yz 평면 위의 점을 $P(a, b, c)$ 라고 할 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

필수예제 093**선분의 길이의 합의 최솟값**

좌표공간의 두 점 $A(2, 3, -4)$, $B(-1, 2, -1)$ 과 xy 평면 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값을 구하여라.

풀이 일단 두 점이 xy 평면을 기준으로 같은 쪽에 있는지 다른 쪽에 있는지 확인한다.

(1) 같은 쪽에 있으면? $\rightarrow A, B$ 중 한 점을 xy 평면에 대하여 대칭이동시켜 생각!

(2) 다른 쪽에 있으면? \rightarrow 구하는 최솟값은 선분 AB 의 길이! 물론 이런 문제가 나오진 않겠지만.

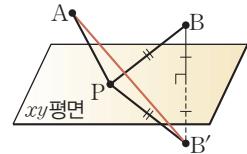
| 풀이 | 두 점 A, B 의 z 좌표의 부호가 같으므로 두 점은 xy 평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 B 와 xy 평면에 대하여 대칭인 점을 B' 이라고 하면 xy 평면 위의 점 P 에 대하여 $\overline{BP} = \overline{B'P}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AP} + \overline{B'P} \geq \overline{AB'}$$

이때 $B'(-1, 2, 1)$ 이므로 구하는 최솟값은

$$\overline{AB'} = \sqrt{(-1-2)^2 + (2-3)^2 + (1-(-4))^2} = \sqrt{35}$$

**필수예제 094****선분의 좌표평면 위로의 정사영**

좌표공간의 두 점 $A(6, 1, -2)$, $B(2, 5, 1)$ 에 대하여 \overline{AB} 의 yz 평면 위로의 정사영의 길이가 a , zx 평면 위로의 정사영의 길이가 b 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

풀이 두 점 A, B 의 각 평면 위로의 정사영은 각 점에서 그 평면에 내린 수선의 발! 정사영의 길이란 두 점에서 내린 수선의 발 사이의 거리로 구할 수 있다.

| 풀이 | 두 점 A, B 의 yz 평면 위로의 정사영을 각각 A', B' 이라고 하면

$$A'(0, 1, -2), B'(0, 5, 1) \quad \therefore a = \overline{A'B'} = \sqrt{(0-0)^2 + (5-1)^2 + (1-(-2))^2} = 5$$

두 점 A, B 의 zx 평면 위로의 정사영을 각각 A'', B'' 이라고 하면

$$A''(6, 0, -2), B''(2, 0, 1) \quad \therefore b = \overline{A''B''} = \sqrt{(2-6)^2 + (0-0)^2 + (1-(-2))^2} = 5$$

$$\therefore a+b=10$$

(1) 좌표평면 위의 점 P 와 이 평면에 대해 같은 쪽에 있는 두 점 A, B 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값을 구할 때에는 A, B 중 한 점을 이 평면에 대하여 대칭이동시켜 생각한다.

대원칙 \rightarrow 점 A 를 대칭이동시킨 점을 A' 이라고 하면 구하는 최솟값은 $\overline{A'B}$ 의 길이가 된다.

(2) 선분 AB 의 좌표평면 위로의 정사영의 길이는 선분의 양 끝점에서 이 평면에 내린 수선의 발 사이의 거리로 구할 수 있다. \rightarrow 선분과 정사영이 이루는 각의 크기가 θ 일 때, $(\text{정사영의 길이}) = (\text{선분의 길이}) \times \cos \theta$

정답과 풀이 20쪽 ►

유제 113 좌표공간의 두 점 $A(-2, -4, 6)$, $B(-1, 2, a)$ 와 yz 평면 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값이 $3\sqrt{6}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a > 5$)

유제 114 좌표공간의 두 점 $A(1, 2, 3)$, $B(4, 6, 8)$ 에 대하여 직선 AB 와 xy 평면이 이루는 각의 크기를 구하여라.

3

선분의 내분점과 외분점

2. 공간좌표

01 선분의 내분점과 외분점

좌표공간의 두 점 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ 에 대하여

(1) 선분 AB 를 $m : n$ ($m > 0, n > 0$)으로 내분하는 점 P 의 좌표는

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

(2) 선분 AB 를 $m : n$ ($m > 0, n > 0, m \neq n$)으로 외분하는 점 Q 의 좌표는

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

증명자료 좌표평면에서 → 두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 에 대하여 선분 AB 를 $m : n$ ($m > 0, n > 0$)으로

내분하는 점 P 의 좌표는 $P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

외분하는 점 Q 의 좌표는 $Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$ (단, $m \neq n$)

좌표공간에서의 선분의 내분점, 외분점 공식과 다른 것은 z 좌표가 있고 없고의 차이. x 축, y 축만 있던 좌표평면에 z 축을 추가해서 좌표공간을 만들었으니 좌표평면에서 쓰던 공식에 z 좌표를 얹어 가야지.

새삼스럽게 와우고 말고 할 것도 없다. z 좌표를 추가로 잘 챙겨 다니는 것만 잊지 말자.

02 선분의 중점

좌표공간의 두 점 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ 에 대하여 선분 AB 의 중점 M 의 좌표는

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

증명자료 선분의 중점은 그 선분을 $1 : 1$ 로 내분하는 점이다. 선분의 중점의 좌표는 좌표공간에서도 마찬가지로 내분점의 공식에서 $m=1, n=1$ 인 경우와 동일!

03 삼각형의 무게중심

좌표공간의 세 점 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 무게중심 G 의 좌표는

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

증명자료 좌표도 3종류, 점도 3종류. 계산하다 섞여 버리면 대략 난감. x 좌표는 x 좌표끼리 계산해서 x 좌표자리에, y 좌표는 y 좌표끼리 계산해서 y 좌표자리에, z 좌표는 z 좌표끼리 계산해서 z 좌표자리에 딱딱!

◎ 선분의 내분점의 확인

오른쪽 그림과 같이 좌표공간의 두 점 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ 에 대하여 선분 AB 를 $m:n$ ($m>0, n>0$)으로 내분하는 점을 $P(x, y, z)$ 라고 하자.

세 점 A, B, P 의 xy 평면 위로의 정사영을 각각 A', B', P' 이라고 하면

$$A'(x_1, y_1, 0), B'(x_2, y_2, 0), P'(x, y, 0)$$

이때 $\overline{AP} : \overline{BP} = \overline{A'P'} : \overline{B'P'} = m : n$ 이므로 선분 $A'B'$ 의 내분점

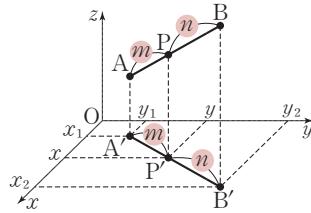
$$\text{의 좌표를 } xy\text{ 평면에서 생각하면 } x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

같은 방법으로 세 점 A, B, P 의 yz 평면(또는 zx 평면) 위로의 정사영을 이용하여 점 P 의 z 좌표를 구하면

$$z = \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}$$

따라서 선분 AB 를 $m:n$ ($m>0, n>0$)으로 내분하는 점 P 의 좌표는

$$P\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}\right)$$



◎ 선분의 외분점의 확인

좌표공간의 두 점 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ 에 대하여 선분 AB 를 $m:n$ ($m>0, n>0, m \neq n$)으로 외분하는 점을 Q 라고 할 때, 좌표공간에서 세 점 A, B, Q 의 xy 평면 위로의 정사영, yz 평면(또는 zx 평면) 위로의 정사영을 이용하여 내분점을 구한 것과 같은 방법으로 구할 수 있다.

따라서 선분 AB 를 $m:n$ ($m>0, n>0, m \neq n$)으로 외분하는 점 Q 의 좌표는

$$Q\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}, \frac{mz_2 - nz_1}{m-n}\right)$$

◎ 삼각형의 무게중심의 확인

오른쪽 그림과 같이 좌표공간의 세 점

$$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$$

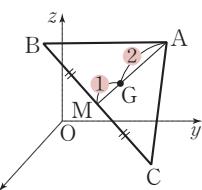
을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 에서 변 BC 의 중점을 M 이라고 하면

$$M\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}, \frac{z_2 + z_3}{2}\right)$$

$\triangle ABC$ 의 무게중심을 $G(x, y, z)$ 라고 하면 점 G 는 선분 AM 을 $2:1$ 로 내분하는 점이므로

$$x = \frac{\frac{2 \cdot x_2 + x_3}{2} + 1 \cdot x_1}{2+1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, y = \frac{\frac{2 \cdot y_2 + y_3}{2} + 1 \cdot y_1}{2+1} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},$$

$$z = \frac{\frac{2 \cdot z_2 + z_3}{2} + 1 \cdot z_1}{2+1} = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$



따라서 $\triangle ABC$ 의 무게중심 G 의 좌표는 $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$ 이다.

필수예제 095**선분의 내분점, 외분점, 중점**

두 점 A(1, 2, 3), B(4, 5, 6)에 대하여 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점을 P, 1 : 2로 외분하는 점을 Q, 선분 PQ의 중점을 M이라고 할 때, 세 점 P, Q, M의 좌표를 구하여라.

▶ 풀이자

좌표평면 위의 두 점을 잇는 선분의 내분점, 외분점 공식에 z 좌표만 추가하면 끝.

x 좌표는 x 좌표끼리, y 좌표는 y 좌표끼리, z 좌표는 z 좌표끼리! 곱하고 더하고 정신없지만 훈동하지 말자.

| 풀이 | 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점이 P이므로

$$P\left(\frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 1}{1+2}, \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 2}{1+2}, \frac{1 \cdot 6 + 2 \cdot 3}{1+2}\right) \quad \therefore P(2, 3, 4)$$

선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점이 Q이므로

$$Q\left(\frac{1 \cdot 4 - 2 \cdot 1}{1-2}, \frac{1 \cdot 5 - 2 \cdot 2}{1-2}, \frac{1 \cdot 6 - 2 \cdot 3}{1-2}\right) \quad \therefore Q(-2, -1, 0)$$

$$\text{따라서 선분 PQ의 중점이 M이므로 } M\left(\frac{2+(-2)}{2}, \frac{3+(-1)}{2}, \frac{4+0}{2}\right) \quad \therefore M(0, 1, 2)$$

필수예제 096**좌표평면에 의한 내분, 외분**

두 점 A(4, 1, -2), B(2, -2, 4)를 이은 선분 AB가 xy 평면에 의해 $m : n$ 으로 내분될 때, 서로소인 두 자연수 m, n 에 대하여 m^2+n^2 의 값을 구하여라.

▶ 풀이자

선분 AB가 xy 평면에 의해 $m : n$ 으로 내분된다. → 내분점이 xy 평면 위에 있다. → 내분점의 z 좌표가 0이다.

| 풀이 | 선분 AB가 xy 평면에 의해 $m : n$ 으로 내분되므로 xy 평면 위의 점이 선분 AB를 $m : n$ 으로 내분한다.

이때 xy 평면 위의 점의 z 좌표는 0이므로 내분점의 z 좌표도 0이다.

$$\text{즉, } 0 = \frac{m \cdot 4 + n \cdot (-2)}{m+n} \text{이므로 } 4m - 2n = 0 \quad \therefore n = 2m$$

$$\text{따라서 } m : n = m : 2m = 1 : 2 \text{이므로 } m^2 + n^2 = 1^2 + 2^2 = 5$$

| 참고 | 두 점 A, B의 z 좌표의 부호가 다르다. → 두 점은 xy 평면의 반대쪽에 있다. → xy 평면은 선분 AB를 내분한다.

두 점 A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)에 대하여 내분점과 외분점 공식을 이용한다. (단, $m > 0, n > 0$)

대원칙

\overline{AB} 를 $m : n$ 으로 내분	\overline{AB} 를 $m : n$ ($m \neq n$)으로 외분	\overline{AB} 의 중점
$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$	$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$	$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

▶ 정답과 풀이 20쪽 ►

유제 115 두 점 A(-1, 3, 4), B(2, 0, 1)에 대하여 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점을 P, 2 : 1로 외분하는 점을 Q라고 할 때, 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하여라.

유제 116 두 점 A(1, -3, 5), B(-3, 1, 2)에 대하여 선분 AB가 yz 평면에 의해 1 : m 으로 내분될 때, 양수 m 의 값을 구하여라.

필수예제 097**평행사변형의 응용**

네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 평행사변형 ABCD에 대하여 A(1, 2, 3), B(4, 5, 4), C(3, 2, 1)일 때, 나머지 한 꼭짓점 D의 좌표를 구하여라.

▶ 풀이자

평행사변형이라고 썩 찌어 말한 이유는? 평행사변형의 성질을 이용하라는 것! 주어진 꼭짓점이 3개뿐인데 평행사변형의 성질 중 이웃하는 변의 길이에 대한 것은 없다. 각의 크기에 대한 성질도 이용할 수 없다. 그렇다면 남은 것은? 두 대각선이 서로를 이등분한다는 성질!

| 풀이 | 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 두 대각선의 중점은 일치한다.

대각선 AC의 중점을 M이라고 하면

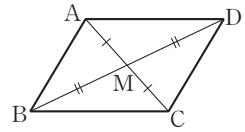
$$M\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+2}{2}, \frac{3+1}{2}\right) \quad \therefore M(2, 2, 2)$$

평행사변형의 나머지 한 꼭짓점 D의 좌표를 D(a, b, c)라고 하면 점 M과 대각선 BD

$$\text{의 중점이 일치하므로 } \frac{4+a}{2}=2, \frac{5+b}{2}=2, \frac{4+c}{2}=2 \quad \therefore a=0, b=-1, c=0$$

$$\therefore D(0, -1, 0)$$

| 참고 | 중학교 때 들은 이야기라 잊었는가? 꼭짓점을 이용하여 도형의 이름을 부를 때는 꼭짓점의 배열 순서대로 부른다는 것. ‘평행사변형 ABCD’라는 도형의 꼭짓점의 배열 순서는 A → B → C → D. 방향은 시계 반대 방향이 일반적이지만 시계 방향도 가능하다. 다만, 배열 순서는 반드시 적혀 있는 대로!

**필수예제 098****삼각형의 무게중심**

세 점 A(a, 1, 2), B(3, b, 4), C(5, 6, c)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표가 G(7, 8, 9)일 때, a, b, c의 값을 구하여라.

▶ 풀이자

좌표평면에서의 삼각형의 무게중심 공식에 z좌표만 빼 염으면 된다.

| 풀이 | △ABC의 무게중심 G의 좌표가 G(7, 8, 9)이므로

$$\frac{a+3+5}{3}=7, \frac{1+b+6}{3}=8, \frac{2+4+c}{3}=9 \quad \therefore a=13, b=17, c=21$$

(1) 사각형의 대각선에 대한 성질에 내분점, 외분점을 적용하여 문제를 해결한다.

사각형 ABCD가 ① 평행사변형 → 두 대각선은 서로를 이등분한다. → \overline{AC} 와 \overline{BD} 의 중점 일치

대원칙

② 마름모 → 두 대각선은 서로를 수직이등분한다. → \overline{AC} 와 \overline{BD} 의 중점 일치, $\overline{AB}=\overline{BC}$

(2) 세 점 A(x₁, y₁, z₁), B(x₂, y₂, z₂), C(x₃, y₃, z₃)을 꼭짓점으로 하는 △ABC의 무게중심 G의 좌표

$$\rightarrow G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

▶ 정답과 풀이 21쪽 ►

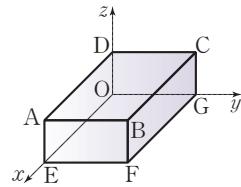
유제 117 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 평행사변형 ABCD에 대하여 A(-3, 2, 5), B(2, 5, 3)이고 두 대각선의 교점 M의 좌표가 M(-1, 3, 4)일 때, \overline{AD} 의 길이를 구하여라.

유제 118 좌표공간에 놓인 삼각형 ABC에서 \overline{BC} 의 중점 M의 좌표가 M(3, 4, -1), 무게중심 G의 좌표가 G(-1, 3, 0)일 때, 삼각형 ABC의 꼭짓점 A의 좌표를 구하여라.

연습문제

Step 1

- 138** 오른쪽 그림과 같이 세 모서리 OE, OG, OD 가 각각 x 축, y 축, z 축에 놓여 있는 직육면체가 있다. 꼭짓점 B 의 좌표가 $B(a, b, 3)$ 이고 꼭짓점 A 와 y 축에 대하여 대칭인 점의 좌표가 $(-5, c, -3)$, 꼭짓점 C 와 xy 평면에 대하여 대칭인 점의 좌표가 $(d, 4, -3)$ 일 때, $a+b+c+d$ 의 값을 구하여라.



- 139** 세 점 $A(2, 3, -1), B(1, 2, 2), C(a, -4, 0)$ 에 대하여 $2\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

- 140** 두 점 $A(5, -2, -1), B(2, 1, -2)$ 와 x 축 위의 점 $C(a, 0, 0)$ 에 대하여 삼각형 ABC가 \overline{AB} 를 빗변으로 하는 직각삼각형일 때, a 의 값을 구하여라.

- 141** 두 점 $A(-2, -1, 3), B(3, 1, 2)$ 와 xy 평면 위를 움직이는 점 P 에 대하여 삼각형 ABP의 둘레의 길이의 최솟값을 구하여라.

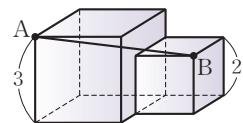
- 142** 세 점 $A(-2, 2, 1), B(1, -1, 4), C(1, 1, 2)$ 에 대하여 선분 AB 를 $1 : 2$ 로 내분하는 점을 P , 선분 BC 를 $2 : 1$ 로 외분하는 점을 Q 라고 하자. 두 점 P, Q 의 yz 평면 위로의 정사영을 각각 P' , Q' 이라고 할 때, $\overline{P'Q'}$ 의 길이를 구하여라.

- 143** 두 점 $A(3, 6, 4), B(a, b, c)$ 를 이은 선분 AB 가 xy 평면에 의해 $2 : 1$ 로 내분되고, z 축에 의해 $3 : 1$ 로 외분된다고 할 때, a, b, c 의 값을 구하여라.

- 144** 네 점 A, B, C, D 를 꼭짓점으로 하는 평행사변형 $ABCD$ 에서 $A(3, -2, 5), C(-5, 4, 1)$ 이다. 네 변의 중점을 각각 P, Q, R, S 라고 할 때, 사각형 $PQRS$ 의 두 대각선의 교점을 구하여라.

Step 2

- 145** 한 모서리의 길이가 각각 2, 3인 두 정육면체를 오른쪽 그림과 같이 붙여 놓았다. 두 꼭짓점 A, B 사이의 거리를 구하여라.



- 146** 세 점 $A(3, 2, 1)$, $B(1, 0, 3)$, $C(-1, -2, 1)$ 에 대하여 $\angle BAC = \theta$ 라고 할 때, $\cos \theta$ 의 값을 구하여라.

- 147** xy 평면 위에 점 $C(-3, 1, 0)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 이 원 위의 점 P와 점 $A(-1, 1, 3)$ 사이의 거리의 최솟값을 구하여라.

- 148** 두 점 $A(0, 0, 3)$, $B(3, 3, 3)$ 과 zx 평면 위의 점 C에 대하여 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 점 C의 좌표를 모두 구하여라.

- 149** 좌표공간의 두 점 $A(1, 2, 3)$, $B(3, 2, 1)$ 과 zx 평면 위의 점 P, yz 평면 위의 점 Q에 대하여 $\overline{AQ} + \overline{PQ} + \overline{PB}$ 의 최솟값을 구하여라.

- 150** 세 점 $A(1, 0, 3)$, $B(0, 0, 2)$, $C(0, \sqrt{2}, 2)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC와 xy 평면이 이루는 각의 크기를 구하여라.

- 151** 좌표공간의 점 $A(2, -3, 4)$ 를 점 $P(3, 1, -2)$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 (a, b, c) 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

- 152** 네 점 $A(4, 1, -1)$, $B(a, -2, 2)$, $C(1, 1, 2)$, $D(b, 2, 3)$ 을 꼭짓점으로 하는 사면체 A-BCD가 정사면체일 때, 삼각형 BCD의 무게중심의 좌표를 구하여라. (단, $b > 4$)

4

구의 방정식

2. 공간좌표

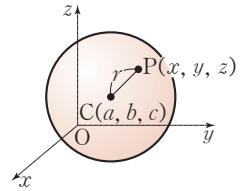
01 구의 방정식

(1) 중심이 $C(a, b, c)$ 이고, 반지름의 길이가 r 인 구의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

(2) 중심이 원점 $O(0, 0, 0)$ 이고, 반지름의 길이가 r 인 구의 방정식은

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$



【풀신자료】 평면 위의 한 점에서 일정한 거리에 있는 점 전체의 집합을 원이라 하고, 공간의 한 점에서 일정한 거리에 있는 점 전체의 집합을 구하고 한다.

원과 구는 정의로 보면 큰 차이가 없다. 평면에서나 공간에서나의 차이, 즉 노는 물이 다를 뿐. 한 점에서 일정한 거리에 있는 녀석들이 평면에서 뭉치면 원을 형성하고, 공간에서 뭉치면 구를 형성한다. 구에 대한 얘기는 대부분 원에 대한 얘기와 거의 비슷하게 느껴질 것이다. 차이가 있다면 원에 없던 z 좌표가 추가되었다는 정도.

좌표평면에서 원의 방정식	좌표공간에서 구의 방정식
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$	$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

구를 공부하다 어렵다 싶으면 주저하지 말고 수학 I 의 원으로 되돌아가 복습한다.

【풀신자료】 원이라는 도형이 동그란 테두리만 이야기하듯이 구도 공의 껍데기만을 말하는 도형이다. 구 안에 들어 있는 알맹이는 구의 내부일 뿐, '구'라는 도형의 일부가 아니라는 점.

【풀신자료】 구의 방정식은 정의에서 고스란히 얻어낼 수 있다.

중심이 $C(a, b, c)$, 반지름의 길이가 r 인 구 위의 점을 $P(x, y, z)$ 라고 하면 구의 정의에 따라

$$\overline{CP} = r \iff \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r \iff (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

02 좌표평면에 접하는 구의 방정식

중심이 $C(a, b, c)$ 이고

(1) xy 평면에 접하는 구의 방정식 $\rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = c^2$

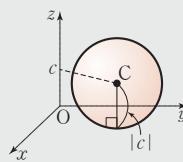
(2) yz 평면에 접하는 구의 방정식 $\rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = a^2$

(3) zx 평면에 접하는 구의 방정식 $\rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = b^2$

【풀신자료】 구가 좌표평면과 접하면 구의 중심 C 에서 그 좌표평면까지의 거리가 반지름의 길이가 된다.

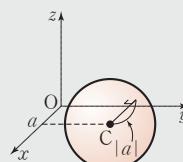
xy 평면에 접하면

$$\begin{aligned} (\text{반지름의 길이}) &= |\text{중심의 } z\text{ 좌표}| \\ &= |c| \end{aligned}$$



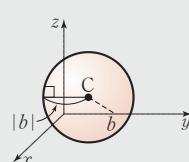
yz 평면에 접하면

$$\begin{aligned} (\text{반지름의 길이}) &= |\text{중심의 } x\text{ 좌표}| \\ &= |a| \end{aligned}$$



zx 평면에 접하면

$$\begin{aligned} (\text{반지름의 길이}) &= |\text{중심의 } y\text{ 좌표}| \\ &= |b| \end{aligned}$$



03 이차방정식 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ 이 나타내는 도형

이차방정식 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ ($A^2+B^2+C^2-4D>0$)은

중심의 좌표가 $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$, 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}}{2}$ 인 구를 나타낸다.

증명 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0 \Rightarrow \left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2+C^2-4D}{4}$ 로 변형할 수 있다.

여기서 $\sqrt{\frac{A^2+B^2+C^2-4D}{4}}=\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}}{2}$ 가 실수이어야 하므로 $A^2+B^2+C^2-4D>0$ 인 조건이 필요하다.

04 공간에서 구의 위치 관계

(1) 두 구의 위치 관계

두 구 C, C' 의 반지름의 길이를 각각 r, r' ($r>r'$), 두 구의 중심 사이의 거리를 d 라고 할 때,

① $d>r+r'$ \iff 구 C 의 외부에 구 C' 이 있다.

② $d=r+r'$ \iff 두 구 C, C' 이 서로의 밖에서 접한다. (외접한다.)

③ $r-r' < d < r+r'$ \iff 구 C 와 구 C' 이 한 원에서 만난다.

④ $d=r-r'$ \iff 구 C' 이 구 C 의 내부에서 접한다. (내접한다.)

⑤ $0 \leq d < r-r'$ \iff 구 C 의 내부에 구 C' 이 있다.

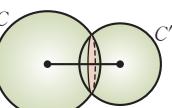
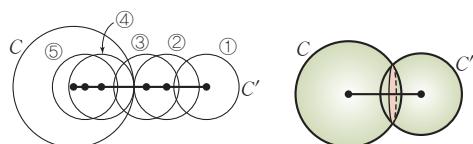
(2) 구와 평면의 위치 관계 : 구의 반지름의 길이를 r , 구의 중심과 평면 사이의 거리를 d 라고 할 때,

① $d < r \iff$ 한 원에서 만난다. ② $d=r \iff$ 접한다. ③ $d > r \iff$ 만나지 않는다.

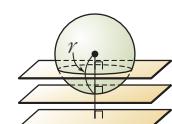
증명 두 구가 접근할수록 중심 사이의 거리는 가까워진다.

외접할 때에는 중심 사이의 거리가 반지름의 길이의 합과 같아진다. 계속 움직여서 두 구가 내접할 때에는 중심 사이의 거리가 반지름의 길이의 차와 같아진다. 여기서 외접 조건 $d=r+r'$ 과 내접 조건 $d=r-r'$ 이 나온 것이다.

또, 두 구가 외접과 내접 사이일 때는 한 원에서 만난다. 이때 중심 사이의 거리는 반지름의 길이의 합과 차 사이에 있다.



증명 구를 평면으로 자를 때, 어떠한 방향에서 자르더라도 단면은 원이 된다. 즉, 구의 중심과 평면 사이의 거리가 구의 반지름의 길이보다 작으면 구와 평면은 한 원에서 만난다.



05 구와 좌표평면의 교선의 방정식

구 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ 과

(1) xy 평면이 만나 생기는 교선의 방정식 $\rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2-c^2$ (단, $r^2>c^2$)

(2) yz 평면이 만나 생기는 교선의 방정식 $\rightarrow (y-b)^2+(z-c)^2=r^2-a^2$ (단, $r^2>a^2$)

(3) zx 평면이 만나 생기는 교선의 방정식 $\rightarrow (x-a)^2+(z-c)^2=r^2-b^2$ (단, $r^2>b^2$)

증명 구와 평면이 만나 생기는 도형은 원이다. 그런데 한 좌표평면 위의 점은 관계없는 좌표가 0이다. 예를 들어 어떤 구와 xy 평면이 만나 생기는 교선은 z 좌표가 0인 구 위의 점들을 의미하게 된다. 즉, 구 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ 에서 $z=0$ 인 평면과의 교선은 $(x-a)^2+(y-b)^2+(0-c)^2=r^2 \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2-c^2$ 나머지 경우도 마찬가지.

필수예제 099

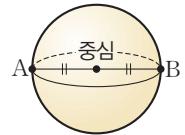
구의 방정식

다음 구의 방정식을 구하여라.

- (1) 중심의 좌표가 $(1, -2, 3)$ 이고 반지름의 길이가 4인 구
- (2) 중심의 좌표가 $(-1, -2, 3)$ 이고 점 $(3, -2, -1)$ 을 지나는 구
- (3) 두 점 $A(1, 2, 3), B(3, 4, 5)$ 를 지름의 양 끝점으로 하는 구

풀이 중심의 좌표가 (a, b, c) 이고 반지름의 길이가 r 인 구의 방정식 $\rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$
특히, 지름의 양 끝점이 주어진 경우에는 지름의 중점을 구의 중심이다.

- | 풀이 | (1) $(x-1)^2 + (y-(-2))^2 + (z-3)^2 = 4^2 \quad \therefore (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$
- (2) 구의 반지름의 길이를 r 라고 하면 구 $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = r^2$ 의 점 $(3, -2, -1)$ 을 지나므로
 $(3+1)^2 + (-2+2)^2 + (-1-3)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 32$
 따라서 구하는 구의 방정식은 $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 32$
- (3) 구의 중심은 \overline{AB} 의 중점이므로 $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+4}{2}, \frac{3+5}{2}\right) \quad \therefore (2, 3, 4)$
 구의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{3}$
 따라서 구하는 구의 방정식은 $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 3$



필수예제 100

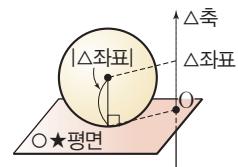
좌표평면에 접하는 구의 방정식

중심의 좌표가 $(3, 4, 5)$ 이고, 다음 조건을 만족시키는 구의 방정식을 구하여라.

- (1) xy 평면에 접하는 구 (2) yz 평면에 접하는 구 (3) zx 평면에 접하는 구

풀이 구가 좌표평면과 접하면 구의 중심에서 그 좌표평면까지의 거리가 반지름의 길이이다.

- | 풀이 | (1) (반지름의 길이) = | 중심의 z 좌표 | = 5이므로 $(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 25$
 (2) (반지름의 길이) = | 중심의 x 좌표 | = 3이므로 $(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 9$
 (3) (반지름의 길이) = | 중심의 y 좌표 | = 4이므로 $(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 16$



- (1) 중심의 좌표가 (a, b, c) 이고 반지름의 길이가 r 인 구의 방정식 $\rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

대원칙

- (2) 구의 지름의 양 끝점 A, B가 주어진 경우 \rightarrow 구의 중심은 \overline{AB} 의 중점, 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AB}$

- (3) 구가 좌표평면과 접하면 구의 중심에서 그 좌표평면까지의 거리가 반지름의 길이이다. \rightarrow 중심의 좌표가 (a, b, c) 인 구가 xy 평면, yz 평면, zx 평면과 접할 때, 반지름의 길이는 순서대로 $|c|, |a|, |b|$ 이다.

정답과 풀이 21쪽 ▶

유제 119 다음 구의 방정식을 구하여라.

- (1) 중심의 좌표가 $(2, 3, -1)$ 이고 반지름의 길이가 1인 구
- (2) 중심의 좌표가 $(-1, 3, -2)$ 이고 점 $(4, 2, -1)$ 을 지나는 구
- (3) 두 점 $A(-1, -3, 3), B(3, -1, 1)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 구

유제 120 xy 평면, yz 평면, zx 평면에 동시에 접하는 구가 점 $(1, 1, 2)$ 를 지날 때, 이 구의 부피를 구하여라.

필수예제 101**구의 방정식의 일반형**

이차방정식 $x^2+y^2+z^2-2y+4z-4=0$ 이 나타내는 도형은 중심의 좌표가 (a, b, c) 이고 반지름의 길이가 r 인 구일 때, $a+b+c+r$ 의 값을 구하여라.

풀이 완전제곱식을 이용하여 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ 꼴의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ 꼴로 변형 한다.

$$\begin{aligned} \text{풀이 } | & \text{ 이차방정식 } x^2+y^2+z^2-2y+4z-4=0 \text{에서 } x^2+(y^2-2y)+(z^2+4z)=4 \\ & x^2+(y^2-2y+1)+(z^2+4z+4)=4+1+4 \quad \therefore x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9 \end{aligned}$$

따라서 주어진 이차방정식이 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(0, 1, -2)$ 이고 반지름의 길이가 3인 구이므로 $a+b+c+r=0+1+(-2)+3=2$

필수예제 102**네 점을 지나는 구의 방정식**

네 점 $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)$ 을 지나는 구의 방정식을 구하여라.

풀이 구하는 구의 방정식을 구하는 대부분의 문제는 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ 으로 놓고 푸는 것이 좋다.

특히, 중심의 좌표나 반지름의 길이가 주어진 경우 꼭 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ 을 쓴다.

하나, 네 점의 좌표가 주어진 경우만은 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ 으로 놓는다.

풀이 구하는 구의 방정식을 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ 으로 놓으면

점 $(0, 0, 0)$ 을 지나므로 $D=0$

$$\text{점 } (1, 0, 0) \text{을 지나므로 } 1+A+D=0 \quad \therefore A=-1$$

$$\text{점 } (0, 2, 0) \text{을 지나므로 } 4+2B+D=0 \quad \therefore B=-2$$

$$\text{점 } (0, 0, 3) \text{을 지나므로 } 9+3C+D=0 \quad \therefore C=-3$$

$$\text{따라서 구하는 구의 방정식은 } x^2+y^2+z^2-x-2y-3z=0$$

원칙

(1) 구의 방정식이 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ 꼴로 주어지면 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ 꼴로 변형하여 중심의 좌표 및 반지름의 길이를 구한다.

(2) 지나는 네 점이 주어진 구의 방정식을 구할 때에는 방정식을 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ 으로 놓고 네 점의 좌표를 대입하여 A, B, C, D 의 값을 구한다.

정답과 풀이 21쪽 ►

유제 121 이차방정식 $x^2+y^2+z^2-6x-4y+9=0$ 이 나타내는 도형의 부피를 구하여라.

유제 122 이차방정식 $x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z+k=0$ 이 나타내는 도형이 구가 되도록 하는 자연수 k 의 값의 개수를 구하여라.

유제 123 네 점 $(0, 0, 0), (0, -1, -1), (3, 3, 0), (5, 3, -4)$ 를 지나는 구의 중심의 좌표가 (a, b, c) 이고 반지름의 길이가 r 일 때, $a+b+c+r$ 의 값을 구하여라.

필수예제 103**두 구의 위치 관계**

두 구 $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = a+9$, $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ 가 외접하도록 하는 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 풀이자료 두 구가 외접할 때에는 중심 사이의 거리가 반지름의 길이의 합과 같을 때이다.

| 풀이 | 구 $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = a+9$ 의 중심의 좌표는 $(1, -2, 2)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{a+9}$ 이고 구 $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ 의 중심의 좌표는 $(1, 2, -1)$, 반지름의 길이는 3이다. 두 구의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(1-1)^2 + (2-(-2))^2 + (-1-2)^2} = 5$ 이므로 두 구가 외접하려면 $\sqrt{a+9} + 3 = 5$, $\sqrt{a+9} = 2$, $a+9=4 \quad \therefore a=-5$

필수예제 104**구와 좌표평면의 교선**

다음을 구하여라.

(1) 구 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$ 과 z 축이 두 점 A, B에서 만날 때, 선분 AB의 길이

(2) 구 $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ 과 xy 평면과 만나서 생기는 도형의 둘레의 길이

▶ 풀이자료 ◎축, ☆축, △축으로 이루어진 좌표공간에서 좌표축 또는 좌표평면과 도형이 만날 때,
◎축과 만나면 ☆=0, △=0 ◎☆평면과 만나면 △=0

| 풀이 | (1) 구와 z 축의 두 교점 A, B는 z 축 위의 점이므로 $x=0, y=0$ 을 구의 방정식에 대입하면

$$z^2 - 6z + 5 = 0, (z-1)(z-5) = 0 \quad \therefore z=1 \text{ 또는 } z=5$$

따라서 A(0, 0, 1), B(0, 0, 5) 또는 A(0, 0, 5), B(0, 0, 1)이므로 $\overline{AB}=4$

(2) 구와 xy 평면이 만나서 생기는 도형은 xy 평면 위의 점으로 이루어진 도형이므로 $z=0$ 을 구의 방정식에 대입하면

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (0-3)^2 = 25 \quad \therefore (x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$$

따라서 구와 xy 평면이 만나서 생기는 도형은 중심의 좌표가 $(1, 2, 0)$, 반지름의 길이가 4인 원이므로 이 도형의 둘레의 길이는 $2\pi \times 4 = 8\pi$

(1) 두 구의 반지름의 길이가 각각 r_1, r_2 ($r_1 > r_2$)이고 중심 사이의 거리가 d 일 때,

대원칙

① 외접 조건 : $d=r_1+r_2$

② 내접 조건 : $d=r_1-r_2$

(2) ◎축, ☆축, △축으로 이루어진 좌표공간에서 구가 ◎축과 만나면 ☆=0, △=0, ◎☆평면과 만나면 △=0

정답과 풀이 22쪽 ►

유제 124 두 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z + k = 0$ 이 내접하도록 하는 상수 k 의 값을 구하여라.

유제 125 구 $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = r^2$ 과 y 축이 만나는 두 점 사이의 거리가 4일 때, 구의 반지름의 길이 r 의 값을 구하여라.

유제 126 구 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + k = 0$ 을 zx 평면으로 자른 단면의 넓이가 100π 일 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

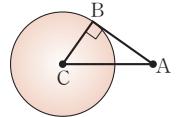
필수예제 105

구에 그은 접선의 길이

점 A(3, 4, 5)에서 구 $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$ 에 그은 접선의 길이를 구하여라.

증명자료 접점을 B라고 하면 오른쪽 그림에서 선분 AB의 길이를 구하라는 소리.

그런데 $\triangle ABC$ 는 $\angle B=90^\circ$ 인 직각삼각형이다. 우리에겐 중학교 때 배워서 두고두고 잘 쓰는 직각 삼각형에 대한 정리 하나, 바로 피타고拉斯 정리가 있다.



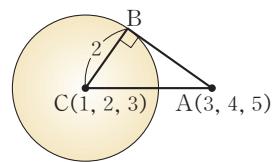
| 풀이 | 구의 중심을 C, 접점을 B라 하고 구의 반지름의 길이를 r 라고 하면

$$C(1, 2, 3), r=2 \quad \therefore \overline{AC}=\sqrt{(1-3)^2+(2-4)^2+(3-5)^2}=2\sqrt{3}, \overline{BC}=2$$

이때 구 밖의 점에서 구에 그은 접선은 그 접점과 구의 중심을 이은 반지름에 수직이므로 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC$ 는 $\angle ABC=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

따라서 구하는 접선의 길이는

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$



필수예제 106

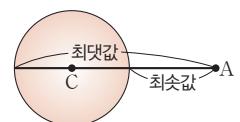
점과 구 사이의 거리

점 A(1, 2, 3)과 구 $(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$ 위의 점 사이의 거리의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라고 할 때, Mm 의 값을 구하여라.

증명자료 구 밖의 점과 구 위의 점 사이의 거리가 최대일 때, 최소일 때는 모두 구 위의 점이 구 밖의 점과 구의 중심을 연결한 직선 위에 있을 때이다.

→ (최대 거리)= (점과 중심 사이의 거리)+ (반지름의 길이)

(최소 거리)= (점과 중심 사이의 거리)- (반지름의 길이)



| 풀이 | 구의 중심을 C, 반지름의 길이를 r 라고 하면 $C(-2, 2, -1), r=2$

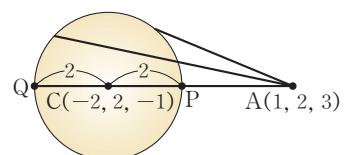
$$\therefore \overline{AC}=\sqrt{(-2-1)^2+(2-2)^2+(-1-3)^2}=5$$

오른쪽 그림과 같이 직선 AC와 구가 만나는 점 중 점 A에 가까운 점을 P, 점 A에서 멀리 있는 점을 Q라고 하자.

점 A와 구 위의 점을 잇는 선분을 그어 보면 구 위의 점이 P일 때 거리는 최소가 되고, 구 위의 점이 Q일 때 거리는 최대가 된다.

$$\therefore M=\overline{AQ}=\overline{AC}+\overline{CQ}=\overline{AC}+r=5+2=7,$$

$$m=\overline{AP}=\overline{AC}-\overline{CP}=\overline{AC}-r=5-2=3 \quad \therefore Mm=21$$



(1) 구 밖의 한 점에서 구에 그은 접선은 그 접점과 구의 중심을 이은 반지름에 수직이다.

대원칙

→ 접선, 반지름, 점과 구의 중심을 이은 선분을 세 변으로 하는 직각삼각형을 찾아라.

(2) 구 밖의 점과 구 위의 점 사이의 최대 거리, 최소 거리는 구 밖의 점과 구의 중심을 이은 직선을 그어 구한다.

정답과 풀이 22쪽 ▶

유제 127 점 A(5, 4, 3)에서 구 $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 36$ 에 그은 접선의 길이를 구하여라.

유제 128 구 $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 1$ 위의 점에서 xy 평면에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

Step 1

- 153** 좌표공간의 두 점 A(0, 0, 0), B(3, 0, 0)으로부터의 거리의 비가 2 : 1인 점 P의 자취는 구이다. 이 구의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하여라.

- 154** $\sqrt{x^2+y^2+z^2-6x-2y-2z+2}=0$ 위의 점 A(1, 2, 3)을 한 끝점으로 하는 지름의 다른 끝점을 B라고 할 때, 점 B의 좌표를 구하여라.

- 155** $\sqrt{x^2+y^2+z^2-2x+6y-2kz+10}=0$ 이 zx 평면에 접할 때, 양수 k 의 값을 구하여라.

- 156** $\sqrt{x^2+y^2+z^2-4x-6y-2kz+14}=0$ 이 yz 평면, zx 평면과 만나서 생기는 원의 넓이의 비가 3 : 2 일 때, 양수 k 의 값을 구하여라.

Step 2

- 157** 두 점 (1, 1, 1), (1, 1, 3)을 지나고, yz 평면, zx 평면에 동시에 접하는 구의 방정식을 구하여라.

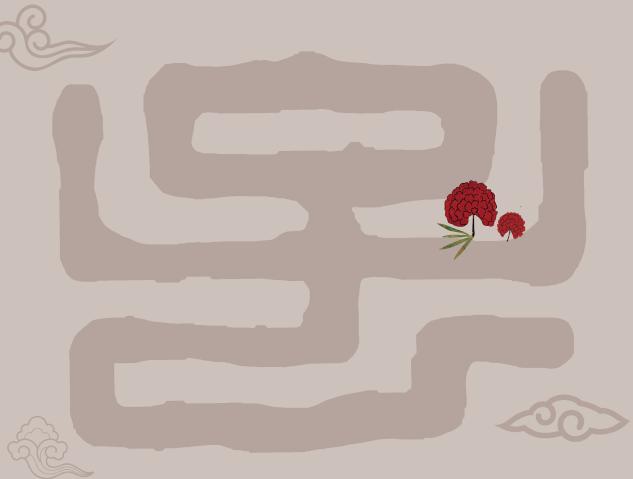
- 158** 두 구 $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=9-a$, $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=4$ 에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 골라라. (단, a 는 상수)

보기

- ㄱ. 두 구가 외접하면 $a=-8$ 이다.
- ㄴ. 두 구가 내접하면 $a=-16$ 이다.
- ㄷ. 두 구가 한 원에서 만나면 $-16 < a < -8$ 이다.

- 159** 점 A(3, 0, 4)에서 구 $x^2+y^2+z^2=9$ 에 접선을 그을 때, 접점이 그리는 도형의 둘레의 길이를 구하여라.

- 160** 구 $x^2+y^2+z^2+2x-6z+6=0$ 위를 움직이는 점 P와 구 $x^2+y^2+z^2-6x-4y+2z+5=0$ 위를 움직이는 점 Q에 대하여 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 구하여라.



III 공간도형과 공간벡터



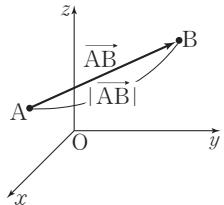
- 1 공간도형
- 2 공간좌표
- 3 공간벡터**



1 공간벡터의 뜻과 연산	146
2 공간벡터의 성분	153
3 공간벡터의 내적	158
• 연습문제	162
4 직선의 방정식	164
• 연습문제	171
5 평면의 방정식	173
6 공간벡터를 이용한 구의 방정식	181
• 연습문제	183

01 공간벡터의 뜻

- (1) **공간벡터** : 공간에서의 벡터
- (2) **벡터 \overrightarrow{AB}** : 점 A를 시점, 점 B를 종점으로 하는 벡터
- (3) **벡터 \overrightarrow{AB} 의 크기**($|\overrightarrow{AB}|$) : 선분 AB의 길이
- (4) 두 공간벡터 \vec{a}, \vec{b} 의 크기와 방향이 같은 경우 : $\vec{a} = \vec{b}$
- (5) 공간벡터 \vec{a} 와 크기는 같고 방향이 반대인 벡터 : $-\vec{a}$



【풍선자】 평면에서의 벡터를 평면벡터라 하듯이 공간에서의 벡터를 공간벡터라고 한다. 평면에서 정의되었던 벡터는 공간에서도 정의되며, 평면벡터의 성질이 공간벡터에서도 똑같이 적용된다. 평면벡터는 공간벡터의 일부이다.

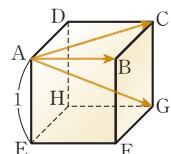
【풍선자】 공간에서도 크기가 1인 벡터를 단위벡터, 크기가 0인 벡터를 영벡터로 정의한다.

【풍선자】 벡터의 크기는 화살표의 길이를 의미하고, 벡터에서 절댓값은 벡터의 크기를 의미한다.

예 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정육면체에서

$$|\overrightarrow{AB}|=1, |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}, |\overrightarrow{AG}|=\sqrt{3}$$

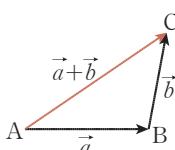
이고 \overrightarrow{AB} 는 단위벡터이다.



02 공간벡터의 덧셈과 뺄셈

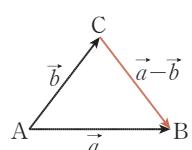
(1) 벡터의 덧셈

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC} \text{ 일 때,} \\ \vec{a} + \vec{b} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$



(2) 벡터의 뺄셈

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC} \text{ 일 때,} \\ \vec{a} - \vec{b} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{CB} \end{aligned}$$



【풍선자】 평면벡터에서와 마찬가지로 공간벡터에서도 덧셈에 대하여 다음이 성립한다.

임의의 세 공간벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 와 영벡터 $\vec{0}$ 에 대하여

$$(1) \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \leftarrow \text{교환법칙}$$

$$(3) \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

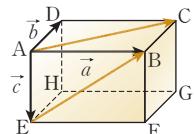
$$(2) (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

$$(4) \vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0} \quad \leftarrow \text{결합법칙}$$

예 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AE} = \vec{c}$ 라고 할 때

$$(1) \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$(2) \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} = \vec{a} - \vec{c}$$



03 공간벡터의 실수배

임의의 실수 k 와 공간벡터 \vec{a} 의 곱 $k\vec{a}$ 를 공간벡터 \vec{a} 의 실수배라 하고, 평면벡터에서와 마찬가지로 공간벡터에서도 다음이 성립한다.

(1) $\vec{a} \neq \vec{0}$ 일 때, $k\vec{a}$ 는

- ① $k > 0$ 이면 \vec{a} 와 방향이 같고, 크기가 $k|\vec{a}|$ 인 벡터이다.
- ② $k < 0$ 이면 \vec{a} 와 방향이 반대이고, 크기가 $|k||\vec{a}|$ 인 벡터이다.
- ③ $k = 0$ 이면 $k\vec{a} = \vec{0}$ 이다.

(2) $\vec{a} = \vec{0}$ 일 때, $k\vec{a} = \vec{0}$ 이다.

【증명】 평면벡터에서와 마찬가지로 공간벡터에서도 실수배에 대하여 다음이 성립한다.

임의의 두 실수 k, l 과 두 공간벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여

- (1) $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$ \leftarrow 결합법칙
- (2) $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ \leftarrow 분배법칙
- (3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ \leftarrow 분배법칙

예 $\rightarrow 4(\vec{a} + \vec{b}) - 2(\vec{a} - 3\vec{b}) = 4\vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{a} + 6\vec{b}$
 $= (4-2)\vec{a} + (4+6)\vec{b}$
 $= 2\vec{a} + 10\vec{b}$

04 공간벡터의 평행 조건

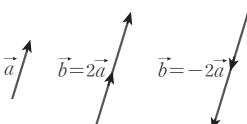
영벡터가 아닌 두 공간벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b} = k\vec{a} \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)}$$

【증명】 (1) 두 벡터가 평행하다.

평면벡터에서와 마찬가지로 영벡터가 아닌 두 공간벡터 \vec{a}, \vec{b} 의 방향이 같거나 반대일 때, 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 는 서로 평행하다고 하고, 이것을 기호 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 로 나타낸다.

앞으로 벗들은 “두 벡터가 평행하다.”라는 말이 있으면 무조건 다음 공식을 떠올린다.



영벡터가 아닌 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 평행하다. $\iff \vec{b} = k\vec{a}$ (단, k 는 0 이 아닌 실수)

(2) 세 점이 한 직선 위에 있다.

공간에서의 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재하면

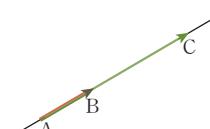
$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$$

이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

역으로 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면 $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ 를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재한다.

세 점이 한 직선 위에 있을 조건도 벡터의 실수배를 이용하여 구한다.

“세 점이 한 직선 위에 있다.”라는 말이 있으면 무조건 다음 공식을 떠올린다.



서로 다른 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있다. $\iff \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ (단, k 는 0 이 아닌 실수)

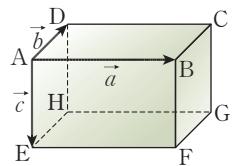
오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ 라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 다음 벡터를 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 로 나타내어라.

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| ① \overrightarrow{HG} | ② \overrightarrow{EH} | ③ \overrightarrow{CG} |
| ④ \overrightarrow{FE} | ⑤ \overrightarrow{CB} | ⑥ \overrightarrow{HD} |

(2) 벡터 \overrightarrow{EH} 와 서로 같은 벡터를 모두 말하여라.

(3) 벡터 \overrightarrow{AB} 와 크기는 같고 방향이 반대인 벡터를 모두 말하여라.



- 【 풀이자료】** (1) 크기는 같고 방향이 반대인 벡터는 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$ 를 이용하여 나타낸다.
 (2) 서로 같은 벡터는 크기와 방향이 모두 같다.

| 풀이 | (1) ① $\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$

$$\textcircled{2} \quad \overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AD}=\vec{b}$$

$$\textcircled{3} \quad \overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AE}=\vec{c}$$

$$\textcircled{4} \quad \overrightarrow{FE}=-\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{AB}=-\vec{a}$$

$$\textcircled{5} \quad \overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AD}=-\vec{b}$$

$$\textcircled{6} \quad \overrightarrow{HD}=-\overrightarrow{DH}=-\overrightarrow{AE}=-\vec{c}$$

(2) 서로 같은 벡터는 시점의 위치와 관계없이 크기와 방향이 같은 벡터이므로 \overrightarrow{EH} 와 서로 같은 벡터는

$$\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{FG}$$

$$(3) \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{FE}$$

(1) 서로 같은 벡터는 두 벡터의 시점과 종점이 다르더라도 크기와 방향이 모두 같은 벡터이다.

즉, 평행이동하여 겹쳐지는 모든 벡터는 서로 같다.

【 원칙】

(2) 크기가 같고 영벡터가 아닌 두 벡터 \vec{a} , \vec{b} 에 대하여

(i) 두 벡터의 방향이 서로 같으면 $\vec{a}=\vec{b}$

(ii) 두 벡터의 방향이 서로 반대이면 $\vec{a}=-\vec{b}$

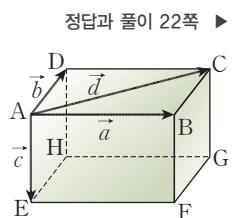
유제 129 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{d}$ 라고 할 때, 다음 벡터를 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} 로 나타내어라.

$$(1) \overrightarrow{EF}$$

$$(2) \overrightarrow{HE}$$

$$(3) \overrightarrow{GC}$$

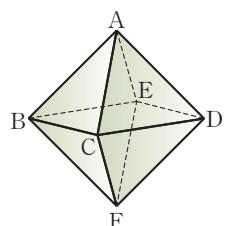
$$(4) \overrightarrow{EG}$$



유제 130 오른쪽 그림과 같은 정팔면체에서 다음 물음에 답하여라.

(1) 벡터 \overrightarrow{AC} 와 서로 같은 벡터를 모두 말하여라.

(2) 벡터 \overrightarrow{BF} 와 크기는 같고 방향이 반대인 벡터를 모두 말하여라.



필수예제 108

공간벡터의 덧셈과 뺄셈

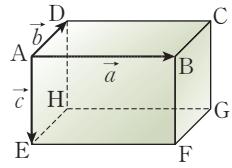
오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ 라고 할 때, 다음 벡터를 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 로 나타내어라.

(1) \overrightarrow{AF}

(3) \overrightarrow{AG}

(2) \overrightarrow{ED}

(4) \overrightarrow{FD}



증명자료 시점에서 종점까지 모서리를 따라 길찾기를 한다.

길찾기는 벡터의 덧셈이다. 길찾기 중 거쳐 가는 모서리를 더한다.

크기와 방향이 같으면 서로 같은 벡터이고, 방향이 반대이면 ‘-’가 들어 나옴을 이용한다.

| 풀이 | (1) $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}=(-\vec{c})+\vec{b}=\vec{b}-\vec{c}$

(3) $\overrightarrow{AG}=(점 A \text{에서 점 } G \text{까지})$

$=(A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow G)$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}$

$=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

(4) $\overrightarrow{FD}=(점 F \text{에서 점 } D \text{까지})$

$=(F \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow D)$

$=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$

$=(-\vec{c})+(-\vec{a})+\vec{b}$

$=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

(1) 벡터의 덧셈 : 일종의 말꼬리 잡기! 일종의 길찾기!

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$$

대원칙

(2) 벡터의 뺄셈 : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$$=(\text{뒤의 놈})-(\text{앞의 놈})$$

정답과 풀이 23쪽 ▶

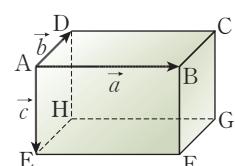
유제 131 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ 라고 할 때, 다음 벡터를 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 로 나타내어라.

(1) \overrightarrow{AH}

(2) \overrightarrow{EC}

(3) \overrightarrow{FC}

(4) \overrightarrow{GA}

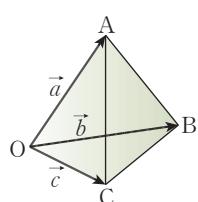


유제 132 오른쪽 그림과 같은 사면체에서 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ 라고 할 때, 다음 벡터를 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 로 나타내어라.

(1) \overrightarrow{AB}

(2) \overrightarrow{BC}

(3) \overrightarrow{CA}

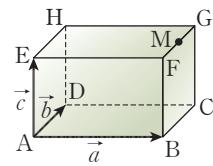


필수예제 109 공간벡터의 연산

오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ 라 하고 \overline{FG} 의 중점을 M이라고 할 때, 다음 벡터를 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 로 나타내어라.

(1) \overrightarrow{AM}

(2) \overrightarrow{DM}



풀이 시점에서 종점까지 모서리를 따라 길찾기를 한다. 길찾기 중 거쳐 가는 모서리를 더한다.

(1) $\overrightarrow{AM} = (A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow M) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FM} = \vec{a} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$ 임을 이용한다.

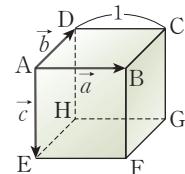
(2) $\overrightarrow{DM} = (D \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow M) = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GM} = \vec{b} + \vec{c} + \left(-\frac{1}{2}\vec{b}\right) = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$ 임을 이용한다.

| 풀이 | (1) $\overrightarrow{AM} = (\text{점 } A \text{에서 점 } M \text{까지}) = (A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow M) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FM} = \vec{a} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

(2) $\overrightarrow{DM} = (\text{점 } D \text{에서 점 } M \text{까지}) = (D \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow M) = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GM} = \vec{b} + \vec{c} + \left(-\frac{1}{2}\vec{b}\right) = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

필수예제 110 공간벡터의 크기

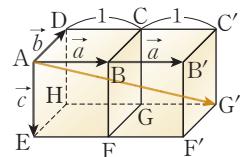
오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정육면체에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ 라고 할 때, $|2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ 의 값을 구하여라.



풀이 공간벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 이용하여 주어진 식을 하나의 벡터로 나타낸 다음 이 벡터의 크기를 구한다.

| 풀이 | 오른쪽 그림과 같이 $2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 는 가로의 길이가 2이고, 세로의 길이와 높이가 각각 1인 직육면체 $AB'C'D-EF'G'H$ 에서 $\overrightarrow{AG'}$ 이므로

$$|2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = |\overrightarrow{AG'}| = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{6}$$

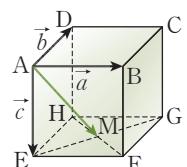


대원칙

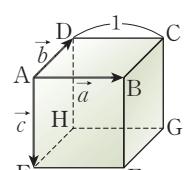
실수배를 포함한 벡터의 연산 → 수와 식의 계산과 동일하게 한다.

유제 133 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ 라 하고 \overrightarrow{EG} 와 \overrightarrow{FH} 의 교점을 M이라고 할 때, \overrightarrow{AM} 을 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 로 나타내어라.

정답과 풀이 23쪽 ▶



유제 134 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정육면체에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ 라고 할 때, $|\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}|$ 의 값을 구하여라.



필수예제 111**두 벡터가 평행할 조건**

서로 평행하지도 않고 영벡터도 아닌 두 공간벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 세 벡터 $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ 가

$$\vec{p}=\vec{a}+3\vec{b}, \vec{q}=5\vec{a}-m\vec{b}, \vec{r}=4\vec{a}+5\vec{b}$$

일 때, 두 벡터 $\vec{p}-\vec{r}, \vec{q}+\vec{r}$ 가 서로 평행하도록 하는 실수 m 의 값을 구하여라.

풀이 두 벡터가 평행하다? 딴 생각할 것 없다. 무조건 한 벡터는 다른 벡터의 실수배임을 떠올린다.

$$|\vec{p}-\vec{r}| = -3\vec{a}-2\vec{b}, \vec{q}+\vec{r}=9\vec{a}+(5-m)\vec{b}$$

$\vec{p}-\vec{r}, \vec{q}+\vec{r}$ 가 서로 평행하므로 $\vec{q}+\vec{r}=k(\vec{p}-\vec{r})$ (단, k 는 0이 아닌 실수)

즉, $9\vec{a}+(5-m)\vec{b}=k(-3\vec{a}-2\vec{b})$ 에서 $9=-3k, 5-m=-2k$

$$\therefore k=-3, m=-1$$

필수예제 112**세 점이 한 직선 위에 있을 조건**

서로 평행하지도 않고 영벡터도 아닌 두 공간벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=m\vec{a}-2\vec{b}$$

일 때, 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있도록 하는 실수 m 의 값을 구하여라.

풀이 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있다? 두 점씩 골라 벡터를 만들고 한 벡터는 다른 벡터의 실수배!

이때 주어진 벡터가 전부 시점이 O인 벡터니까 시점 통일 공식을 적용해서 정리하면 끝.

$$|\overrightarrow{AC}|=k\overrightarrow{AB} \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)}$$

$$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}) \text{ 이므로 } (m\vec{a}-2\vec{b})-\vec{a}=k(\vec{b}-\vec{a})$$

$$(m-1)\vec{a}-2\vec{b}=-k\vec{a}+k\vec{b} \text{에서 } m-1=-k, -2=k$$

$$\therefore k=-2, m=3$$

'영벡터가 아닌 두 벡터가 평행'

원칙

라는 말이 나오면 벡터의 실수배를 이용한다.

'세 점 A, B, C가 한 직선 위'

$$\rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b}=k\vec{a} \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)}$$

정답과 풀이 23쪽 ▶

유제 135 서로 평행하지도 않고 영벡터도 아닌 두 공간벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 세 벡터 $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ 가

$$\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}, \vec{q}=2\vec{a}-\vec{b}, \vec{r}=\vec{a}+m\vec{b}$$

일 때, 두 벡터 $\vec{p}, \vec{q}+\vec{r}$ 가 서로 평행하도록 하는 실수 m 의 값을 구하여라.

유제 136 서로 평행하지도 않고 영벡터도 아닌 두 공간벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여

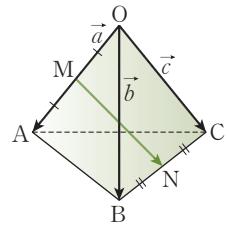
$$\overrightarrow{OA}=m\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=8\vec{a}-3\vec{b}$$

일 때, 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있도록 하는 실수 m 의 값을 구하여라.

필수예제 113

입체도형에서 내분점과 외분점의 위치벡터

오른쪽 그림과 같은 사면체에서 모서리 OA, BC의 중점을 각각 M, N이라 하고 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ 라고 할 때, \overrightarrow{MN} 을 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 로 나타내어라.



풀이 위치벡터의 시점이 O일 때, 선분 AB의 중점의 위치벡터는 $\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$ 임을 이용한다.

$$\text{점 } M \text{은 모서리 } OA \text{의 중점이므로 } \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2} \vec{a}$$

$$\text{점 } N \text{은 모서리 } BC \text{의 중점이므로 } \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2} (\vec{b} + \vec{c})$$

$$\therefore \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} (\vec{b} + \vec{c}) - \frac{1}{2} \vec{a}$$

$$= -\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{c}$$

(1) 선분 AB를 $m : n$ ($m > 0, n > 0$)으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라고 하면

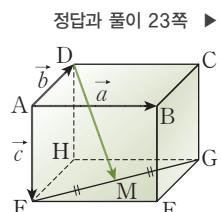
$$\overrightarrow{OP} = \frac{m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OA}}{m+n}, \overrightarrow{OQ} = \frac{m\overrightarrow{OB} - n\overrightarrow{OA}}{m-n} \quad (\text{단, } m \neq n)$$

원칙

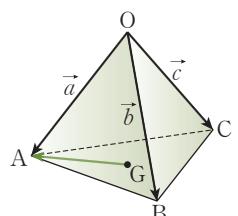
(2) 두 점 A, B의 위치벡터가 각각 \vec{a} , \vec{b} 일 때, 선분 AB의 중점의 위치벡터는 $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

(3) 세 점 A, B, C의 위치벡터가 각각 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 일 때, $\triangle ABC$ 의 무게중심의 위치벡터는 $\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$

유제 137 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 선분 EG의 중점을 M이라 하고 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$ 라고 할 때, \overrightarrow{DM} 을 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 로 나타내어라.



유제 138 오른쪽 그림과 같은 정사면체에서 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이 고 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ 라고 할 때, \overrightarrow{GA} 를 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 로 나타내어라.



01 공간벡터의 성분

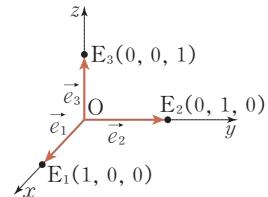
(1) 공간벡터의 단위벡터

좌표공간의 원점 O를 시점으로 하고 세 점

$$\mathbf{E}_1(1, 0, 0), \mathbf{E}_2(0, 1, 0), \mathbf{E}_3(0, 0, 1)$$

을 각각 종점으로 하는 세 단위벡터를 다음과 같이 나타낸다.

$$\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1, \overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2, \overrightarrow{OE_3} = \vec{e}_3$$



(2) 공간벡터의 성분

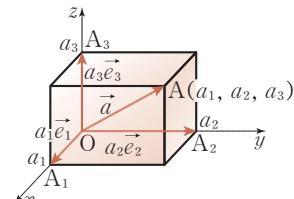
임의의 공간벡터 \vec{a} 에 대하여 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ 가 되는 점 A(a_1, a_2, a_3)에서

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = \vec{a}_1 \vec{e}_1 + \vec{a}_2 \vec{e}_2 + \vec{a}_3 \vec{e}_3$$

① 세 실수 a_1, a_2, a_3 을 공간벡터 \vec{a} 의 성분이라고 한다.

→ a_1 은 x 성분, a_2 는 y 성분, a_3 은 z 성분

② 벡터 \vec{a} 를 성분으로 나타내면 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$



증명자료 좌표공간에서 시점을 원점 O로 고정하면 벡터 \overrightarrow{OA} 는 점 A(a_1, a_2, a_3)에 대응한다.

이 점은 그 벡터에 대한 모든 것을 알려준다.

크기? → 원점에서 이 점까지의 거리.

방향? → 원점에서 이 점을 쳐다보는 방향.

그래서 $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ 으로 나타낸다.

이때 세 실수 a_1, a_2, a_3 을 벡터 \overrightarrow{OA} 의 성분이라 하고, a_1 을 x 성분, a_2 를 y 성분, a_3 을 z 성분이라고 한다.

A(a_1, a_2, a_3)일 때, $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3) \rightarrow$ 시점이 원점 O인 벡터의 성분은 종점의 좌표

증명자료 좌표공간에서 x 축, y 축, z 축의 양의 방향의 크기가 1인 벡터를 좌표공간의 단위벡터라 하고, 기호 \vec{e}_i 로 나타낸다.

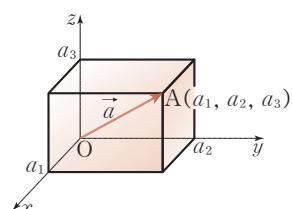
좌표공간의 단위벡터는 세 개이다. → $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$

02 공간벡터의 크기와 서로 같을 조건

두 공간벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 에 대하여

(1) 공간벡터의 크기 : $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

(2) 공간벡터가 서로 같을 조건 : $\vec{a} = \vec{b} \iff a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$



증명자료 두 벡터가 서로 같다는 건 크기와 방향이 같다는 것. 평행이동하면 겹쳐진다는 것이다.

시점이 고정되어 있는 공간벡터에서는 두 벡터가 서로 같다는 것은 종점이 서로 같다는 이야기!

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \rightarrow (\text{점 } A) = (\text{점 } B) \rightarrow x\text{좌표는 } x\text{좌표끼리}, y\text{좌표는 } y\text{좌표끼리}, z\text{좌표는 } z\text{좌표끼리 같ا.}$

03 공간벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배

두 공간벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 에 대하여

$$(1) \text{덧셈} : \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$(2) \text{뺄셈} : \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

$$(3) \text{실수배} : k\vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3) \text{ (단, } k \text{는 실수)}$$

증명자료 공간벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배

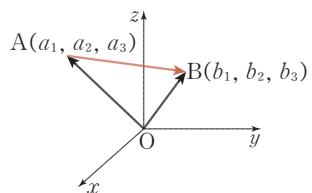
→ x 성분은 x 성분끼리, y 성분은 y 성분끼리, z 성분은 z 성분끼리 더하고 뺀다. 또, 실수배는 모든 성분에 실수를 다 곱한다.

04 공간벡터의 성분과 크기

두 점 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ 에 대하여

$$(1) \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

$$(2) |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$



증명자료 점의 좌표와 벡터가 주어지면? 무조건 시점을 O로 만들고 시작한다. 시점이 O인 벡터의 성분은 종점의 좌표와 똑같으니까.

→ [1단계] 두 점 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ 이 주어지면 벡터 $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3)$ 을 만든다.

[2단계] 시점 통일 공식 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ 를 이용한다.

• 한 걸음 더

◎ 공간벡터의 성분에 의한 덧셈, 뺄셈, 실수배의 확인

두 공간벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 에 대하여

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3, \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3 \text{이므로}$$

$$(1) \text{덧셈} : \vec{a} + \vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) + (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)$$

$$= (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 + (a_3 + b_3)\vec{e}_3$$

$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$(2) \text{뺄셈} : \vec{a} - \vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) - (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)$$

$$= (a_1 - b_1)\vec{e}_1 + (a_2 - b_2)\vec{e}_2 + (a_3 - b_3)\vec{e}_3$$

$$= (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

$$(3) \text{실수배} : k\vec{a} = k(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)$$

$$= ka_1\vec{e}_1 + ka_2\vec{e}_2 + ka_3\vec{e}_3$$

$$= (ka_1, ka_2, ka_3) \text{ (단, } k \text{는 실수)}$$

필수예제 114 공간벡터의 성분 표시

다음 물음에 답하여라. (단, $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$)

(1) 다음 공간벡터를 성분으로 나타내어라.

$$\textcircled{1} \quad \vec{a} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{b} = 6\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$$

(2) 좌표공간의 원점 O와 다음 점 A에 대하여 공간벡터 \overrightarrow{OA} 를 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 으로 나타내어라.

$$\textcircled{1} \quad A(1, 2, -3)$$

$$\textcircled{2} \quad A(4, 0, 3)$$

▶ 풀이자 $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = (a_1, a_2, a_3)$

| 풀이 | (1) $\textcircled{1} \quad \vec{a} = (2, -3, 4)$

$$\textcircled{2} \quad \vec{b} = 0\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 \text{에서 } \vec{b} = (0, 6, 5)$$

$$(2) \textcircled{1} \quad \overrightarrow{OA} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$$

$$\textcircled{2} \quad \overrightarrow{OA} = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3$$

필수예제 115 공간벡터의 크기와 연산

다음 물음에 답하여라.

(1) 두 공간벡터 $\vec{a} = (-1, -1, 4)$, $\vec{b} = (1, 2, -3)$ 에 대하여 $2\vec{x} - \vec{b} = 2\vec{a}$ 를 만족시키는 벡터 \vec{x} 를 성분으로 나타내어라.

(2) 세 공간벡터 $\vec{a} = (1, 1, -2)$, $\vec{b} = (2, 0, -3)$, $\vec{c} = (-1, -4, 1)$ 에 대하여 $2(\vec{a} + \vec{b}) - (-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$ 의 크기를 구하여라.

▶ 풀이자 성분으로 나타낸 공간벡터의 연산 \rightarrow x 성분은 x 성분끼리, y 성분은 y 성분끼리, z 성분은 z 성분끼리 계산한다.

| 풀이 | (1) $2\vec{x} - \vec{b} = 2\vec{a}$ 에서 $2\vec{x} = \vec{b} + 2\vec{a}$

$$\therefore \vec{x} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a} = \frac{1}{2}(1, 2, -3) + (-1, -1, 4) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{5}{2}\right)$$

$$(2) 2(\vec{a} + \vec{b}) - (-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = 3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 3(1, 1, -2) + (2, 0, -3) + (-1, -4, 1) = (4, -1, -8)$$

$$\therefore |2(\vec{a} + \vec{b}) - (-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-8)^2} = \sqrt{81} = 9$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \text{일 때}$$

▶ 원칙 (1) $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$ (복부호 동순)

(2) $k\vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$ (단, k는 실수)

(3) $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

정답과 풀이 23쪽 ►

유제 139 두 공간벡터 $\vec{a} = (2, -1, 1)$, $\vec{b} = (1, -2, 4)$ 에 대하여 $\vec{x} - \vec{b} = -2\vec{a} + 2\vec{x}$ 를 만족시키는 벡터 \vec{x} 를 성분으로 나타내어라.

유제 140 세 공간벡터 $\vec{a} = (2, 1, 3)$, $\vec{b} = (-1, 2, 4)$, $\vec{c} = (0, 3, 4)$ 에 대하여 $(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}) - (3\vec{c} - \vec{a})$ 의 크기를 구하여라.

필수예제 116 공간벡터가 서로 같을 조건

네 공간벡터 $\vec{a}=(1, 1, 0)$, $\vec{b}=(1, 0, 1)$, $\vec{c}=(0, 1, 1)$, $\vec{d}=(3, 4, 5)$ 에 대하여
 $\vec{d}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ 일 때, lmn 의 값을 구하여라. (단, l, m, n 은 실수)

풀이 성분으로 나타낸 두 공간벡터가 서로 같다. $\rightarrow x$ 성분은 x 성분끼리, y 성분은 y 성분끼리, z 성분은 z 성분끼리 같다.

풀이 $\vec{d}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ 를 성분으로 나타내면

$$(3, 4, 5)=l(1, 1, 0)+m(1, 0, 1)+n(0, 1, 1) \\ =(l+m, l+n, m+n)$$

$$\text{이므로 } l+m=3, l+n=4, m+n=5$$

$$\text{세 식을 연립하여 풀면 } l=1, m=2, n=3$$

$$\therefore lm n=1 \times 2 \times 3=6$$

필수예제 117 공간벡터의 성분과 크기

좌표공간의 세 점 $A(1, 2, 3)$, $B(4, 5, 6)$, $C(3, -4, -1)$ 에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 벡터 \overrightarrow{AB} 의 성분

(2) 벡터 \overrightarrow{AB} 의 크기

(3) 벡터 \overrightarrow{CA} 의 성분

(4) 벡터 \overrightarrow{CA} 의 크기

풀이 점의 좌표와 벡터가 주어지면 \rightarrow [1단계] 시점이 O인 벡터를 만든다.

[2단계] 시점 통일 공식 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ 를 이용한다.

풀이 [1단계] $\overrightarrow{OA}=(1, 2, 3)$, $\overrightarrow{OB}=(4, 5, 6)$, $\overrightarrow{OC}=(3, -4, -1)$ 이므로

$$[2단계] (1) \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(4, 5, 6)-(1, 2, 3)=(3, 3, 3)$$

$$(2) |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+3^2+3^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$$

$$(3) \overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=(1, 2, 3)-(3, -4, -1)=(-2, 6, 4)$$

$$(4) |\overrightarrow{CA}|=\sqrt{(-2)^2+6^2+4^2}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$$

(1) 성분으로 나타낸 두 공간벡터가 서로 같으면 각 성분끼리 같다.

$$\Rightarrow \vec{a}=(a_1, a_2, a_3), \vec{b}=(b_1, b_2, b_3) \text{일 때}, \vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1, a_2=b_2, a_3=b_3$$

대원칙 (2) 점의 좌표와 벡터가 주어지면 일단 시점이 O인 벡터를 만들고 생각한다.

$$\Rightarrow A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3) \text{일 때},$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3), |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

정답과 풀이 24쪽 ▶

유제 141 세 공간벡터 $\vec{a}=(4, 0, -3)$, $\vec{b}=(2, -4, 1)$, $\vec{c}=(k, 12, 3)$ 에 대하여

$\vec{c}=l\vec{a}+m\vec{b}$ 일 때, k, l, m 의 값을 구하여라. (단, l, m 은 실수)

유제 142 좌표공간의 세 점 $A(-2, 1, 4)$, $B(1, 2, -5)$, $C(2, 0, -3)$ 에 대하여 점 D가 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ 를 만족시킬 때, 점 D의 좌표를 구하여라.

필수예제 118**두 공간벡터가 평행할 조건**

세 공간벡터 $\vec{a}=(1, 2, 3)$, $\vec{b}=(2, 3, 4)$, $\vec{c}=(x+3, 4, y+5)$ 에 대하여 $\vec{b}-\vec{a}$, $\vec{c}-\vec{a}$ 가 서로 평행하도록 하는 x, y 의 값을 구하여라.

【풀이】 두 벡터가 평행하다? \rightarrow 한 벡터는 다른 벡터의 실수배임을 떠올린다.

$$\vec{b}-\vec{a}=(2, 3, 4)-(1, 2, 3)=(1, 1, 1)$$

$$\vec{c}-\vec{a}=(x+3, 4, y+5)-(1, 2, 3)=(x+2, 2, y+2)$$

$\vec{b}-\vec{a}$, $\vec{c}-\vec{a}$ 가 서로 평행하므로 $\vec{c}-\vec{a}=k(\vec{b}-\vec{a})$ (단, k 는 0이 아닌 실수)

즉, $(x+2, 2, y+2)=k(1, 1, 1)$ 에서 $x+2=k$, $2=k$, $y+2=k$

$$\therefore k=2, x=0, y=0$$

필수예제 119**세 점이 한 직선 위에 있을 조건**

세 점 A(1, 1, -1), B(2, -2, 2), C(-3, x , y)가 한 직선 위에 있을 때, x, y 의 값을 구하여라.

【풀이】 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있다? $\rightarrow \vec{AC}=k\vec{AB}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)

$$\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=(2, -2, 2)-(1, 1, -1)=(1, -3, 3)$$

$$\vec{AC}=\vec{OC}-\vec{OA}=(-3, x, y)-(1, 1, -1)=(-4, x-1, y+1)$$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로 $\vec{AC}=k\vec{AB}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)

즉, $(-4, x-1, y+1)=k(1, -3, 3)$ 에서 $-4=k$, $x-1=-3k$, $y+1=3k$

$$\therefore k=-4, x=13, y=-13$$

대원칙

'영벡터가 아닌 두 벡터가 평행'라는 말이 나오면 벡터의 실수배를 이용한다.

'세 점 A, B, C가 한 직선 위'

$\Rightarrow \vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 일 때,

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b}=k\vec{a} \iff b_1=ka_1, b_2=ka_2, b_3=ka_3 \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)}$$

정답과 풀이 24쪽 ▶

유제 143 두 공간벡터 $\vec{a}=(1, -3, 2)$, $\vec{b}=(-2, 0, 2)$ 에 대하여 $\vec{a}+m\vec{b}$, $2\vec{a}-\vec{b}$ 가 서로 평행하도록 하는 실수 m 의 값을 구하여라.

유제 144 세 점 A(1, 2, -3), B(2, 1, 0), C(x , 0, y)가 한 직선 위에 있을 때, x, y 의 값을 구하여라.

3

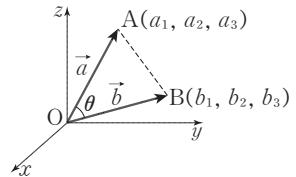
공간벡터의 내적

3. 공간벡터

01 공간벡터의 내적과 성분

두 공간벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 이 이루는 각의 크기가 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) 일 때,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$



증명자료 평면벡터에서와 마찬가지로 공간벡터에서도 내적에 대하여 다음이 성립한다.

세 공간벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 와 실수 k 에 대하여

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \leftarrow \text{교환법칙}$$

$$(2) \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}, (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \quad \leftarrow \text{분배법칙}$$

$$(3) (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \leftarrow \text{결합법칙}$$

증명자료 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 영벡터가 아니면 $|\vec{a}|$ 도 양수, $|\vec{b}|$ 도 양수이므로 $\cos \theta$ 의 부호에 따라 내적은 양수일 수도, 0일 수도, 음수일 수도 있다. 특히 이 중에서 두 공간벡터가 수직이면 내적이 0이라는 사실은 훗날 각종 벡터 문제에서 맹활약을 펼친다.

02 두 공간벡터가 이루는 각의 크기

영벡터가 아닌 두 공간벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 이 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)라고 하면

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

증명자료 (1) 두 벡터의 크기와 내적을 알면? $\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ 에서 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ 로 구한다.

(2) 두 벡터가 성분으로 나타내어져 있다면?

$$\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \text{이므로 } \cos \theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \text{ 으로 구한다.}$$

03 공간벡터의 수직 조건과 평행 조건

영벡터가 아닌 두 공간벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여

(1) 수직 조건: $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

(2) 평행 조건: $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}| |\vec{b}| \iff \vec{b} = k\vec{a}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)

증명자료 (1) $\cos 90^\circ = 0$ 이므로 두 벡터가 수직일 땐 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$

(2) $\vec{b} = k\vec{a}$ 에서 k 가 양수이면 \vec{a}, \vec{b} 가 같은 방향이고, 음수이면 반대 방향이다.

필수예제 120

공간벡터의 내적

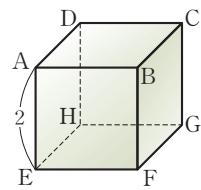
오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체에서 다음을 구하여라.

(1) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$

(2) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF}$

(3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CG}$

(4) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{FH}$



▶ 풀이자료 영벡터가 아닌 두 공간벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기가 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)일 때

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 의 내적이라고 한다.

(3) 시점이 같지 않은 두 벡터의 내적은 평행이동하여 시점을 같게 한 후 θ 를 찾아야 한다.

| 풀이 | (1) \overrightarrow{AC} 과 \overrightarrow{AB} 가 이루는 각의 크기가 45° 이고 $|\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AB}| = 2$ 므로

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AB}| \cos 45^\circ = 2\sqrt{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$$

(2) \overrightarrow{AC} 과 \overrightarrow{AF} 가 이루는 각의 크기가 60° 이고 $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AF}| = 2\sqrt{2}$ 이므로

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF} = |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AF}| \cos 60^\circ = 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 4$$

(3) \overrightarrow{AB} 와 \overrightarrow{CG} 가 이루는 각의 크기가 90° 이고 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CG}| = 2$ 므로

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CG} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{CG}| \cos 90^\circ = 2 \times 2 \times 0 = 0$$

(4) \overrightarrow{DB} 와 \overrightarrow{FH} 가 이루는 각의 크기가 180° 이고 $|\overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{FH}| = 2\sqrt{2}$ 이므로

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{FH} = |\overrightarrow{DB}| |\overrightarrow{FH}| \cos 180^\circ = 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times (-1) = -8$$

▶ **대원칙**

(1) 도형에서의 벡터의 내적은 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \rightarrow (\exists \text{기}) \times (\exists \text{기}) \times (\text{코사인})$ 을 이용한다.

(2) 시점이 같지 않으면 평행이동하여 시점을 같게 만든다.

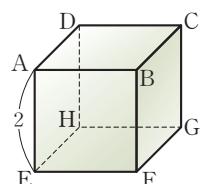
유제 145 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체에서 다음을 구하여라.

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

(2) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DG}$

(3) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{GC}$

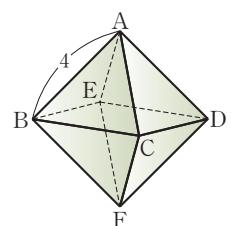
정답과 풀이 24쪽 ▶



유제 146 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정팔면체에서 다음을 구하여라.

(1) $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BD}$

(2) $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BC}$



필수예제 121

성분으로 나타내어진 공간벡터의 내적

다음 물음에 답하여라.

(1) 두 공간벡터 $\vec{a}=(1, 2, 3)$, $\vec{b}=(4, 5, 6)$ 에 대하여 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 를 구하여라.

(2) 두 공간벡터 $\vec{a}=(2, 3, x-2)$, $\vec{b}=(x, 5, 1)$ 에 대하여 $\vec{a} \cdot \vec{b}=-2$ 일 때, x 의 값을 구하여라.

풀이 성분으로 나타내어진 공간벡터의 내적은 $(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 = 32$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \Rightarrow 2 \times x + 3 \times 5 + (x-2) \times 1 = -2, 3x = -15 \quad \therefore x = -5$$

필수예제 122

두 공간벡터가 이루는 각의 크기

다음 물음에 답하여라.

(1) 두 공간벡터 $\vec{a}=(1, 2, 3)$, $\vec{b}=(-3, 1, -2)$ 가 이루는 각의 크기를 구하여라.

(2) 두 공간벡터 $\vec{a}=(0, -2, -1)$, $\vec{b}=(1, 2, 0)$ 에 대하여 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}+2\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 구하여라.

풀이 공간벡터가 성분으로 주어지면 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

(1) 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)라고 하면

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1 \times (-3) + 2 \times 1 + 3 \times (-2)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{-7}{\sqrt{14} \sqrt{14}} = -\frac{1}{2} \quad \therefore \theta = \frac{2}{3}\pi$$

(2) $\vec{a}+\vec{b}=(1, 0, -1)$, $\vec{a}+2\vec{b}=(2, 2, -1)$ 이 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)라고 하면

$$\cos \theta = \frac{(\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}+2\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}| |\vec{a}+2\vec{b}|} = \frac{1 \times 2 + 0 \times 2 + (-1) \times (-1)}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2} \times 3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

(1) 성분으로 나타내어진 벡터의 내적은 $(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

→ (x 성분끼리의 곱) + (y 성분끼리의 곱) + (z 성분끼리의 곱)을 이용한다.

대원칙

(2) 영벡터가 아닌 두 공간벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 이 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)라고 하면

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

정답과 풀이 24쪽 ▶

유제 147 두 공간벡터 $\vec{a}=(2, 3, -1)$, $\vec{b}=(1, 5, 1)$ 에 대하여 $(2\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b})$ 를 구하여라.

유제 148 두 공간벡터 $\vec{a}=(2, 0, x-2)$, $\vec{b}=(3, 4, x+1)$ 에 대하여 $\vec{a} \cdot \vec{b}=4$ 일 때, 양수 x 의 값을 구하여라.

유제 149 세 공간벡터 $\vec{a}=(1, 2, 3)$, $\vec{b}=(-1, 5, 2)$, $\vec{c}=(2, 4, 0)$ 에 대하여 $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{c}$ 가 이루는 각의 크기를 구하여라.

필수예제 123**공간벡터의 수직 조건**

두 공간벡터 $\vec{a}=(x+1, 2, x+3)$, $\vec{b}=(3, x+2, 1)$ 이 서로 수직일 때, x 의 값을 구하여라.

증명자료 두 벡터가 수직이면 뭘 더 생각하는가? 무조건 내적이 0이다.

| 풀이 | 두 벡터 \vec{a} , \vec{b} 가 서로 수직이므로 $\vec{a} \cdot \vec{b}=0$

$$(x+1, 2, x+3) \cdot (3, x+2, 1)=0, 3(x+1)+2(x+2)+(x+3)=0$$

$$6x+10=0 \quad \therefore x=-\frac{5}{3}$$

필수예제 124**공간벡터의 수직과 평행**

두 공간벡터 $\vec{a}=(-1, 1, 3)$, $\vec{b}=(1, -2, -1)$ 에 대하여 $\vec{a}=\vec{c}+\vec{d}$ 이고 $\vec{b} \parallel \vec{c}$, $\vec{b} \perp \vec{d}$ 일 때, \vec{d} 를 성분으로 나타내어라.

증명자료 평행 조건과 수직 조건이 함께 주어지면 평행 조건을 먼저 쓴다.

“평행하다” 하면 무조건 실수배, “수직이다” 하면 무조건 내적이 0!

| 풀이 | (i) $\vec{b} \parallel \vec{c}$ 이므로 $\vec{c}=k\vec{b}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)

$$\vec{c}=k(1, -2, -1)=(k, -2k, -k)$$

(ii) $\vec{a}=\vec{c}+\vec{d}$ 에서 $\vec{d}=\vec{a}-\vec{c}$ 이므로

$$\vec{d}=(-1, 1, 3)-(k, -2k, -k)=(-1-k, 1+2k, 3+k) \quad \dots \dots \textcircled{7}$$

(iii) $\vec{b} \perp \vec{d}$ 이므로 $\vec{b} \cdot \vec{d}=0$

$$(1, -2, -1) \cdot (-1-k, 1+2k, 3+k)=0$$

$$-1-k-2(1+2k)-(3+k)=0, -6k=6 \quad \therefore k=-1$$

$$k=-1 \text{을 } \textcircled{7} \text{에 대입하면 } \vec{d}=(0, -1, 2)$$

(1) 두 공간벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 에 대하여

대원칙

① 수직 조건 : $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b}=0$

② 평행 조건 : $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b}=k\vec{a}$ 또는 $\vec{a}=k\vec{b}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)

(2) 수직 조건과 평행 조건이 함께 주어지면 평행 조건을 먼저 쓴다.

정답과 풀이 25쪽 ▶

유제 150 세 공간벡터 $\vec{a}=(x, 1, 1)$, $\vec{b}=(1, y, 1)$, $\vec{c}=(1, 1, z)$ 가 서로 수직일 때, x, y, z 의 값을 구하여라.

유제 151 세 공간벡터 $\vec{a}=(1, 2, m)$, $\vec{b}=(-4, n-2, 1)$, $\vec{c}=(2, 4, -8)$ 에 대하여 \vec{a} 와 \vec{b} 가 서로 수직이고 \vec{a} 와 \vec{c} 가 서로 평행할 때, m, n 의 값을 구하여라.

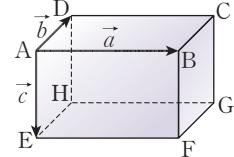
연습문제

Step 1

- 161** 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ 라고 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 골라라.

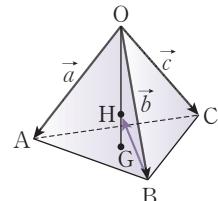
보기

- ㄱ. $\overrightarrow{BD}=\vec{b}-\vec{a}$
- ㄴ. $\overrightarrow{DG}=\vec{a}+\vec{c}$
- ㄷ. $\overrightarrow{BH}=\vec{b}-\vec{a}$
- ㄹ. $\overrightarrow{EG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$



- 162** 오른쪽 그림과 같은 정사면체에서 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ 라고 하자.

$\triangle ABC$ 의 무게중심 G에 대하여 선분 OG를 3 : 1로 내분하는 점을 H라고 할 때, \overrightarrow{BH} 를 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 로 나타내어라.



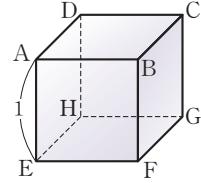
- 163** 좌표공간의 네 점 $A(-2, 1, 3)$, $B(1, 0, -1)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(a, b, c)$ 에 대하여 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{BD}$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

- 164** 좌표공간의 두 점 $A(1, 3, -1)$, $B(2, 1, 1)$ 에 대하여 벡터 \overrightarrow{AB} 와 방향이 반대이고 크기가 9인 벡터 \vec{p} 가 $\vec{p}=(l, m, n)$ 일 때, $l+m-n$ 의 값을 구하여라.

- 165** 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정육면체에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 골라라.

보기

- ㄱ. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}=1$
- ㄴ. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FG}=1$
- ㄷ. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CG}=1$
- ㄹ. $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AC}=1$



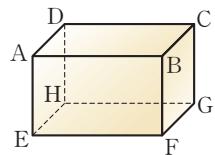
- 166** 두 공간벡터 $\vec{a}=(k, k-2, 1)$, $\vec{b}=(k^2+1, 2k-1, 5)$ 에 대하여 $|\vec{a}|=\sqrt{3}$ 일 때, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 를 구하여라.

- 167** 세 공간벡터 $\overrightarrow{OA}=(1, 2, 1)$, $\overrightarrow{OB}=(2, -1, -1)$, $\overrightarrow{OC}=(4, 0, 2)$ 에 대하여 \overrightarrow{AB} 와 \overrightarrow{AC} 가 이루는 각의 크기를 구하여라.

- 168** 두 공간벡터 $\vec{a}=(2, 1, 2)$, $\vec{b}=(2, -4, -3)$ 에 모두 수직이고 크기가 3인 벡터 $\vec{c}=\langle x, y, z \rangle$ 일 때, $x+y+z$ 의 값을 구하여라.

Step 2

- 169** 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DF} = k\overrightarrow{AE}$ 를 만족시키는 실수 k 의 값을 구하여라.

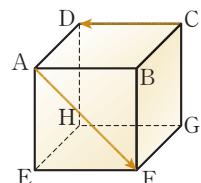


- 170** 두 공간벡터 $\vec{a} = (1, -3, 3)$, $\vec{b} = (-1, 0, 1)$ 에 대하여 $|\vec{a} + k\vec{b}|$ 가 최소가 되도록 하는 실수 k 의 값을 구하여라.

- 171** 좌표공간의 세 점 $A(3, 4, 0)$, $B(0, -8, -6)$, $P(a, b, c)$ 에 대하여 점 P 는 선분 AB 위의 점이다. 두 벡터 \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OP} 가 이루는 각의 크기와 두 벡터 \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OP} 가 이루는 각의 크기가 같을 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

- 172** 좌표공간의 두 점 $A(0, -3, -1)$, $B(1, -2, 1)$ 에 대하여 $\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ ($0 \leq t \leq 1$)를 만족시키는 점 P 의 자취의 길이를 구하여라. (단, O 는 원점)

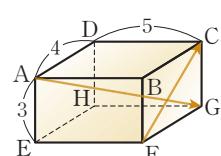
- 173** 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CD} = -9$ 일 때, 이 정육면체의 부피를 구하여라.



- 174** 두 공간벡터 $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (-3, 1, -2)$ 와 실수 t 에 대하여 $f(t) = (\vec{a} + t\vec{b}) \cdot (t\vec{a} - \vec{b})$ 일 때, $f(t)$ 의 최솟값을 구하여라.

- 175** 세 공간벡터 $\vec{a} = (3, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 0, 1)$, $\vec{c} = (x, 0, 0)$ 에 대하여 두 벡터 $\vec{a} - \vec{c}$, $\vec{b} - \vec{c}$ 가 서로 수직일 때, x 의 값을 구하여라.

- 176** 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 두 벡터 \overrightarrow{AG} , \overrightarrow{FC} 가 이루는 각의 크기를 θ 라고 할 때, $\cos \theta$ 의 값을 구하여라.



4

직선의 방정식

3. 공간벡터

01 방향벡터를 이용한 직선의 방정식

(1) 방향벡터 : 점 A를 지나고 영벡터가 아닌 벡터 \vec{u} 에 평행한 직선 l 위의 한 점을 P라 하고, 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 \vec{a}, \vec{p} 라고 하면

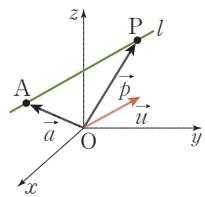
$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u} \quad (\text{단, } t \text{는 실수}) \quad \leftarrow \text{벡터방정식}$$

이때 벡터 \vec{u} 를 직선 l 의 방향벡터라고 한다.

(2) 방향벡터를 이용한 직선의 방정식

점 A(x_1, y_1, z_1)을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 인 직선의 방정식은

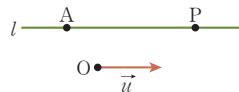
$$\frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2} = \frac{z-z_1}{u_3} \quad (\text{단, } u_1u_2u_3 \neq 0)$$



증명자료 좌표평면에서 직선의 방정식을 구할 때에는 한 점의 좌표와 방향벡터가 필요했듯, 좌표공간에서 직선의 방정식을 구할 때에도 한 점의 좌표와 평행한 벡터가 필요하다. 이 벡터 $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 을 방향벡터라고 한다.

좌표공간에서 “직선의 방정식을 구하라”고 하면 무조건 한 점과 방향벡터를 찾는다.

증명자료 (i) 직선 l 위의 임의의 점을 P(x, y, z)라고 하면 오른쪽 그림에서 $\overrightarrow{AP} \parallel \vec{u}$, $\overrightarrow{AP} = t\vec{u}$ $\therefore \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = t\vec{u}$ (단, t 는 0이 아닌 실수)



이것을 좌표로 해석하면 끝.
(ii) $(x-x_1, y-y_1, z-z_1) = (tu_1, tu_2, tu_3)$ 에서

$$x-x_1=tu_1, y-y_1=tu_2, z-z_1=tu_3$$

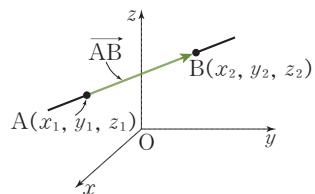
여기서 $u_1u_2u_3 \neq 0$ 일 때, $t = \frac{x-x_1}{u_1}, t = \frac{y-y_1}{u_2}, t = \frac{z-z_1}{u_3}$ 이므로 매개변수 t 를 소거하면

$$\frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2} = \frac{z-z_1}{u_3}$$

02 두 점을 지나는 직선의 방정식

두 점 A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad (\text{단, } x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2, z_1 \neq z_2)$$



증명자료 직선의 방정식을 구하려면 지나는 한 점의 좌표와 방향벡터가 필요하다. 그런데 지나는 점만 두 개 주어지고 방향벡터를 모르면 방향벡터를 찾아야 한다. 방향벡터란 직선에 평행한 벡터. 직선에 평행하기만 하면 어떤 벡터라도 방향벡터의 역할을 할 수 있다. 두 점 A, B를 지나는 직선은 벡터 \overrightarrow{AB} 에 평행하다. 즉, 벡터 \overrightarrow{AB} 가 방향벡터 역할을 할 수 있다.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\therefore \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

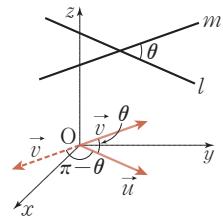
증명자료 분자에 들어갈 한 점은 주어진 두 점 중 아무거나 하나 골라서 쓰면 된다.

03 두 직선이 이루는 각

방향벡터가 각각 $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 인 두 직선 l, m 이 이루는

각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)라고 하면

$$\cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$



【증명】 직선은 항상 자신과 평행한 방향벡터를 업고 다닌다. 두 직선이 이루는 각이 바로 두 직선의 방향벡터가 이루는 각!

04 두 직선의 평행과 수직

두 직선 l, m 의 방향벡터가 각각 $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 일 때

(1) **평행 조건**: $l \parallel m \iff \vec{u} \parallel \vec{v} \iff \vec{u} = k\vec{v}$

$$\iff u_1 = kv_1, u_2 = kv_2, u_3 = kv_3 \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)}$$

(2) **수직 조건**: $l \perp m \iff \vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$

【증명】 두 직선이 평행하면 두 직선의 방향벡터도 평행하다. 두 직선이 수직이면 두 직선의 방향벡터도 수직이다.
계속되는 이야기지만 평행하면 실수배, 수직이면 내적이 0!

• 한 걸음 더

◎ 좌표평면 또는 좌표축에 평행한 직선의 방정식

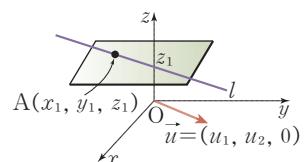
$u_1u_2u_3=0$ 일 때, 점 $A(x_1, y_1, z_1)$ 을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 인 직선의 방정식에 대하여 알아보자.

(i) \vec{u} 가 좌표평면에 평행한 경우

예를 들어 $u_1u_2 \neq 0, u_3=0$ 일 때, 방향벡터 \vec{u} 는 xy 평면에 평행하

므로 직선의 방정식은 $\frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2}, z=z_1$

→ 점 $A(x_1, y_1, z_1)$ 을 지나고 xy 평면에 평행한 직선

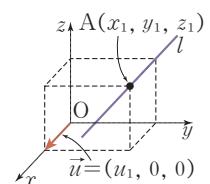


(ii) \vec{u} 가 좌표축에 평행한 경우

예를 들어 $u_1 \neq 0, u_2=0, u_3=0$ 일 때, 방향벡터 \vec{u} 는 x 축에 평행하므로 직

선의 방정식은 $y=y_1, z=z_1$

→ 점 $A(x_1, y_1, z_1)$ 을 지나고 x 축에 평행한 직선



xy 평면에 평행	$\frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2}, z=z_1$	x 축에 평행	$y=y_1, z=z_1$
yz 평면에 평행	$x=x_1, \frac{y-y_1}{u_2} = \frac{z-z_1}{u_3}$	y 축에 평행	$x=x_1, z=z_1$
zx 평면에 평행	$\frac{x-x_1}{u_1} = \frac{z-z_1}{u_3}, y=y_1$	z 축에 평행	$x=x_1, y=y_1$

필수예제 125**직선의 방향벡터**

다음 직선의 방향벡터 \vec{u} 를 구하여라.

$$(1) \frac{-x+4}{2} = \frac{1-y}{5} = \frac{z+6}{-3}$$

$$(2) x=2t-5, y=-4t, z=6-t \text{ (단, } t\text{는 실수)}$$

▶ 풀이자 방향벡터를 구할 때에는 x, y, z 의 계수를 반드시 1로 만들어야 한다.

$$| \text{풀이} | (1) \frac{x-4}{-2} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+6}{-3} \text{ 이므로 } \vec{u} = (-2, -5, -3)$$

$$(2) \text{주어진 방정식을 } t \text{에 대하여 풀면 } t = \frac{x+5}{2} = \frac{y}{-4} = \frac{z-6}{-1} \text{ 이므로 } \vec{u} = (2, -4, -1)$$

필수예제 126**방향벡터가 주어진 직선의 방정식**

다음 직선의 방정식을 구하여라.

$$(1) \text{점 } (4, 5, 6) \text{을 지나고 방향벡터가 } \vec{u} = (1, 2, 3) \text{인 직선}$$

$$(2) \text{점 } (1, 2, -3) \text{을 지나고 벡터 } \vec{u} = (-1, 0, 2) \text{에 평행한 직선}$$

$$(3) \text{점 } (3, -4, 1) \text{을 지나고 직선 } \frac{x+8}{-4} = y+1 = \frac{z-3}{2} \text{에 평행한 직선}$$

▶ 풀이자 말만 조금 다를 뿐 사실상 모두 같은 문제. 일단 지나는 한 점과 방향벡터부터 확인할 것! 이때 분모가 방향벡터임에 유의한다.

(2) 분모 중 0인 것이 있으면 "(분자)=0"으로 한 뒤 연결 고리를 끊는다.

$$| \text{풀이} | (1) \frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-6}{3} \quad \therefore x-4 = \frac{y-5}{2} = \frac{z-6}{3}$$

$$(2) \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{2} \text{에서 } \frac{x-1}{-1} = \frac{z+3}{2}, y-2=0 \quad \therefore 1-x = \frac{z+3}{2}, y=2$$

$$(3) \text{직선 } \frac{x+8}{-4} = y+1 = \frac{z-3}{2} \text{의 방향벡터는 } (-4, 1, 2) \text{이므로}$$

점 $(3, -4, 1)$ 을 지나고 방향벡터가 $(-4, 1, 2)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-3}{-4} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-1}{2} \quad \therefore \frac{x-3}{-4} = y+4 = \frac{z-1}{2}$$

점 $A(x_1, y_1, z_1)$ 을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 인 직선의 방정식은

대원칙

$$\frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2} = \frac{z-z_1}{u_3} \quad (\text{단, } u_1u_2u_3 \neq 0)$$

정답과 풀이 25쪽 ▶

유제 152 점 $(1, 2, 3)$ 을 지나고 방향벡터가 다음과 같은 직선의 방정식을 구하여라.

$$(1) (4, 5, 6)$$

$$(2) (4, 5, 0)$$

$$(3) (0, 5, 6)$$

유제 153 점 $(6, -1, 3)$ 을 지나고 직선 $\frac{x+5}{3} = -z-1, y = -3$ 에 평행한 직선의 방정식을 구하여라.

필수예제 127**두 점을 지나는 직선의 방정식**

다음 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

(1) A(1, 2, 3), B(3, 5, 7)

(2) A(3, 3, 3), B(5, 4, 3)

(3) A(2, 3, 2), B(2, 3, 4)

【풀이】 (3)에서 연결 고리를 끊은 뒤 남은 $\frac{z-2}{2}$ 는 의미가 없으므로 버린다. 도형의 방정식이란 등호가 있는 관계식이니까.

| 풀이 | (1) $\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{5-2} = \frac{z-3}{7-3}$ $\therefore \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$

(2) $\frac{x-3}{5-3} = \frac{y-3}{4-3} = \frac{z-3}{3-3}$, $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{0}$ $\therefore \frac{x-3}{2} = y-3$, $z=3$

(3) $\frac{x-2}{2-2} = \frac{y-3}{3-3} = \frac{z-2}{4-2}$, $\frac{x-2}{0} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-2}{2}$ $\therefore x=2$, $y=3$

필수예제 128**직선과 xy 평면의 교점**

다음 점 A를 지나고, 벡터 \vec{u} 에 평행한 직선이 xy 평면과 만나는 점 P의 좌표를 구하여라.

(1) A(1, 2, 3), $\vec{u}=(3, 2, 1)$

(2) A(2, 3, 4), $\vec{u}=(4, 3, 0)$

【풀이】 xy 평면과 만나는 점의 z좌표는 항상 0! $\rightarrow z=0$ 을 대입한다.

(2)는 $z=4$ 만큼 위로 봉 둔 직선이라 xy 평면과 만날 수 없다.

| 풀이 | (1) 점 A(1, 2, 3)을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(3, 2, 1)$ 인 직선의 방정식은 $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$

$z=0$ 을 위의 식에 대입하면 $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{0-3}{1}$ $\therefore x=-8$, $y=-4$

$\therefore P(-8, -4, 0)$

(2) 점 A(2, 3, 4)를 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(4, 3, 0)$ 인 직선의 방정식은 $\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{3}, z=4$

xy 평면과의 교점은 $z=0$ 일 때이지만 이 직선은 항상 $z=4$ 므로 xy 평면과 만나지 않는다.

(1) 두 점 A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)를 지나는 직선의 방정식은

【원칙】
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$
 (단, $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2, z_1 \neq z_2$)

(2) xy 평면과의 교점은 $z=0$, yz 평면과의 교점은 $x=0$, zx 평면과의 교점은 $y=0$ 을 대입하여 구한다.

정답과 풀이 25쪽 ►

유제 154 다음 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

(1) A(1, 3, -2), B(2, -1, 4)

(2) A(2, 0, -4), B(0, 3, -4)

유제 155 다음 점 A를 지나고, 방향벡터가 \vec{u} 인 직선이 yz 평면과 만나는 점 P의 좌표를 구하여라.

(1) A(-2, 2, -2), $\vec{u}=(1, 2, 3)$

(2) A(6, 2, 3), $\vec{u}=(3, 2, -1)$

필수예제 129

두 직선의 교점

두 직선 $\frac{x-1}{-2} = y-2 = \frac{z-3}{4}$, $x-2 = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-3}$ 의 교점의 좌표를 구하여라.

증명자료 두 직선의 방정식을 각각 매개변수 t, s 로 나타낸 후 x, y, z 를 소거하면 교점일 때의 t, s 의 값을 구할 수 있다.

| 풀이 | [1단계] $\frac{x-1}{-2} = y-2 = \frac{z-3}{4} = t$ (t 는 실수)로 놓으면 $x = -2t+1, y = t+2, z = 4t+3$ ⑦

[2단계] $x-2 = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-3} = s$ (s 는 실수)로 놓으면 $x = s+2, y = 2s-1, z = -3s+2$ ⑧

[3단계] ⑦, ⑧에서 x, y, z 를 소거하면

$$-2t+1 = s+2, t+2 = 2s-1, 4t+3 = -3s+2$$

세 식을 연립하여 풀면 $t = -1, s = 1$

따라서 ⑦ 또는 ⑧에서 교점의 좌표는 $(3, 1, -1)$

필수예제 130

두 직선이 이루는 각

두 직선 $\frac{x-1}{2} = y-2 = \frac{z-3}{3}$, $\frac{x-4}{-3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-6}{-1}$ 이 이루는 각의 크기를 구하여라.

증명자료 직선은 항상 자신과 평행한 방향벡터를 업고 다닌다. 따라서 두 직선이 이루는 각의 크기는 두 직선의 방향벡터가 이루는 각의 크기와 같다.

| 풀이 | 두 직선의 방향벡터는 각각 $\vec{u} = (2, 1, 3), \vec{v} = (-3, 2, -1)$ 이므로 두 직선이 이루는 각의 크기를

$\theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 라고 하면

$$\cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|2 \times (-3) + 1 \times 2 + 3 \times (-1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{7}{\sqrt{14} \sqrt{14}} = \frac{1}{2} \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

두 직선이 이루는 각의 크기는 두 직선의 방향벡터가 이루는 각의 크기와 같음을 이용한다.

대원칙

두 직선의 방향벡터가 각각 \vec{u}, \vec{v} 이고 두 직선이 이루는 각의 크기를 $\theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 라고 하면 $\cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$

정답과 풀이 25쪽 ▶

유제 156 두 직선 $x-1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1}$, $\frac{x+3}{3} = y+1 = \frac{z+1}{5}$ 의 교점의 좌표를 구하여라.

유제 157 두 직선 $x-a = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$, $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+3}{5}$ 이 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

유제 158 두 직선 $-x+2 = \frac{y+1}{-2} = z-1, \frac{x+1}{2} = y+2 = z+1$ 이 이루는 각의 크기를 θ 라고 할 때,

$\sin \theta$ 의 값을 구하여라. $\left(\text{단}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$

필수예제 131**두 직선의 평행과 수직**

두 직선 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{m} = \frac{z-3}{4}$, $x+3 = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+1}{2}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

- (1) 두 직선이 평행할 때, 상수 m 의 값을 구하여라.
- (2) 두 직선이 수직일 때, 상수 m 의 값을 구하여라.

풀이 직선이 평행 \rightarrow 방향벡터끼리 평행 \rightarrow 실수배!
직선이 수직 \rightarrow 방향벡터끼리 수직 \rightarrow 내적이 0!

| 풀이 | 두 직선의 방향벡터는 각각 $\vec{u}=(2, m, 4)$, $\vec{v}=(1, -3, 2)$

- (1) $\vec{u}=k\vec{v}$ (k 는 0이 아닌 실수)에서 $(2, m, 4)=k(1, -3, 2)$
 $2=k$, $m=-3k$, $4=2k \quad \therefore k=2, m=-6$
- (2) $\vec{u} \cdot \vec{v}=0$ 에서 $2-3m+8=0 \quad \therefore m=\frac{10}{3}$

필수예제 132**두 직선에 수직인 직선**

점 $(7, 7, 7)$ 을 지나고, 두 직선 $-x+1 = \frac{y-11}{2} = \frac{z-1}{-4}$, $\frac{x-11}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-11}{5}$ 에 수직인
직선의 방정식을 구하여라.

풀이 두 직선에 수직인 직선? 구하는 직선의 방향벡터가 주어진 두 직선의 방향벡터와 수직. 수직이면 내적이 0!

| 풀이 | 두 직선의 방향벡터는 각각 $\vec{u}_1=(-1, 2, -4)$, $\vec{u}_2=(2, -3, 5)$
구하는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}=(a, b, c)$ 라고 하면
 $\vec{u} \cdot \vec{u}_1=0$ 에서 $-a+2b-4c=0 \quad \dots \textcircled{1}$
 $\vec{u} \cdot \vec{u}_2=0$ 에서 $2a-3b+5c=0 \quad \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 a, b 를 c 로 나타내면 $a=2c, b=3c \quad \therefore \vec{u}=(2c, 3c, c)$
따라서 구하는 직선의 방정식은 $\frac{x-7}{2c} = \frac{y-7}{3c} = \frac{z-7}{c} \quad \therefore \frac{x-7}{2} = \frac{y-7}{3} = z-7$

두 직선이 평행 또는 수직이면 두 직선의 방향벡터끼리 평행 또는 수직임을 이용한다.

원칙

두 직선 l, m 의 방향벡터가 각각 \vec{u}, \vec{v} 일 때,

- (1) 두 직선 l, m 이 평행 $\iff \vec{u} \parallel \vec{v} \iff \vec{u}=k\vec{v}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)
- (2) 두 직선 l, m 이 수직 $\iff \vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v}=0$

정답과 풀이 26쪽 ►

유제 159 두 직선 $x+6 = \frac{y-5}{\sqrt{2}} = z+4$, $\frac{x-3}{\sqrt{2}} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{m}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

- (1) 두 직선이 평행할 때, 상수 m 의 값을 구하여라.
- (2) 두 직선이 수직일 때, 상수 m 의 값을 구하여라.

유제 160 점 $(5, 5, 5)$ 를 지나고, 두 직선 $x-3 = -y-2 = \frac{z+1}{-2}$, $\frac{x+1}{-2} = y-2 = z-3$ 에 수직인
직선의 방정식을 구하여라.

필수예제 133

점과 직선 사이의 거리

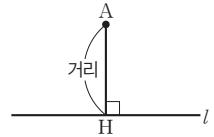
점 A(0, 1, 2)에서 직선 $l : -x+2=y+1=\frac{z-1}{2}$ 에 이르는 거리를 구하여라.

풀이자료 모든 거리는 항상 최단 거리를 의미하므로 최단 거리는 수직일 때 발생한다.

공간에서 점 A와 직선 l 사이의 거리는

(i) 수선의 발 H의 좌표를 구한다.

(ii) 두 점 A, H 사이의 거리를 구한다.



| 풀이 | [1단계] 주어진 직선을 이용하여 수선의 발 H(x, y, z)의 좌표를 t로 나타낸다.

$$-x+2=y+1=\frac{z-1}{2}=t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=-t+2, y=t-1, z=2t+1$$

점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 H는 직선 l 위의 점이므로

$$H(-t+2, t-1, 2t+1)$$

[2단계] $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$ 임을 이용하여 수선의 발 H의 좌표를 구한다.

직선 l의 방향벡터는 $\vec{u}=(-1, 1, 2)$

즉, $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$ 에서 $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}=0$ 이고

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = (-t+2, t-1, 2t+1) - (0, 1, 2) \\ &= (-t+2, t-2, 2t-1)\end{aligned}$$

이므로

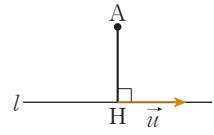
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} &= (-t+2, t-2, 2t-1) \cdot (-1, 1, 2) \\ &= 6t-6=0\end{aligned}$$

$$\therefore t=1$$

따라서 수선의 발 H의 좌표는 H(1, 0, 3)

[3단계] 두 점 A, H 사이의 거리를 구한다.

$$AH = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{3}$$



공간에서 점 A와 직선 l 사이의 거리는

원칙

[1단계] 점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발 H의 좌표를 매개변수 t를 이용하여 나타낸다.

[2단계] $\overrightarrow{AH} \perp l$ 임을 이용하여 수선의 발 H의 좌표를 구한다.

[3단계] 점 A와 수선의 발 H 사이의 거리가 구하는 점과 직선 사이의 거리임을 이용한다.

정답과 풀이 26쪽 ►

유제 161 점 A(0, 1, 2)와 직선 $l : \frac{x-4}{3} = y-3 = \frac{z-2}{-2}$ 에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발 H의 좌표

(2) 점 A에서 직선 l에 내린 수선의 길이

(3) 직선 AH의 방정식

Step 1

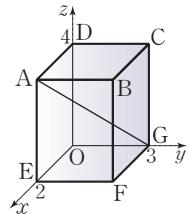
- 177** 직선 $\frac{x-1}{6} = -\frac{y-2}{3} = \frac{3-z}{2}$ 에 평행하고, 점 A(-1, 2, -3)을 지나는 직선이 점 (5, a, b)를 지날 때, a, b의 값을 구하여라.
- 178** 두 점 A(1, 4, -1), B(3, 2, 0)을 지나는 직선이 zx평면과 만나는 점의 좌표가 (a, b, c)일 때, a+b+c의 값을 구하여라.
- 179** 두 점 A(1, -2, -1), B(3, 0, -2)를 지나는 직선과 직선 $\frac{x-7}{2} = \frac{y-6}{3} = z$ 의 교점의 좌표가 (a, b, c)일 때, a+b-c의 값을 구하여라.
- 180** 두 직선 $l_1 : \frac{x+1}{2} = y-3 = z-1$, $l_2 : 2-x = \frac{1-y}{2} = z-5$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라고 할 때, $100 \cos \theta$ 의 값을 구하여라. (단, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)
- 181** 세 직선 $l_1 : x = \frac{1-y}{3} = \frac{z+2}{2}$, $l_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{a} = \frac{z-2}{b}$, $l_3 : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{c}$ 에 대하여 직선 l_1 이 직선 l_2 에 평행하고 직선 l_3 에 수직이다. 상수 a, b, c에 대하여 a+b+2c의 값을 구하여라.
- 182** 두 직선 $l_1 : -\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{3} = z-1$, $l_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{4-y}{2} = z-2$ 에 모두 수직이고 원점을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.
- 183** 점 A(2, -1, 7)에서 직선 $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = -z$ 에 내린 수선의 발 H의 좌표가 H(a, b, c)일 때, a+b+c의 값을 구하여라.
- 184** 점 A(1, 2, 0)과 직선 $x-1 = \frac{y-5}{2} = -z$ 사이의 거리를 d라고 할 때, d^2 의 값을 구하여라.

Step 2

185 직선 $\frac{x+1}{3} = y-1 = \frac{z+1}{5}$ 과 평행한 직선 중 두 점 A(2, 3, -5), B(4, 1, -1)을 있는 선분

AB의 중점을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

186 오른쪽 그림과 같이 좌표공간에 놓여 있는 직육면체에서 직선 AG의 방정식을 구하여라.



187 두 직선 $l_1 : x-1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{a}$, $l_2 : \frac{x+3}{3} = y+1 = \frac{z+b}{5}$ 가 수직으로 만날 때, 상수 a, b 의 값을 구하여라.

188 두 직선 $l_1 : \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-2}{6}$, $l_2 : \frac{x-3}{2} = \frac{y}{2} = -z+1$ 의 교점과 점 (2, 1, -3)을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

189 직선 $x-1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ 과 구 $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$ 의 교점을 각각 A, B라고 할 때, 선분 AB의 길이를 구하여라.

190 두 직선 $l_1 : \frac{x-3}{2a} = \frac{y+1}{a+1} = z-5$, $l_2 : x-2 = \frac{y+3}{4} = -z$ 가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

191 $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z + a = 0$ 과 직선 $\frac{x-2}{-1} = y+1 = \frac{z-1}{2}$ 이 접할 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

192 점 A(1, -2, 3)과 점 B(a, b, c)는 직선 $x-2 = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}$ 에 대하여 서로 대칭일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

5

평면의 방정식

01 평면의 방정식

(1) 법선벡터

점 A를 지나고 영벡터가 아닌 벡터 \vec{n} 에 수직인 평면 α 위의 한 점을 P라 하 고, 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 \vec{a}, \vec{p} 라고 하면

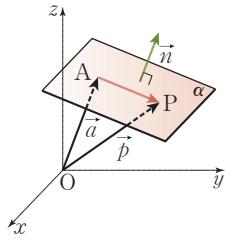
$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0 \quad \leftarrow \text{벡터방정식}$$

이때 벡터 \vec{n} 을 평면 α 의 **법선벡터**라고 한다.

(2) 법선벡터를 이용한 평면의 방정식

점 A(x_1, y_1, z_1)을 지나고 법선벡터가 $\vec{n} = (a, b, c)$ 인 평면의 방정식은

$$a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$$



【풀이자료】 직선의 방정식을 구할 때에는 한 점의 좌표와 방향벡터가 필요했듯, 평면의 방정식을 구할 때에는 한 점의 좌표와 수직인 벡터가 필요하다. 이 벡터 $\vec{n} = (a, b, c)$ 를 법선벡터라고 한다.

좌표공간에서 “평면의 방정식을 구하라”고 하면 무조건 한 점과 법선벡터를 찾는다.

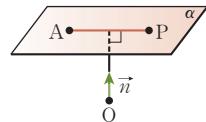
【풀이자료】 평면 α 위의 임의의 점을 P(x, y, z)라고 하면 오른쪽 그림에서

$$\overrightarrow{AP} \perp \vec{n} \rightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) \cdot \vec{n} = 0$$

$$(x-x_1, y-y_1, z-z_1) \cdot (a, b, c) = 0$$

$$\therefore a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$$



02 일차방정식과 평면

좌표공간에서 x, y, z 에 대한 일차방정식

$$ax + by + cz + d = 0$$

은 벡터 $\vec{n} = (a, b, c)$ 에 수직인 평면을 나타낸다.

【풀이자료】 (1) 평면의 방정식의 일반형

$a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$ 을 전개하여 상수항을 끊고 뒤에 d 라고 하면

$$ax + by + cz + d = 0$$

이 식을 평면의 방정식의 일반형이라고 한다. 계수 a, b, c 가 법선벡터의 성분임에 주목한다.

(2) 두 평면의 교선을 포함하는 평면의 방정식

좌표평면에서 두 직선 $ax+by+c=0, a'x+b'y+c'=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구할 때

$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$ 으로 놓고 구한 적이 있다. 이것이 좌표공간에서는 다음과 같은 형태로 변신한다.

좌표공간에서 두 평면 $ax+by+cz+d=0, a'x+b'y+c'z+d'=0$ 의 교선을 포함하는 평면의 방정식은

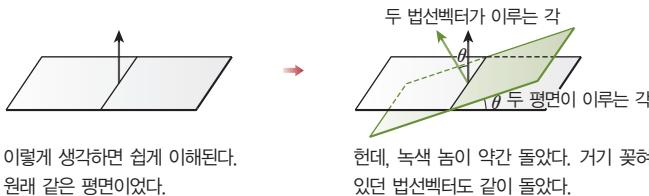
$$ax+by+cz+d+k(a'x+b'y+c'z+d')=0 \quad (\text{단, } k\text{는 실수})$$

03 두 평면이 이루는 각

법선벡터가 각각 $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ 인 두 평면 α, β 가 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)라고 하면

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

증명자료 평면에는 항상 법선벡터가 수직으로 꽂혀 있다. 따라서 두 평면이 이루는 각은 두 평면의 법선벡터가 이루는 각과 같다.

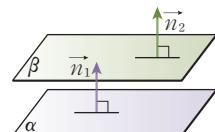


04 두 평면의 평행과 수직

두 평면 α, β 의 법선벡터가 각각 $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ 일 때

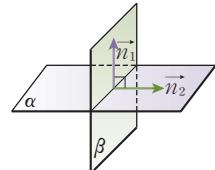
(1) 두 평면 α, β 가 서로 평행하면 ($\alpha // \beta$)

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 // \vec{n}_2 &\iff \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ &\iff a_1 = ka_2, b_1 = kb_2, c_1 = kc_2 \quad (\text{단, } k \text{는 } 0 \text{ 이 아닌 실수}) \end{aligned}$$



(2) 두 평면 α, β 가 서로 수직이면 ($\alpha \perp \beta$)

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 &\iff \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \\ &\iff a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0 \end{aligned}$$



증명자료 직선이 항상 방향벡터를 업고 다니듯 평면은 항상 법선벡터를 수직으로 꽂고 다닌다.

두 평면이 평행하면 두 평면의 법선벡터도 평행하다. 두 평면이 수직이면 두 평면의 법선벡터도 수직이다. 계속되는 이야기지만 평행하면 실수배, 수직이면 내적이 0!

05 점과 평면 사이의 거리

점 $A(x_1, y_1, z_1)$ 과 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

증명자료 원점과 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리 $\rightarrow \frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

증명자료 한 점 A 와 평면 사이의 거리를 구하려면 점 A 에서 평면에 내린 수선의 발 H 를 구한 후 두 점 A, H 사이의 거리를 구해야 한다. 하지만 위와 같이 깔끔한 공식이 있어 그런 수고를 하지 않아도 된다.

이 공식은 [수학 I]에서 배운 점과 직선 사이의 거리 공식 $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 와 유사함에 주목한다.

• 한 걸음 더

1 좌표평면에 평행한 평면의 방정식

점 A(x_1, y_1, z_1)을 지나고 yz 평면에 평행한 평면의 방정식을 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 yz 평면은 x 축에 수직이므로 yz 평면에 평행한 평면의 법선벡터는 $\vec{n}_1 = (1, 0, 0)$ 이다.

따라서 점 A(x_1, y_1, z_1)을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}_1 = (1, 0, 0)$ 인 평면의 방정식은

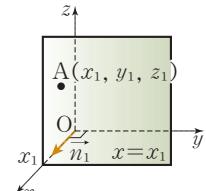
$$1 \cdot (x - x_1) + 0 \cdot (y - y_1) + 0 \cdot (z - z_1) = 0 \quad \therefore x = x_1 \quad \dots \dots \text{①}$$

zx 평면은 y 축에 수직이므로 zx 평면에 평행한 평면의 법선벡터는 $\vec{n}_2 = (0, 1, 0)$ 이다.

따라서 점 A(x_1, y_1, z_1)을 지나고 zx 평면에 평행한 평면의 방정식은 $y = y_1$

xy 평면은 z 축에 수직이므로 xy 평면에 평행한 평면의 법선벡터는 $\vec{n}_3 = (0, 0, 1)$ 이다.

따라서 점 A(x_1, y_1, z_1)을 지나고 xy 평면에 평행한 평면의 방정식은 $z = z_1$



2 직선과 평면이 이루는 각의 크기

직선은 항상 방향벡터를 업고 다니고, 평면은 항상 법선벡터를 수직으로 꽂고 다닌다.

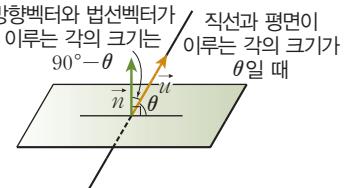
따라서 직선과 평면이 이루는 각은 방향벡터와 법선벡터로 구해진다.

현데, 여기서 한 가지 주의할 점이 있다. 오른쪽 그림에서 보듯 직선과 평면이 이루는 각의 크기가 θ 일 때, 직선의 방향벡터와 평면의 법선벡터가 이루는 각의 크기는 $90^\circ - \theta$ 이다. 이렇게 직선과 평면이 짬뽕돼 있을 때는 약간 긴장하자.

직선과 평면이 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)라고 하면

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|}$$

결국, 짬뽕일 때는 $\cos \theta$ 대신 $\sin \theta$ 를 쓰면 끝.



3 점과 평면 사이의 거리의 확인

점 A(x_1, y_1, z_1)과 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리를 구해 보자.

수선의 발 H의 좌표를 구한 후 두 점 A, H 사이의 거리를 구하면 된다.

$$(i) \text{ 점 } A \text{를 지나고 평면에 수직인 직선은 } \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$

왜냐? $\vec{u} = \vec{n} = (a, b, c)$ 이니까.

$$(ii) \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} = t \quad (t \text{는 실수}) \text{에서 } H(at+x_1, bt+y_1, ct+z_1)$$

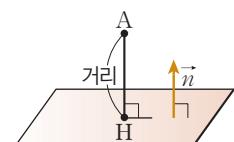
왜냐? 점 H는 직선 위의 점이니까.

$$(iii) \text{ 점 } H \text{의 좌표를 } ax+by+cz+d=0 \text{에 대입하여 정리하면 } t = -\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{a^2+b^2+c^2}$$

왜냐? 점 H는 평면 위의 점이니까.

(iv) 이제 두 점 A, H 사이의 거리를 구하여 위의 t의 값을 대입하면 끝.

$$\overline{AH}^2 = (a^2+b^2+c^2)t^2 = \frac{(ax_1+by_1+cz_1+d)^2}{a^2+b^2+c^2} \rightarrow \overline{AH} = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



필수예제 134**평면의 방정식 (1)**

다음 평면의 방정식을 구하여라.

(1) 점 A(1, 2, 3)을 지나고, 벡터 $\vec{n} = (4, 5, 6)$ 에 수직인 평면

(2) 점 A(4, 5, 6)을 지나고, 법선벡터가 $\vec{n} = (1, 2, 3)$ 인 평면

$$\begin{aligned} \text{풀이 } | & (1) 4(x-1) + 5(y-2) + 6(z-3) = 0 \quad \therefore 4x + 5y + 6z - 32 = 0 \\ & (2) 1 \cdot (x-4) + 2(y-5) + 3(z-6) = 0 \quad \therefore x + 2y + 3z - 32 = 0 \end{aligned}$$

필수예제 135**평면의 방정식 (2)**

다음 평면의 방정식을 구하여라.

(1) 점 A(0, -1, 2)를 지나고, 평면 $x - 2y + 3z - 4 = 0$ 에 평행한 평면

(2) 점 A(-1, 1, -1)을 지나고, 직선 $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ 에 수직인 평면

증명자료 (1) 평행하면 주어진 평면의 법선벡터가 구하는 평면의 법선벡터이다.

(2) 직선이 평면에 수직이면 직선의 방향벡터도 평면에 수직이다.

직선의 방향벡터가 평면의 법선벡터 역할을 할 수 있다.

| 풀이 | (1) 법선벡터가 $\vec{n} = (1, -2, 3)$ 이므로 구하는 평면의 방정식은

$$1 \cdot (x-0) - 2(y+1) + 3(z-2) = 0 \quad \therefore x - 2y + 3z - 8 = 0$$

(2) 평면의 법선벡터는 직선의 방향벡터와 같으므로 $\vec{n} = \vec{u} = (2, -1, 2)$

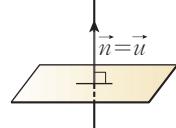
따라서 구하는 평면의 방정식은

$$2(x+1) - 1 \cdot (y-1) + 2(z+1) = 0 \quad \therefore 2x - y + 2z + 5 = 0$$

| 참고 | (1) 법선벡터를 알 때에는 다음과 같이 평면의 방정식의 일반형을 이용하는 것도 좋다.

(i) $\vec{n} = (1, -2, 3)$ 이므로 $x - 2y + 3z + d = 0$ 이라고 놓는다.

(ii) 주어진 점의 좌표를 대입하여 d 의 값을 구한다.



(1) 점 A(x_1, y_1, z_1)을 지나고 벡터 $\vec{n} = (a, b, c)$ 에 수직인 평면의 방정식은

대원칙

$$a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$$

(2) 평행한 두 평면은 법선벡터가 같고, 평면에 수직인 직선의 방향벡터는 평면의 법선벡터와 같다.

정답과 풀이 26쪽 ►

유제 162 점 A(-3, 0, 3)을 지나고, 평면 $3x - y - z + 3 = 0$ 에 평행한 평면의 방정식을 구하여라.

유제 163 점 A(1, 1, 1)을 지나고, 직선 $x-1=2(y-2)=z-1$ 에 수직인 평면의 방정식을 구하여라.

유제 164 점 A(0, 1, 2)를 지나고, 두 점 B(2, 3, 4), C(4, 5, 6)을 지나는 직선에 수직인 평면의 방정식을 구하여라.

필수예제 136**세 점을 지나는 평면의 방정식**

세 점 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 4)$ 를 지나는 평면의 방정식을 구하여라.

풀이 세 점을 지나는 평면의 방정식은 일반형 $ax+by+cz+d=0$ 에 세 점의 좌표를 대입한다.

| 풀이 | 구하는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$ 으로 놓고 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 대입하면

$$2a+d=0, 3b+d=0, 4c+d=0$$

$$\text{위의 세 식에서 } a, b, c \text{ 를 } d \text{ 로 나타내면 } a=-\frac{d}{2}, b=-\frac{d}{3}, c=-\frac{d}{4}$$

$$\text{따라서 구하는 평면의 방정식은 } -\frac{d}{2}x-\frac{d}{3}y-\frac{d}{4}z+d=0 \quad \therefore 6x+4y+3z-12=0$$

| 참고 | 세 점이 주어지는 평면 문제 \rightarrow 계수를 모두 한 문자로 나타낸 후 그 문자를 지워 버린다.

필수예제 137**교선의 방정식과 교선을 포함하는 평면의 방정식**

다음 물음에 답하여라.

(1) 두 평면 $x-y+z=1$, $2x+y-2z=1$ 의 교선의 방정식을 구하여라.

(2) 두 평면 $x+z+1=0$, $y-z-1=0$ 의 교선을 포함하고, 점 A(1, 1, 1)을 지나는 평면의 방정식을 구하여라.

| 풀이 | (1) $x-y+z=1 \quad \dots \textcircled{1}$, $2x+y-2z=1 \quad \dots \textcircled{2}$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ 을 하면 } 3x-z=2 \quad \therefore z=3x-2 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \text{ 을 } \textcircled{1} \text{ 에 대입하면 } y=4x-3 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ 에서 } x \text{ 를 } z, y \text{ 로 각각 나타내면 } x=\frac{z+2}{3}, y=\frac{y+3}{4}$$

$$\text{따라서 구하는 교선의 방정식은 } x=\frac{y+3}{4}=\frac{z+2}{3}$$

(2) 두 평면의 교선을 포함하는 평면의 방정식은 $(x+z+1)+k(y-z-1)=0$ (단, k 는 실수) $\dots \textcircled{5}$

$$\text{이 평면이 점 A}(1, 1, 1)\text{을 지나므로 } (1+1+1)+k(1-1-1)=0 \quad \therefore k=3$$

$$\text{이것을 } \textcircled{5} \text{ 에 대입하여 정리하면 구하는 평면의 방정식은 } x+3y-2z-2=0$$

(1) 세 점을 지나는 평면의 방정식은 일반형 $ax+by+cz+d=0$ 에 세 점의 좌표를 대입한다.

대원칙

(2) 두 평면의 교선은 두 평면의 방정식을 연립하여 세 문자 x, y, z 중 두 변수를 나머지 한 변수의 식으로 나타낸다.

(3) 두 평면의 교선을 포함하는 평면의 방정식 $\rightarrow ax+by+cz+d+k(a'x+b'y+c'z+d')=0$ (단, k 는 실수)

정답과 풀이 27쪽 ▶

유제 165 세 점 A(1, 1, 0), B(0, 1, 1), C(1, 0, 1)을 지나는 평면의 방정식을 구하여라.

유제 166 두 평면 $x-y+z+2=0$, $2x-y-2z-1=0$ 의 교선의 방정식을 구하여라.

유제 167 두 평면 $x+y+z=1$, $x-y-z=2$ 의 교선을 포함하고, 점 A(1, -1, -1)을 지나는 평면의 방정식을 구하여라.

필수예제 138 직선과 평면의 교점

직선 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ 과 평면 $3x+2y+z+6=0$ 의 교점의 좌표를 구하여라.

【풀이】 [1단계] 직선을 이용하여 교점의 좌표 (x, y, z) 를 매개변수 t 로 나타낸다.

[2단계] 평면의 방정식에 대입한다.

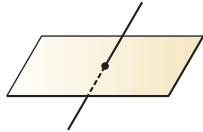
$$| \text{풀이} | \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} = t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x = 2t + 1, y = 3t + 2, z = 4t + 3 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

점 $(2t+1, 3t+2, 4t+3)$ 은 평면 $3x+2y+z+6=0$ 위의 점이므로

$$3(2t+1) + 2(3t+2) + (4t+3) + 6 = 0 \quad \therefore t = -1$$

$t = -1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $x = -1, y = -1, z = -1$ 이므로 교점의 좌표는 $(-1, -1, -1)$



필수예제 139 평면에 대하여 대칭인 점

점 $A(4, 3, 2)$ 와 평면 $3x+2y+z=6$ 에 대하여 대칭인 점 A' 의 좌표를 구하여라.

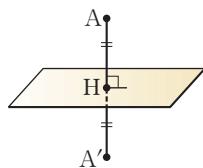
【풀이】 대칭점이란 반대편의 점. 원래 점과 대칭점을 이은 선분의 중점은 수선의 발이 된다.

결국, 대칭점 문제는 수선의 발 문제만 제대로 알면 거의 거치 먹기. 대칭점 문제가 어려운 벗들은 수선의 발을 다시 한번 본다.

| 풀이 | [1단계] 평면에 수직인 직선의 방정식을 구한다.

직선 AA' 은 평면 $3x+2y+z=6$ 에 수직이므로 평면의 법선벡터
 $\vec{n} = (3, 2, 1)$ 과 직선 AA' 의 방향벡터 \vec{u} 가 평행하다.

$$\text{즉, } \vec{u} = \vec{n} = (3, 2, 1) \text{이므로 직선 } AA' \text{의 방정식은 } \frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$$



[2단계] 이 직선과 평면의 교점을 H 라고 하면 $H(3t+4, 2t+3, t+2)$

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1} = t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면 } x = 3t+4, y = 2t+3, z = t+2$$

직선과 평면의 교점을 H 라고 하면 $H(3t+4, 2t+3, t+2)$

이때 점 H 는 평면 $3x+2y+z=6$ 위의 점이므로

$$3(3t+4) + 2(2t+3) + (t+2) = 6 \quad \therefore t = -1 \quad \therefore H(1, 1, 1)$$

[3단계] 점 A' 의 좌표를 구한다.

$$A'(a, b, c) \text{라고 하면 } \frac{a+4}{2} = 1, \frac{b+3}{2} = 1, \frac{c+2}{2} = 1$$

$$\therefore a = -2, b = -1, c = 0 \quad \therefore A'(-2, -1, 0)$$

대원칙

직선과 평면의 교점의 좌표를 구할 때에는 먼저 그 점의 좌표를 매개변수로 나타낸 후 평면의 방정식에 대입한다.

정답과 풀이 27쪽 ►

유제 168 직선 $x = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$ 과 평면 $x-2y-3z+3=0$ 의 교점의 좌표를 구하여라.

유제 169 점 $A(2, 2, 2)$ 과 평면 $x-2y+z=3$ 에 대하여 대칭인 점 A' 의 좌표를 구하여라.

필수예제 140**두 평면이 이루는 각**

두 평면 $x+y-4z-5=0$, $x-2y+2z-3=0$ 이 이루는 각의 크기를 구하여라.

풀이 두 평면의 법선벡터의 내적을 이용한다.

| 풀이 | 두 평면의 법선벡터는 각각 $\vec{n}_1=(1, 1, -4)$, $\vec{n}_2=(1, -2, 2)$

두 평면이 이루는 각의 크기를 $\theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 라고 하면

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|1 \times 1 + 1 \times (-2) + (-4) \times 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2} \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{9}{3\sqrt{2} \times 3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

필수예제 141**직선과 평면이 이루는 각**

직선 $\frac{x-1}{2} = y-2 = \frac{z-3}{3}$ 과 평면 $3x-2y+z+1=0$ 이 이루는 각의 크기를 구하여라.

풀이 직선의 방향벡터와 평면의 법선벡터의 내적을 이용한다.

| 풀이 | 직선의 방향벡터는 $\vec{u}=(2, 1, 3)$, 평면의 법선벡터는 $\vec{n}=(3, -2, 1)$ 이므로

직선과 평면이 이루는 각의 크기를 $\theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 라고 하면

$$\sin \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} = \frac{|2 \times 3 + 1 \times (-2) + 3 \times 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{14} \sqrt{14}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

(1) 두 평면 α, β 가 이루는 각의 크기를 θ 라고 할 때

$$\rightarrow \text{법선벡터가 각각 } \vec{n}_1, \vec{n}_2 \text{이면 } \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

\rightarrow 두 평면 α, β 가 이루는 각의 크기는 일반적으로 θ 와 $\pi-\theta$ 중 크지 않은 쪽을 택한다.

대원칙

(2) 직선 l 과 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ 라고 할 때

$$\rightarrow \text{직선의 방향벡터는 } \vec{u}, \text{ 평면의 법선벡터는 } \vec{n} \text{이면 } \cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|}$$

\rightarrow 직선 l 의 방향벡터와 평면 α 의 법선벡터가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}-\theta$ 이다.

정답과 풀이 28쪽 ▶

유제 170 두 평면 $x+2y-3z=4$, $2x-3y+z=5$ 가 이루는 각의 크기를 구하여라.

유제 171 직선 $\frac{x+1}{-4} = y+2 = z+3$ 과 평면 $2x-2y+z+1=0$ 이 이루는 각의 크기를 구하여라.

필수예제 142**두 평면의 평행과 수직**

점 A(1, 1, 1)을 지나고, 두 평면 $x-2y+4z-6=0$, $2x-3y+5z-8=0$ 에 수직인 평면의 방정식을 구하여라.

풀이 두 평면에 수직인 평면? 구하는 평면의 법선벡터가 주어진 두 평면의 법선벡터와 수직. 수직이면 내적이 0!

| 풀이 | 두 평면의 법선벡터는 각각 $\vec{n}_1=(1, -2, 4)$, $\vec{n}_2=(2, -3, 5)$

구하는 평면의 법선벡터를 $\vec{n}=(a, b, c)$ 라고 하면

$$\vec{n} \cdot \vec{n}_1 = 0 \text{에서 } a-2b+4c=0 \quad \dots \textcircled{\text{1}}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{n}_2 = 0 \text{에서 } 2a-3b+5c=0 \quad \dots \textcircled{\text{2}}$$

$$\textcircled{\text{1}}, \textcircled{\text{2}} \text{을 연립하여 } a, b \text{를 } c \text{로 나타내면 } a=2c, b=3c \quad \therefore \vec{n}=(2c, 3c, c)$$

따라서 구하는 평면의 방정식은 $2c(x-1)+3c(y-1)+c(z-1)=0$

$$\therefore 2x+3y+z-6=0$$

필수예제 143**점과 평면 사이의 거리**

다음을 구하여라.

(1) 점 A(1, 2, 3)과 평면 $x+2y+2z+1=0$ 사이의 거리

(2) 점 O(0, 0, 0)과 평면 $x-2y+3z-9=0$ 사이의 거리

| 풀이 | (1) $\frac{|1 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{12}{3} = 4$

(2) $\frac{|1 \times 0 - 2 \times 0 + 3 \times 0 - 9|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{9}{\sqrt{14}} = \frac{9\sqrt{14}}{14}$

(1) 두 평면이 평행하면 두 평면의 법선벡터도 평행하고, 두 평면이 수직이면 두 평면의 법선벡터도 수직이다.

두 평면의 법선벡터가 각각 \vec{n}_1, \vec{n}_2 일 때

대원칙

① 평행 조건 : $\vec{n}_1 = k\vec{n}_2$ (단, k 는 0이 아닌 실수)

② 수직 조건 : $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

(2) 점 A(x_1, y_1, z_1)과 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리

$$\rightarrow \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|\text{대입한 놈}|}{\sqrt{\text{계수들의 제곱의 합}}}$$

정답과 풀이 28쪽 ▶

유제 172 두 평면 $2x+my+4z-5=0$, $x-3y+2z-4=0$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 평면이 평행할 때, 상수 m 의 값을 구하여라.

(2) 두 평면이 수직일 때, 상수 m 의 값을 구하여라.

유제 173 점 O(0, 0, 0)을 지나고, 두 평면 $x-y-2z=10$, $2x+y+z=10$ 에 수직인 평면의 방정식을 구하여라.

유제 174 점 A(4, 3, 2)와 평면 $3x+2y+z=6$ 사이의 거리를 구하여라.

6

공간벡터를 이용한 구의 방정식

3. 공간벡터

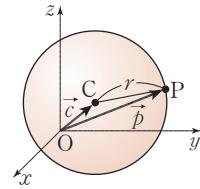
01 공간벡터를 이용한 구의 방정식

(1) 구의 중심 C와 구 위의 임의의 점 P의 위치벡터를 각각 \vec{c} , \vec{p} 라고 할 때, 반지름의 길이가 r 인 구의 방정식을 벡터로 나타내면

$$|\vec{p} - \vec{c}| = r \iff (\vec{p} - \vec{c}) \cdot (\vec{p} - \vec{c}) = r^2 \quad \leftarrow \text{벡터방정식}$$

(2) 구 위의 점을 $P(x, y, z)$ 라고 할 때, 점 $C(x_1, y_1, z_1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r 인 구의 방정식은

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r^2$$



|증명| 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r 인 구 위의 임의의 점을 P라고 하자.

(1) 두 점 C, P의 위치벡터를 각각 \vec{c} , \vec{p} 라고 하면 $|\vec{CP}| = r$ 이므로 $|\vec{p} - \vec{c}| = r$ ①

①의 양변을 제곱한 다음 내적의 꼴로 정리하면 $|\vec{p} - \vec{c}|^2 = r^2 \quad \therefore (\vec{p} - \vec{c}) \cdot (\vec{p} - \vec{c}) = r^2$ ②

역으로 ①, ②을 만족시키는 벡터 \vec{p} 를 위치벡터로 하는 점 P는 중심이 점 C이고 반지름의 길이가 r 인 구 위에 있다.

(2) 점 $C(x_1, y_1, z_1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r 인 구 위의 점을 $P(x, y, z)$ 라고 하면 ②에서

$$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = r^2 \quad \therefore (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r^2$$

• 한 걸음 더

◎ 지름의 양 끝점이 주어진 구의 벡터방정식

좌표공간의 두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 구의 방정식을 구해 보자.

구 위의 임의의 점을 P라고 하면 지름에 대한 원주각의 크기는 90° 이므로

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$$

이때 세 점 A, B, P의 위치벡터를 각각 \vec{a} , \vec{b} , \vec{p} 라고 하면

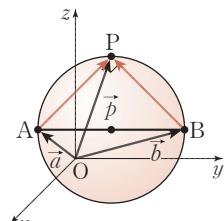
$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$$

한편, $\vec{p} = (x, y, z)$, $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ 라고 하면

$$\vec{p} - \vec{a} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1), \vec{p} - \vec{b} = (x - x_2, y - y_2, z - z_2) \text{이므로}$$

$$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) \cdot (x - x_2, y - y_2, z - z_2) = 0$$

$$\therefore (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + (z - z_1)(z - z_2) = 0$$



확인 다음 구의 방정식을 구하여라.

(1) 중심의 좌표가 $(-2, 1, 4)$ 이고 반지름의 길이가 5인 구

(2) 두 점 $A(4, 1, 5)$, $B(-2, 3, 1)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 구

풀이 (1) $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 25$

$$(2) (x-4)(x+2) + (y-1)(y-3) + (z-5)(z-1) = 0 \quad \therefore (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$$

필수예제 144

구에 접하는 평면의 방정식

구 $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$ 에 접하고 평면 $3x+2y+z+1=0$ 과 평행한 평면의 방정식을 구하여라.

풀이 평면 $ax+by+cz+d=0$ 이 구 $(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = r^2$ 에 접한다.

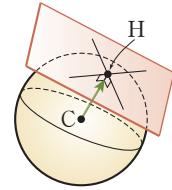
→ 구의 중심 (x_1, y_1, z_1) 과 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리가 구의 반지름의 길이와 같다.

| 풀이 | 구하는 평면의 법선벡터가 평면 $3x+2y+z+1=0$ 의 법선벡터와 같으므로 $\vec{n}=(3, 2, 1)$ 에서 구하는 평면의 방정식을 $3x+2y+z+d=0$ 으로 놓을 수 있다.

구의 중심 $C(1, 2, 3)$ 과 평면 $3x+2y+z+d=0$ 사이의 거리는 구의 반지름의 길이 $\sqrt{14}$ 와 같으므로

$$CH = \frac{|3 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 3 + d|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \sqrt{14}, |10 + d| = 14 \quad \therefore d = 4 \text{ 또는 } d = -24$$

따라서 구하는 평면의 방정식은 $3x+2y+z+4=0$ 또는 $3x+2y+z-24=0$



필수예제 145

구와 평면이 만나서 생기는 원의 넓이

구 $(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 15$ 가 평면 $3x+2y+z-6=0$ 과 만나서 생기는 원의 넓이를 구하여라.

풀이 구의 중심 $C(4, 3, 2)$ 과 평면 $3x+2y+z-6=0$ 사이의 거리는

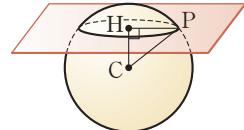
$$CH = \frac{|3 \times 4 + 2 \times 3 + 1 \times 2 - 6|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

구의 반지름의 길이는 $\sqrt{15}$ 이므로 $CP = \sqrt{15}$

오른쪽 그림의 직각삼각형 CPH에서

$$HP^2 = CP^2 - CH^2 = (\sqrt{15})^2 - (\sqrt{14})^2 = 1 \quad \therefore HP = 1$$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\pi \times 1^2 = \pi$



대원칙

(1) 점 (x_1, y_1, z_1) 과 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리 $\rightarrow \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

(2) 구의 반지름의 길이를 r , 구의 중심과 평면 사이의 거리를 d 라고 할 때, 구와 평면의 교선인 원의 반지름의 길이 $\rightarrow \sqrt{r^2-d^2}$ (단, $r > d$)

정답과 풀이 28쪽 ▶

유제 175 구 $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 11$ 에 접하고 직선 $x = \frac{y-3}{-3} = z$ 에 수직인 평면의 방정식을 구하여라.

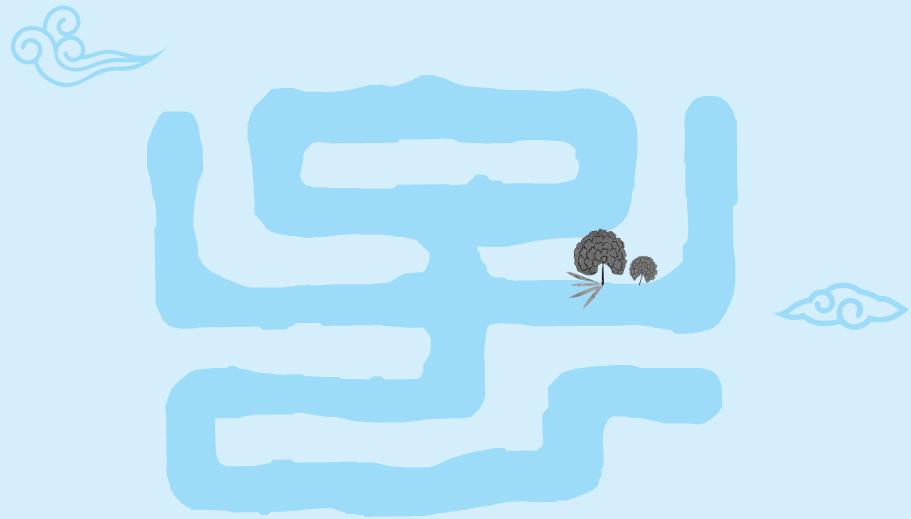
유제 176 구 $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 25$ 가 평면 $2x+y+2z-11=0$ 과 만나서 생기는 원의 넓이를 구하여라.

Step 1

- 193** 두 점 $A(2, -3, 1)$, $B(-1, 0, 4)$ 를 잇는 선분 AB 를 $1 : 2$ 로 내분하는 점 P 를 지나고 직선 AB 에 수직인 평면의 방정식을 구하여라.
- 194** 평면 α 는 점 $(2, -1, 3)$ 을 지나고 평면 $x - 2y + 3z - 1 = 0$ 에 평행하다. 점 $(1, k, k-2)$ 가 평면 α 위의 점일 때, k 의 값을 구하여라.
- 195** 세 점 $A(-1, -1, 1)$, $B(1, 1, 2)$, $C(3, 1, 4)$ 를 지나는 평면을 α 라고 할 때, 원점과 평면 α 사이의 거리를 구하여라.
- 196** 점 $A(1, 2, 3)$ 과 평면 $2x - y + z + 3 = 0$ 에 대하여 대칭인 점을 $A'(a, b, c)$ 라고 할 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.
- 197** 두 평면 $2x + y + z = 1$, $ax + 2y - z = 5$ 가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 일 때, 정수 a 의 값을 구하여라.
- 198** 세 평면
 $\alpha : x - 2y + (a-3)z = 1$, $\beta : 3x + ay - z = 10$, $\gamma : 2x + 2by + bz = -3$
 에 대하여 두 평면 α , β 는 수직이고 두 평면 α , γ 는 평행할 때, 상수 a , b 의 값을 구하여라.
- 199** $\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2} = 11$ 위의 점 $A(1, 2, 3)$ 에서 구에 접하는 평면의 방정식을 구하여라.
- 200** 평면 $\alpha : 2x - y - z + 1 = 0$ 과 $\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2} = k$ 가 만나서 생기는 원의 넓이가 3π 일 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

Step 2

- 201** 평면 $x+2y-3z=12$ 가 x 축, y 축, z 축과 만나는 점을 각각 P, Q, R라고 할 때, $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$ 를 구하여라.
- 202** 점 A(0, 1, 2)를 지나고, 직선 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ 을 포함하는 평면의 방정식을 구하여라.
- 203** 평면 $\alpha : 3x+2y+z=6$ 에 대하여 같은 쪽에 두 점 A(4, 3, 2), B(2, 1, 4)가 있다. 평면 α 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값을 구하여라.
- 204** 평면 $x+2y+2z=3$ 위에 한 변의 길이가 6인 정삼각형 F가 있다. 정삼각형 F의 평면 $2x-2y-z=1$ 위로의 정사영을 F' 이라고 할 때, 삼각형 F' 의 넓이를 구하여라.
- 205** 직선 $\frac{x-1}{a-1} = \frac{y+a}{a+1} = \frac{z}{10}$ 와 평면 $(a-1)x+(a+1)y-z=2$ 가 평행할 때, 상수 a 의 값을 구하여라.
- 206** 평면 $x-2y+2z-3=0$ 에 평행한 평면 α 와 원점 사이의 거리가 3일 때, 평면 α 의 방정식을 구하여라.
- 207** 두 평면 $2x-2y+z=1$, $2x-2y+z=10$ 사이의 거리를 구하여라.
- 208** 구 $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 1$ 위의 점과 평면 $2x-y+2z+5=0$ 사이의 거리의 최댓값을 구하여라.
- 209** 평면 $3x+2y+z=k$ 가 구 $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$ 에 접할 때, 모든 실수 k 의 값의 합을 구하여라.



풍산자 기하와 벡터

정답과
풀이

I. 평면곡선

1 이차곡선

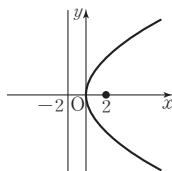
001

- (1) $y^2 = 4px$ 에서 $p = -3$ 이므로 $y^2 = -12x$
 (2) $x^2 = 4py$ 에서 $p = -4$ 이므로 $x^2 = -16y$

002

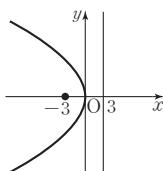
- (1) $4p = 8$ 에서 $p = 2$

∴ 초점: $(2, 0)$, 준선: $x = -2$



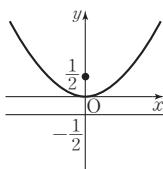
- (2) $4p = -12$ 에서 $p = -3$

∴ 초점: $(-3, 0)$, 준선: $x = 3$



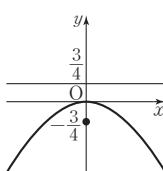
- (3) $4p = 2$ 에서 $p = \frac{1}{2}$

∴ 초점: $(0, \frac{1}{2})$, 준선: $y = -\frac{1}{2}$



- (4) $4p = -3$ 에서 $p = -\frac{3}{4}$

∴ 초점: $(0, -\frac{3}{4})$, 준선: $y = \frac{3}{4}$



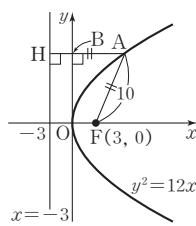
003

- 포물선 $y^2 = 12x = 4 \cdot 3 \cdot x$ 에서 $p = 3$ 이므로 초점의 좌표는 $F(3, 0)$ 이고 준선의 방정식은 $x = -3$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 준선과 y 축에 내린 수선의 발을 각각 H, B라고 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AH} = \overline{AF} = 10$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{AH} - \overline{BH} = 10 - 3 = 7$$



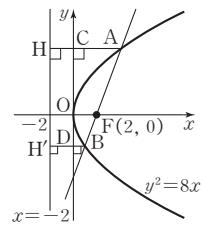
004

- 포물선 $y^2 = 8x = 4 \cdot 2 \cdot x$ 에서 $p = 2$ 이므로 초점의 좌표는 $F(2, 0)$ 이고 준선의 방정식은 $x = -2$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라고 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF} = \overline{AH}, \overline{BF} = \overline{BH'}$$

이 때 $\overline{AB} = 9$ 이므로



$$\begin{aligned}\overline{AC} + \overline{BD} &= (\overline{AH} - \overline{CH}) + (\overline{BH'} - \overline{DH'}) \\ &= (\overline{AF} - \overline{CH}) + (\overline{BF} - \overline{DH'}) \\ &= (\overline{AF} + \overline{BF}) - 4 \\ &= 9 - 4 = 5\end{aligned}$$

005

포물선 위의 한 점을 P(x, y)라 하고 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

- (1) 점 H의 좌표는 $(3, y)$ 이므로

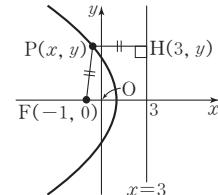
포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} = \overline{PH}$$

$$\therefore \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = |3-x|$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$y^2 = -8(x-1)$$



- (2) 점 H의 좌표는 $(x, -2)$ 이므로

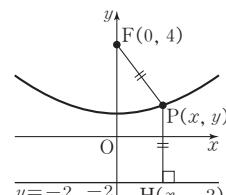
포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} = \overline{PH}$$

$$\therefore \sqrt{x^2 + (y-4)^2} = |y+2|$$

양변을 제곱하여 정리하면

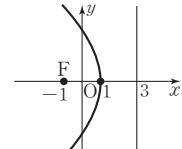
$$x^2 = 12(y-1)$$



다른풀이 (1) [1단계] 포물선의 꼭짓점

은 초점과 준선의 중간이므로

꼭짓점의 좌표는 $(1, 0)$



[2단계] p 의 절댓값은 초점과 꼭

짓점 사이의 거리이고 $p < 0$ 이

므로 $p = -2$

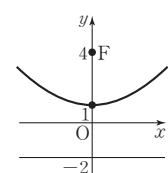
[3단계] 공식을 이용하여 포물선의 방정식을 구하면

$$(y-0)^2 = 4 \cdot (-2) \cdot (x-1)$$

$$\therefore y^2 = -8(x-1)$$

(2) [1단계] 포물선의 꼭짓점은 초점과

준선의 중간이므로 꼭짓점의 좌
표는 $(0, 1)$



[2단계] p 의 절댓값은 초점과 꼭짓

점 사이의 거리이고 $p > 0$ 이므로

$$p = 3$$

[3단계] 공식을 이용하여 포물선의 방정식을 구하면

$$(x-0)^2 = 4 \cdot 3 \cdot (y-1) \quad \therefore x^2 = 12(y-1)$$

006

(1) 주어진 조건을 만족시키는 점을 $P(x, y)$ 라 하고 점 P 에서 직선 $x=4$ 에 내린 수선의 발을 H 라고 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} = \overline{PH}$$

$$\therefore \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2} = |4-x|$$

양변을 제곱하여 정리하면

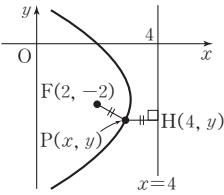
$$(y+2)^2 = -4(x-3)$$

(2) 주어진 조건을 만족시키는 점을 $P(x, y)$ 라 하고 점 P 에서 직선 $y=0$ 에 내린 수선의 발을 H 라고 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PH}$

$$\therefore \sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2} = |y-0|$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$(x+1)^2 = 8(y-2)$$



⑦은 포물선 $x^2 = 4y$ 를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $x^2 = 4y = 4 \cdot 1 \cdot y$ 에서 $p=1$ 이므로

초점 : $(0, 1)$, 준선 : $y=-1$, 꼭짓점 : $(0, 0)$

따라서 주어진 포물선에서

초점 : $(0, 2)$, 준선 : $y=0$, 꼭짓점 : $(0, 1)$

(2) 주어진 식을 y 에 대하여 완전제곱 꼴로 고치면

$$x = (y^2 + 4y + 4) - 4 + 3$$

$$\therefore (y+2)^2 = x + 1 \quad \dots \textcircled{7}$$

⑦은 포물선 $y^2 = x$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

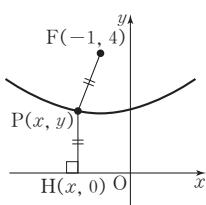
포물선 $y^2 = x = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot x$ 에서 $p=\frac{1}{4}$ 이므로

초점 : $(\frac{1}{4}, 0)$, 준선 : $x = -\frac{1}{4}$, 꼭짓점 : $(0, 0)$

따라서 주어진 포물선에서

초점 : $(-\frac{3}{4}, -2)$, 준선 : $x = -\frac{5}{4}$,

꼭짓점 : $(-1, -2)$



007

(1) [1단계] 주어진 식을 y 에 대하여 완전제곱 꼴로 고치면

$$(y^2 - 4y + 4) - 4 = -4x - 8$$

$$\therefore (y-2)^2 = -4(x+1) \quad \dots \textcircled{7}$$

[2단계] ⑦은 포물선 $y^2 = -4x$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $y^2 = -4x = 4 \cdot (-1) \cdot x$ 에서 $p=-1$ 이므로

초점 : $(-1, 0)$, 준선 : $x=1$, 꼭짓점 : $(0, 0)$

[3단계] 따라서 주어진 포물선에서

초점 : $(-2, 2)$, 준선 : $x=0$, 꼭짓점 : $(-1, 2)$

(2) [1단계] 주어진 식을 x 에 대하여 완전제곱 꼴로 고치면

$$(x^2 - 2x + 1) - 1 = 2y - 3$$

$$\therefore (x-1)^2 = 2(y-1) \quad \dots \textcircled{7}$$

[2단계] ⑦은 포물선 $x^2 = 2y$ 를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $x^2 = 2y = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot y$ 에서 $p=\frac{1}{2}$ 이므로

초점 : $(0, \frac{1}{2})$, 준선 : $y = -\frac{1}{2}$, 꼭짓점 : $(0, 0)$

[3단계] 따라서 주어진 포물선에서

초점 : $(1, \frac{3}{2})$, 준선 : $y = \frac{1}{2}$, 꼭짓점 : $(1, 1)$

008

$$(1) y-1 = \frac{1}{4}x^2 \quad \therefore x^2 = 4(y-1) \quad \dots \textcircled{7}$$

009

구하는 포물선의 방정식을 $x^2 + Ax + By + C = 0$

$(B \neq 0)$ 으로 놓으면 이 포물선이 세 점 $(-1, 0)$,

$(3, 0)$, $(1, -1)$ 을 지나므로

$$1 - A + C = 0 \quad \dots \textcircled{7}$$

$$9 + 3A + C = 0 \quad \dots \textcircled{8}$$

$$1 + A - B + C = 0 \quad \dots \textcircled{9}$$

⑦, ⑧, ⑨을 연립하여 풀면

$$A = -2, B = -4, C = -3$$

따라서 구하는 포물선의 방정식은

$$x^2 - 2x - 4y - 3 = 0$$

010

오른쪽 그림과 같이 포물선 위의 한

점을 $P(x, y)$, 점 P 에서 준선에

내린 수선의 발을 H 라 하고 준선의

방정식을 $x=a$ 라고 하자. 포물선

의 정의에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PH}$ 이므로

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = |x-a|$$

양변을 제곱하면

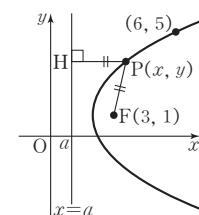
$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = (x-a)^2 \quad \dots \textcircled{7}$$

⑦의 점 $(6, 5)$ 를 지나므로

$$25 = (6-a)^2, 6-a = \pm 5 \quad \therefore a=1 \text{ 또는 } a=11$$

따라서 구하는 포물선의 방정식은

$$(y-1)^2 = 4(x-2) \text{ 또는 } (y-1)^2 = -16(x-7)$$



011

(1) 초점이 x 축 위에 있으므로 구하는 타원의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0) \text{이라고 하자.}$$

거리의 합이 10이므로

$$2a = 10 \quad \therefore a = 5 \quad \dots \textcircled{1}$$

$c^2 = a^2 - b^2$ 에서

$$4^2 = 5^2 - b^2 \quad \therefore b^2 = 9 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 을 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{에 대입하면 } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

(2) 초점이 y 축 위에 있으므로 구하는 타원의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b > a > 0) \text{이라고 하자.}$$

거리의 합이 12이므로

$$2b = 12 \quad \therefore b = 6 \quad \dots \textcircled{1}$$

$c^2 = b^2 - a^2$ 에서

$$5^2 = 6^2 - a^2 \quad \therefore a^2 = 11 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 을 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{에 대입하면 } \frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{36} = 1$$

012

두 점으로부터의 거리의 합이 일정하므로 점 P가 나타내는 자취는 타원이다. 초점이 y 축 위에 있으므로 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b > a > 0)$ 이라고 하면 거리의 합이 6이므로

$$2b = 6 \quad \therefore b = 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

$c^2 = b^2 - a^2$ 에서

$$(\sqrt{5})^2 = 3^2 - a^2 \quad \therefore a^2 = 4 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 을 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{에 대입하면}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

013

(1) $a = 6, b = 2$ 이므로 $a > b > 0$

따라서 그래프는 오른쪽

그림과 같다.

\therefore 장축의 길이 :

$$2a = 2 \times 6 = 12$$

단축의 길이 :

$$2b = 2 \times 2 = 4$$

중심 : $(0, 0)$

꼭짓점 : $(6, 0), (-6, 0), (0, 2), (0, -2)$

초점 : 초점 공식에서 $c = \sqrt{36 - 4} = 4\sqrt{2}$ 이므로

$$(4\sqrt{2}, 0), (-4\sqrt{2}, 0)$$

(2) $a = 3, b = 5$ 이므로 $b > a > 0$

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

\therefore 장축의 길이 : $2b = 2 \times 5 = 10$

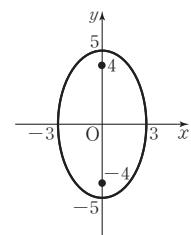
단축의 길이 : $2a = 2 \times 3 = 6$

중심 : $(0, 0)$

꼭짓점 : $(3, 0), (-3, 0), (0, 5), (0, -5)$

초점 : 초점 공식에서 $c = \sqrt{25 - 9} = 4$ 이므로

$$(0, 4), (0, -4)$$



$$(3) \text{ 양변을 4로 나누면 } \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$a = 1, b = 2 \text{이므로 } b > a > 0$$

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

\therefore 장축의 길이 : $2b = 2 \times 2 = 4$

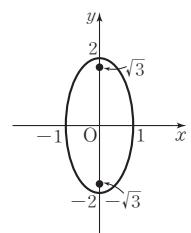
단축의 길이 : $2a = 2 \times 1 = 2$

중심 : $(0, 0)$

꼭짓점 : $(1, 0), (-1, 0), (0, 2), (0, -2)$

초점 : 초점 공식에서 $c = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$ 이므로

$$(0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3})$$



$$(4) \text{ 양변을 36으로 나누면 } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$a = 3, b = 2 \text{이므로 } a > b > 0$$

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

\therefore 장축의 길이 : $2a = 2 \times 3 = 6$

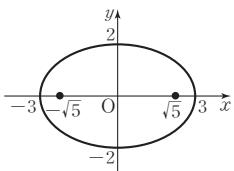
단축의 길이 : $2b = 2 \times 2 = 4$

중심 : $(0, 0)$

꼭짓점 : $(3, 0), (-3, 0), (0, 2), (0, -2)$

초점 : 초점 공식에서 $c = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$ 이므로

$$(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$$



014

초점이 y 축 위에 있으므로 구하는 타원의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b > a > 0) \text{이라고 하자.}$$

(1) 장축의 길이가 6이므로

$$2b = 6 \quad \therefore b = 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$c^2 = b^2 - a^2$$

$$(\sqrt{7})^2 = 3^2 - a^2 \quad \therefore a^2 = 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 을 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{에 대입하면 } \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} = 1$$

(2) 단축의 길이가 8이므로

$$2a=8 \quad \therefore a=4 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$c^2=b^2-a^2 \text{에서}$$

$$3^2=b^2-4^2 \quad \therefore b^2=25 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 을 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{에 대입하면 } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

015

초점이 y 축 위에 있으므로 구하는 타원의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b > a > 0) \text{이라고 하자.}$$

장축의 길이가 10, 단축의 길이가 6이므로

$$2b=10, 2a=6 \quad \therefore a=3, b=5$$

$$\text{이것을 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{에 대입하면 } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

016

$$\text{타원 } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{에서}$$

$$c=\sqrt{25-16}=3 \text{이므로}$$

초점의 좌표는 $(3, 0), (-3, 0)$

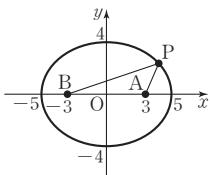
즉, 두 점 A, B가 이 타원의 초

점이므로

$$\overline{PA}+\overline{PB}=2a=2\times 5=10$$

따라서 $\triangle APB$ 의 둘레의 길이는

$$(\overline{PA}+\overline{PB})+\overline{AB}=10+6=16$$



017

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \text{에서 } a=5, b=3$$

타원의 정의에 의하여

$$\overline{AF}+\overline{AF'}=\overline{BF}+\overline{BF'}=2a=2\times 5=10$$

따라서 $\square AF'BF$ 의 둘레의 길이는

$$(\overline{AF}+\overline{AF'})+(\overline{BF}+\overline{BF'})=10+10=20$$

018

[1단계] 타원의 중심은 두 초점을 이은

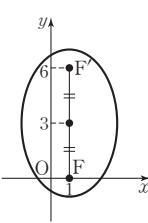
선분의 중점이므로 $(1, 3)$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y-3)^2}{b^2} = 1$$

[2단계] 초점과 중심 사이의 거리가 c

이므로 $c=3$



장축의 길이가 8이므로

$$2b=8 \quad \therefore b=4$$

$$c^2=b^2-a^2 \text{에서 } 3^2=4^2-a^2 \quad \therefore a^2=7$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{(x-1)^2}{7} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$

다른풀이 타원 위의 한 점을 $P(x, y)$ 라고 하면 타원의 정의에 의하여 $\overline{FP}+\overline{F'P}=8$ 이므로

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-6)^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}=8$$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-6)^2}=8-\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$4\sqrt{(x-1)^2+y^2}=3y+7$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$16(x-1)^2+7(y-3)^2=112$$

$$\therefore \frac{(x-1)^2}{7} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$

019

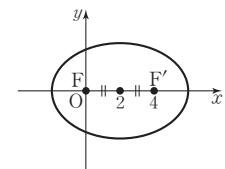
두 점으로부터의 거리의 합이 일정한 점의 자취는 타원이다.

(1) [1단계] 타원의 중심은 두 초

점을 이은 선분의 중점이
므로 $(2, 0)$

따라서 구하는 타원의 방
정식은

$$\frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



[2단계] 초점과 중심 사이의 거리가 c 이므로 $c=2$

거리의 합이 8이므로

$$2a=8 \quad \therefore a=4$$

$$c^2=a^2-b^2 \text{에서 } 2^2=4^2-b^2 \quad \therefore b^2=12$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

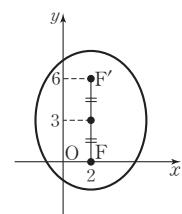
(2) [1단계] 타원의 중심은 두 초점을

이은 선분의 중점이므로

$$(2, 3)$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y-3)^2}{b^2} = 1$$



[2단계] 초점과 중심 사이의 거리가 c 이므로 $c=3$

거리의 합이 10이므로

$$2b=10 \quad \therefore b=5$$

$$c^2=b^2-a^2 \text{에서 } 3^2=5^2-a^2 \quad \therefore a^2=16$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$$

020

(1) [1단계] 주어진 타원의 방정식을 변형하면

$$(x^2+4x)+4(y^2-2y)+4=0 \text{에서}$$

$$(x+2)^2+4(y-1)^2=4$$

$$\therefore \frac{(x+2)^2}{4}+(y-1)^2=1 \quad \dots \textcircled{①}$$

[2단계] ①은 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 을 x 축의 방향으로

-2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{타원 } \frac{x^2}{4}+y^2=1 \text{에서 } a=2, b=1 \text{이므로}$$

장축의 길이 : $2 \times 2=4$

단축의 길이 : $2 \times 1=2$

초점 : $c=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$ 이므로 $(\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$

꼭짓점 : $(2, 0), (-2, 0), (0, 1), (0, -1)$

중심 : $(0, 0)$

[3단계] 따라서 주어진 타원에서

장축의 길이 : 4

단축의 길이 : 2

초점 : $(\sqrt{3}-2, 1), (-\sqrt{3}-2, 1)$

꼭짓점 : $(0, 1), (-4, 1), (-2, 2), (-2, 0)$

중심 : $(-2, 1)$

(2) [1단계] 주어진 타원의 방정식을 변형하면

$$4(x^2+2x)+3(y^2-4y)+4=0 \text{에서}$$

$$4(x+1)^2+3(y-2)^2=12$$

$$\therefore \frac{(x+1)^2}{3}+\frac{(y-2)^2}{4}=1 \quad \dots \textcircled{①}$$

[2단계] ①은 타원 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ 을 x 축의 방향으로

-1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{타원 } \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1 \text{에서 } a=\sqrt{3}, b=2 \text{이므로}$$

장축의 길이 : $2 \times 2=4$

단축의 길이 : $2 \times \sqrt{3}=2\sqrt{3}$

초점 : $c=\sqrt{4-3}=1$ 이므로 $(0, 1), (0, -1)$

꼭짓점 : $(\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0), (0, 2), (0, -2)$

중심 : $(0, 0)$

[3단계] 따라서 주어진 타원에서

장축의 길이 : 4

단축의 길이 : $2\sqrt{3}$

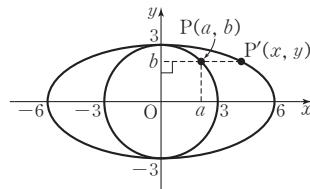
초점 : $(-1, 3), (-1, 1)$

꼭짓점 : $(\sqrt{3}-1, 2), (-\sqrt{3}-1, 2), (-1, 4),$

$(-1, 0)$

중심 : $(-2, 1)$

021



원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 $P(a, b)$ 를 x 축의 방향으로 2배 확대한 도형 위의 점을 $P'(x, y)$ 라고 하면

$$x=2a, y=b$$

$$\therefore a=\frac{1}{2}x, b=y \quad \dots \textcircled{②}$$

한편, 점 P 는 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로

$$a^2+b^2=9 \quad \dots \textcircled{③}$$

②을 ③에 대입하면 구하는 도형의 방정식은

$$\left(\frac{1}{2}x\right)^2+y^2=9 \quad \therefore \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$$

022

점 P 의 좌표를 (a, b) , 점 Q 의

좌표를 (x, y) 라고 하자.

점 P 는 원 $x^2+y^2=16$ 위의 점 이므로 $a^2+b^2=16 \quad \dots \textcircled{④}$

이때 점 P 에서 x 축에 내린 수

선의 발 H 의 좌표는 $(a, 0)$ 이

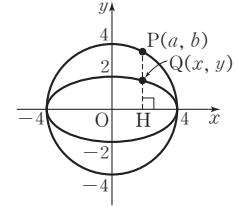
고 점 Q 는 \overline{PH} 의 중점이므로

$$x=a, y=\frac{b}{2}$$

$$\therefore a=x, b=2y \quad \dots \textcircled{⑤}$$

⑤을 ④에 대입하면 구하는 도형의 방정식은

$$x^2+(2y)^2=16 \quad \therefore \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$



023

(1) 초점이 x 축 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{이라고 하자.}$$

$$\text{거리의 차가 } 6 \text{이므로 } 2a=6 \quad \therefore a=3 \quad \dots \textcircled{⑥}$$

$$c^2=a^2+b^2 \text{에서 } 4^2=3^2+b^2 \quad \therefore b^2=7 \quad \dots \textcircled{⑦}$$

$$\textcircled{⑥}, \textcircled{⑦} \text{을 } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{에 대입하면}$$

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$$

(2) 초점이 y 축 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{이라고 하자.}$$

$$\text{거리의 차가 } 8 \text{이므로 } 2b=8 \quad \therefore b=4 \quad \dots \dots \textcircled{①}$$

$$c^2=a^2+b^2 \text{에서 } 5^2=a^2+4^2 \quad \therefore a^2=9 \quad \dots \dots \textcircled{②}$$

$$\textcircled{①}, \textcircled{②} \text{을 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{에 대입하면}$$

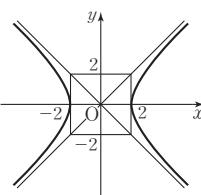
$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$$

024

(1) 양변을 4로 나누면

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$a=2, b=2$ 이므로 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



$$\therefore \text{점근선: } y = \pm x$$

$$\text{주축의 길이: } 2a=2 \times 2=4$$

$$\text{중심: } (0, 0)$$

$$\text{꼭짓점: } (2, 0), (-2, 0)$$

$$\text{초점: } \text{초점 공식에서 } c=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2} \text{이므로}$$

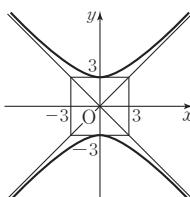
$$(2\sqrt{2}, 0), (-2\sqrt{2}, 0)$$

(2) 양변을 9로 나누면

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = -1$$

$a=3, b=3$ 이므로 그래프를

그리면 오른쪽 그림과 같다.



$$\therefore \text{점근선: } y = \pm x$$

$$\text{주축의 길이: } 2b=2 \times 3=6$$

$$\text{중심: } (0, 0)$$

$$\text{꼭짓점: } (0, 3), (0, -3)$$

$$\text{초점: } \text{초점 공식에서 } c=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$(0, 3\sqrt{2}), (0, -3\sqrt{2})$$

참고 두 점근선이 직교하는 쌍곡선을 직각쌍곡선이라고 한다. (1)과 (2)는 모두 직각쌍곡선이다.

025

초점이 y 축 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{이라고 하자.}$$

$$\text{주축의 길이가 } 12 \text{이므로 } 2b=12 \quad \therefore b=6 \quad \dots \dots \textcircled{①}$$

$$c^2=a^2+b^2 \text{에서 } 7^2=a^2+6^2 \quad \therefore a^2=13 \quad \dots \dots \textcircled{②}$$

$$\textcircled{①}, \textcircled{②} \text{을 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{에 대입하면}$$

$$\frac{x^2}{13} - \frac{y^2}{36} = -1$$

026

초점이 x 축 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{이라고 하자.}$$

점근선의 방정식이 $y=\pm\sqrt{2}x$ 이므로

$$\frac{b}{a}=\sqrt{2} \quad \therefore b=\sqrt{2}a \quad \dots \dots \textcircled{①}$$

$$c^2=a^2+b^2 \text{에서 } (\sqrt{3})^2=a^2+b^2 \quad \dots \dots \textcircled{②}$$

$$\textcircled{①} \text{을 } \textcircled{②} \text{에 대입하면 } 3=a^2+2a^2$$

$$\therefore a^2=1, b^2=2 \quad \dots \dots \textcircled{③}$$

$$\textcircled{③} \text{을 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{에 대입하면}$$

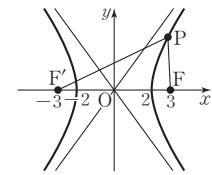
$$x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$$

027

$$a=2 \text{이고, } c=\sqrt{4+5}=3 \text{이므로}$$

초점의 좌표는 $(3, 0), (-3, 0)$

이때 $F(3, 0), F'(-3, 0)$ 이라고 하면 쌍곡선의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



쌍곡선의 정의에 의하여

$$|PF-PF'|=2a=4$$

한편, $\triangle FPF'$ 의 둘레의 길이가 20이므로

$$|PF|+|PF'|+|FF'|=20$$

그런데 $|FF'|=6$ 이므로

$$|PF|+|PF'|=14$$

$$\therefore |PF|^2 - |PF'|^2 = |PF| - |PF'| \times |PF| + |PF'|$$

$$=4 \times 14 = 56$$

028

주어진 쌍곡선은 주축의 길이가 2인 쌍곡선이므로

쌍곡선의 정의에 의하여

$$|\overline{AF'}-\overline{AF}|=(\text{주축의 길이})=2 \quad \dots \dots \textcircled{①}$$

$$|\overline{BF}-\overline{BF'}|=(\text{주축의 길이})=2 \quad \dots \dots \textcircled{②}$$

$\textcircled{①}, \textcircled{②}$ 을 변끼리 더하면

$$|\overline{AF}-\overline{AF}|+|\overline{BF}-\overline{BF}|=4$$

$$(|\overline{AF'}+\overline{BF'}|-|\overline{AF}+\overline{BF}|)=4$$

$$\therefore (|\overline{AF'}+\overline{BF'}|-|\overline{AB}|)=4 \quad \dots \dots \textcircled{③}$$

그런데 주어진 조건에서

$$(\triangle AF'B \text{의 둘레의 길이})=(|\overline{AF'}+\overline{BF'}|)+|\overline{AB}|$$

$$=24 \quad \dots \dots \textcircled{④}$$

$\textcircled{③}, \textcircled{④}$ 을 변끼리 빼면

$$2|\overline{AB}|=20 \quad \therefore |\overline{AB}|=10$$

029

[1단계] 쌍곡선의 중심은 두 초점을 이은 선분의 중점이므로 $(1, 4)$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} - \frac{(y-4)^2}{b^2} = -1$$

[2단계] 초점과 중심 사이의 거리가 c

이므로 $c=4$

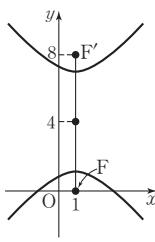
주축의 길이가 6이므로

$$2b=6 \quad \therefore b=3$$

$$c^2=a^2+b^2 \text{에서 } 4^2=a^2+3^2 \quad \therefore a^2=7$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x-1)^2}{7} - \frac{(y-4)^2}{9} = -1$$



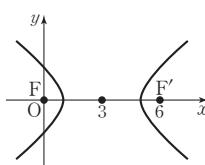
030

두 점으로부터의 거리의 차가 일정한 점의 자취는 쌍곡선이다.

(1)[1단계] 쌍곡선의 중심은 두 초점을 이은 선분의 중점이므로 $(3, 0)$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x-3)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



[2단계] 초점과 중심 사이의 거리가 c 이므로 $c=3$ 거리의 차가 4이므로

$$2a=4 \quad \therefore a=2$$

$$c^2=a^2+b^2 \text{에서 } 3^2=2^2+b^2 \quad \therefore b^2=5$$

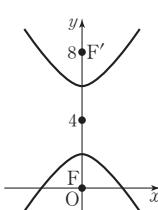
따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

(2)[1단계] 쌍곡선의 중심은 두 초점을 이은 선분의 중점이므로 $(0, 4)$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(y-4)^2}{b^2} = -1$$



[2단계] 초점과 중심 사이의 거리가 c 이므로 $c=4$ 거리의 차가 4이므로

$$2b=4 \quad \therefore b=2$$

$$c^2=a^2+b^2 \text{에서 } 4^2=a^2+2^2 \quad \therefore a^2=12$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{12} - \frac{(y-4)^2}{4} = -1$$

031

(1)[1단계] 주어진 쌍곡선의 방정식을 변형하면

$$(x+2)^2 - 4(y-1)^2 = 4$$

$$\therefore \frac{(x+2)^2}{4} - (y-1)^2 = 1 \quad \dots \dots \quad \textcircled{1}$$

[2단계] ①은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 을 x 축의 방향으로

-2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{쌍곡선 } \frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \text{에서 } a=2, b=1 \text{이므로}$$

접근선 : $y = \pm \frac{1}{2}x$, 주축의 길이 : $2a=2 \times 2=4$

초점 : $c=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$ 이므로 $(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$

꼭짓점 : $(2, 0), (-2, 0)$, 중심 : $(0, 0)$

[3단계] 따라서 주어진 쌍곡선에서

$$\text{접근선 : } y = \pm \frac{1}{2}(x+2)+1$$

주축의 길이 : 4

초점 : $(\sqrt{5}-2, 1), (-\sqrt{5}-2, 1)$

꼭짓점 : $(0, 1), (-4, 1)$

중심 : $(-2, 1)$

(2)[1단계] 주어진 쌍곡선의 방정식을 변형하면

$$(x-3)^2 - (y-2)^2 = -4$$

$$\therefore \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{4} = -1 \quad \dots \dots \quad \textcircled{1}$$

[2단계] ①은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = -1$ 을 x 축의 방향으로

3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{쌍곡선 } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = -1 \text{에서 } a=2, b=2 \text{이므로}$$

접근선 : $y = \pm x$, 주축의 길이 : $2b=2 \times 2=4$

초점 : $c=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$ 이므로

$(0, 2\sqrt{2}), (0, -2\sqrt{2})$

꼭짓점 : $(0, 2), (0, -2)$, 중심 : $(0, 0)$

[3단계] 따라서 주어진 쌍곡선에서

$$\text{접근선 : } y = \pm(x-3)+2$$

주축의 길이 : 4

초점 : $(3, 2\sqrt{2}+2), (3, -2\sqrt{2}+2)$

꼭짓점 : $(3, 4), (3, 0)$

중심 : $(3, 2)$

2 평면곡선의 접선

032

(1) 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(2x^2) + \frac{d}{dx}(3y^2) = \frac{d}{dx}(6)$$

$$4x + 6y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{3y} \quad (y \neq 0)$$

(2) 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(3y^2) = \frac{d}{dx}(4xy)$$

$$2x + 6y \frac{dy}{dx} = 4y + 4x \frac{dy}{dx}, \quad (4x - 6y) \frac{dy}{dx} = 2x - 4y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x - 4y}{4x - 6y} = \frac{x - 2y}{2x - 3y} \quad (2x - 3y \neq 0)$$

(3) $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{d}{dx}(y^{\frac{1}{2}}) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \quad (x \neq 0)$$

(4) 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x^2 y^3) = \frac{d}{dx}(3)$$

$$2xy^3 + 3x^2 y^2 \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{3x} \quad (x \neq 0)$$

(5) 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{9}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{4}\right) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{2}{9}x - \frac{2}{4}y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{4x}{9y} \quad (y \neq 0)$$

(6) 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(\ln|y|) = \frac{d}{dx}(2x^2)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 4x \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 4xy$$

033

(1) x^2 대신 x , y^2 대신 $\sqrt{3}y$ 를 대입하면

$$x + \sqrt{3}y = 4 \quad \therefore y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

(2) x^2 대신 $4x$, y 대신 $\frac{y+2}{2}$ 를 대입하면

$$4x = 8 \times \frac{y+2}{2} \quad \therefore y = x - 2$$

(3) x^2 대신 x , y^2 대신 $-2y$ 를 대입하면

$$\frac{x}{2} + \frac{-2y}{8} = 1 \quad \therefore y = 2x - 4$$

(4) x^2 대신 $3x$, y^2 대신 $-2y$ 를 대입하면

$$\frac{3x}{3} - \frac{-2y}{2} = 1 \quad \therefore y = -x + 1$$

034

(1) 포물선 $y^2 = -x$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$y_1 y = -\frac{x+x_1}{2} \quad \therefore y = -\frac{1}{2y_1}x - \frac{x_1}{2y_1}$$

이 접선의 기울기가 1이므로

$$-\frac{1}{2y_1} = 1 \quad \therefore y_1 = -\frac{1}{2} \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

점 (x_1, y_1) 은 포물선 $y^2 = -x$ 위의 점이므로
 $y_1^2 = -x_1 \quad \dots \dots \textcircled{2}$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하여 풀면 } x_1 = -\frac{1}{4}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = x - \frac{1}{4}$$

(2) 타원 $x^2 + 2y^2 = 2$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$x_1 x + 2y_1 y = 2 \quad \therefore y = -\frac{x_1}{2y_1}x + \frac{1}{y_1}$$

이 접선의 기울기가 1이므로

$$-\frac{x_1}{2y_1} = 1 \quad \therefore x_1 = -2y_1 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

점 (x_1, y_1) 은 타원 $x^2 + 2y^2 = 2$ 위의 점이므로
 $x_1^2 + 2y_1^2 = 2 \quad \dots \dots \textcircled{2}$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하여 풀면 } y_1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = x + \sqrt{3} \text{ 또는 } y = x - \sqrt{3}$$

(3) 쌍곡선 $2x^2 - 3y^2 = 6$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$2x_1 x - 3y_1 y = 6 \quad \therefore y = \frac{2x_1}{3y_1}x - \frac{2}{y_1}$$

이 접선의 기울기가 1이므로

$$\frac{2x_1}{3y_1} = 1 \quad \therefore x_1 = \frac{3}{2}y_1 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

점 (x_1, y_1) 은 쌍곡선 $2x^2 - 3y^2 = 6$ 위의 점이므로
 $2x_1^2 - 3y_1^2 = 6 \quad \dots \dots \textcircled{2}$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하여 풀면 } y_1 = \pm 2$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = x + 1 \text{ 또는 } y = x - 1$$

035

(1) 타원 $4x^2 + 3y^2 = 16$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은 $4x_1 x + 3y_1 y = 16$

이 접선이 점 $(2, 4)$ 를 지나므로

$$4x_1 \cdot 2 + 3y_1 \cdot 4 = 16$$

$$\therefore 2x_1 + 3y_1 = 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

점 (x_1, y_1) 은 타원 $4x^2 + 3y^2 = 16$ 위의 점이므로
 $4x_1^2 + 3y_1^2 = 16 \quad \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$ 에서 $y_1 = \frac{4-2x_1}{3}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하여 정리하면

$$x_1^2 - x_1 - 2 = 0, (x_1+1)(x_1-2) = 0$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3} \text{ 또는 } x = 2$$

(2) 쌍곡선 $x^2 - 5y^2 = 5$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은 $x_1x - 5y_1y = 5$

이 접선이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$-10y_1 = 5 \quad \therefore y_1 = -\frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

점 (x_1, y_1) 은 쌍곡선 $x^2 - 5y^2 = 5$ 위의 점이므로

$$x_1^2 - 5y_1^2 = 5 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}$$
을 $\textcircled{2}$ 에 대입하여 풀면 $x_1 = \pm \frac{5}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = x + 2 \text{ 또는 } y = -x + 2$$

036

타원 $x^2 + 2y^2 = 6$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x + 2y_1y = 6 \quad \therefore y = -\frac{x_1}{2y_1}x + \frac{3}{y_1}$$

이 접선의 기울기가 1이어야 하므로

$$-\frac{x_1}{2y_1} = 1 \quad \therefore x_1 = -2y_1 \quad \dots \textcircled{1}$$

점 (x_1, y_1) 은 타원 $x^2 + 2y^2 = 6$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + 2y_1^2 = 6 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}$$
을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $6y_1^2 = 6 \quad \therefore y_1 = \pm 1$

즉, 기울기가 1이고 타원에 접

하는 접선의 방정식은

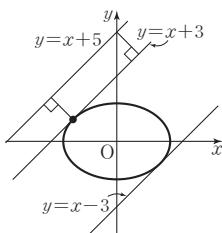
$$y = x \pm 3$$

따라서 구하는 최솟값은 직선

$y = x + 5$ 위의 점 $(0, 5)$ 과 직선 $x - y + 3 = 0$ 사이의 거리

와 같으므로

$$\frac{|0-5+3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$



037

쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$ 위의 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 방정식

식은 x^2 대신 $2x$, y^2 대신 y 를 대입하면

$$\frac{2x}{3} - \frac{y}{3} = 1 \quad \therefore y = 2x - 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

쌍곡선의 점근선의 방정식은 $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{3}$ 이므로

$$y = \pm \frac{b}{a}x \text{에서 } y = \pm x \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$$

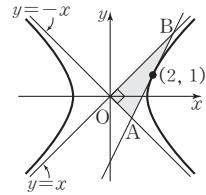
두 점 A, B의 좌표를 각각

A(1, -1), B(3, 3)으로 놓으면 오른쪽 그림과 같다.

이때 두 접근선이 서로 수직이므로 $\triangle OAB$ 는 직각삼각형이다.

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 3$$



038

$$(1) x = t^2 + t \text{에서 } \frac{dx}{dt} = 2t + 1, y = t^3 \text{에서 } \frac{dy}{dt} = 3t^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2}{2t+1}$$

$$(2) x = \cos^3 t \text{에서 } \frac{dx}{dt} = 3\cos^2 t(-\sin t)$$

$$y = \sin^3 t \text{에서 } \frac{dy}{dt} = 3\sin^2 t \cos t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3\sin^2 t \cos t}{3\cos^2 t(-\sin t)}$$

$$= -\frac{\sin t}{\cos t} = -\tan t$$

039

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{3}{t^2}, \frac{dy}{dt} = 2t \text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{-\frac{3}{t^2}} = -\frac{2}{3}t^3$$

$$\text{이때 } \frac{3}{t} = 3, t^2 + 5 = 6 \text{이므로 } t = 1$$

따라서 $t = 1$ 에서의 접선의 기울기는 $-\frac{2}{3}$ 이므로 구하는

접선의 방정식은

$$y - 6 = -\frac{2}{3}(x - 3) \quad \therefore y = -\frac{2}{3}x + 8$$

II. 평면벡터

1 벡터의 연산

040

$$(1) |\overrightarrow{AM}| = \overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AD} = \mathbf{1}$$

$$(2) |\overrightarrow{AN}| = \overline{AN} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$(3) |\overrightarrow{AC}| = \overline{AC} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$(4) |\overrightarrow{MN}| = \overline{MN} = \overline{AB} = \mathbf{1}$$

041

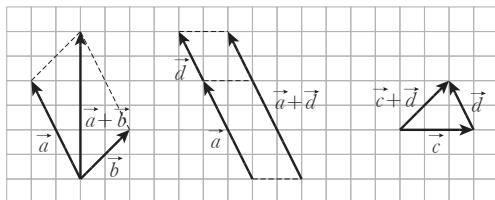
(1) 벡터 \overrightarrow{AB} 와 크기와 방향이 모두 같은 벡터는 $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{FO}, \overrightarrow{ED}$

(2) 벡터 \overrightarrow{OD} 와 크기는 같고 방향이 반대인 벡터는 $\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{EF}$

$$(3) |\overrightarrow{BE}| = \overline{BE} = 2\overline{OB} = \mathbf{2}$$

이때 $\overline{BE} = \overline{AD} = \overline{CF} = 2$ 이므로 벡터 \overrightarrow{BE} 와 크기가 같은 벡터는 $\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{FC}$

042

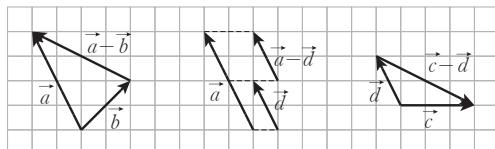


043

$$(1) \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{DB} \\ = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$$

$$(2) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} \\ \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{AB} \\ = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} \\ \therefore \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA}$$

044



045

$$(1) \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$(2) \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$(3) \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{b} + \vec{c}$$

$$(4) \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB} \\ = \vec{c} - \vec{a} = -\vec{a} + \vec{c}$$

$$(5) \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} \\ = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{a} - \vec{b} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

$$(6) \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = -\vec{a} - \vec{b}$$

046

$$(1) \vec{b} - 3(\vec{a} + \vec{b}) - 2(2\vec{a} - \vec{b})$$

$$= \vec{b} - 3\vec{a} - 3\vec{b} - 4\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$= (-3-4)\vec{a} + (1-3+2)\vec{b}$$

$$= -7\vec{a}$$

$$(2) \frac{5}{2}(4\vec{a} + 3\vec{b}) - \frac{1}{4}(4\vec{a} - 2\vec{b})$$

$$= 10\vec{a} + \frac{15}{2}\vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$= (10-1)\vec{a} + \left(\frac{15}{2} + \frac{1}{2}\right)\vec{b}$$

$$= 9\vec{a} + 8\vec{b}$$

047

$$(1) 2\vec{x} + (\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} - (\vec{b} - \vec{x}) \text{에서}$$

$$2\vec{x} + \vec{a} + \vec{b} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{x}$$

$$2\vec{x} - \vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{a} - \vec{b} \quad \therefore \vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$$

$$(2) \vec{x} + 2\vec{y} = -\vec{a} \quad \dots\dots \textcircled{1}, \quad 3\vec{x} - \vec{y} = 4\vec{a} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \times 3 - \textcircled{2} \text{을 하면 } 7\vec{y} = -7\vec{a} \quad \therefore \vec{y} = -\vec{a}$$

$$\vec{y} = -\vec{a} \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

$$\vec{x} - 2\vec{a} = -\vec{a} \quad \therefore \vec{x} = -\vec{a} + 2\vec{a} = \vec{a}$$

$$\therefore \vec{x} = \vec{a}, \vec{y} = -\vec{a}$$

048

$$(1) \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \\ = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$(2) \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}$$

$$= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = -\vec{a} + (-\vec{a} + \vec{b}) = -2\vec{a} + \vec{b}$$

$$(3) \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{BO} = 2(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO})$$

$$= 2(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) = 2(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB})$$

$$= 2(\vec{b} - \vec{a}) = -2\vec{a} + 2\vec{b}$$

049

$$(1) \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CB} \text{ } \diamond \text{ 고}$$

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = -\vec{b} + \vec{a} \text{이므로}$$

$$\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$(2) \overrightarrow{GR} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BR} \text{ } \diamond \text{ 고}$$

$$\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AR} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \text{ } \diamond \text{ 이므로}$$

$$\overrightarrow{GR} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$$

$$(3) \overrightarrow{GQ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AQ}$$

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$$

$$= \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\text{이므로 } \overrightarrow{GQ} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$$

050

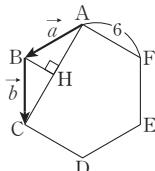
(1) 오른쪽 그림에서

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$$

이때

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= 2\overrightarrow{AH} = 2 \times 6 \cos 30^\circ \\ &= 2 \times 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b}| = |\overrightarrow{AC}| = \overline{AC} = 6\sqrt{3}$$



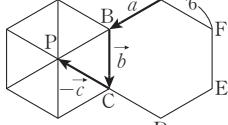
(2) 오른쪽 그림에서

$$\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \overrightarrow{AP}$$

이때 정육각형의 한 변의 길이가 6이므로

$$\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} = 12$$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = |\overrightarrow{AP}| = \overline{AP} = 12$$



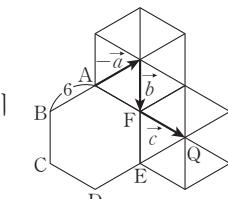
(3) 오른쪽 그림에서

$$-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AQ}$$

이때 정육각형의 한 변의 길이
가 6이므로

$$\overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{AF} = 12$$

$$\therefore |-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = |\overrightarrow{AQ}| = \overline{AQ} = 12$$



다른풀이 벡터의 덧셈(말꼬리 잡기)을 이용한다.

$$(1) \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$(2) \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$$

$$= \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FC}$$

$$(3) -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$

$$= \overrightarrow{BA} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$$

$$= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BE}$$

051

$$(1) (m-2)\vec{a} + (n+1)\vec{b} = \vec{0}$$

$$m-2=0, n+1=0 \quad \therefore m=2, n=-1$$

$$(2) m^2\vec{a} - (n+1)\vec{b} = (2m-1)\vec{a} + (m-2)\vec{b}$$

$$m^2=2m-1, -(n+1)=m-2$$

$$m^2-2m+1=0, \text{ 즉 } (m-1)^2=0 \text{에서 } m=1$$

$$-(n+1)=m-2 \text{에서 } -n-1=-1 \quad \therefore n=0$$

052

$$\vec{p} + \vec{q} = 4\vec{a} - \vec{b}, \vec{p} + \vec{r} = 4\vec{a} + (m+1)\vec{b}$$

$\vec{p} + \vec{q}, \vec{p} + \vec{r}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{p} + \vec{r} = k(\vec{p} + \vec{q}) \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)}$$

$$\text{즉, } 4\vec{a} + (m+1)\vec{b} = 4k\vec{a} - k\vec{b} \text{에서}$$

$$4=4k, m+1=-k \quad \therefore k=1, m=-2$$

053

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)}$$

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \text{이므로}$$

$$(m\vec{a} + 3\vec{b}) - (\vec{a} + \vec{b}) = k(-\vec{a} - 3\vec{b}) - (\vec{a} + \vec{b})$$

$$(m-1)\vec{a} + 2\vec{b} = -2k\vec{a} - 4k\vec{b} \text{에서}$$

$$m-1=-2k, 2=-4k \quad \therefore k=-\frac{1}{2}, m=2$$

2 평면벡터의 성분과 내적

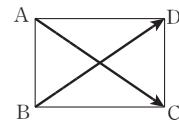
054

직사각형 ABCD에서

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC} = 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$$



$$= -2\vec{b} + 2\vec{c}$$

$$\therefore p=0, q=-2, r=2$$

055

선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점 P의 위치벡터는

$$\vec{p} = \frac{\vec{b} + 2\vec{a}}{1+2} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점 Q의 위치벡터는

$$\vec{q} = \frac{\vec{b} - 2\vec{a}}{1-2} = 2\vec{a} - \vec{b}$$

$$\therefore \vec{p} + \vec{q} = \left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) + (2\vec{a} - \vec{b}) = \frac{8}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\text{따라서 } m=\frac{8}{3}, n=-\frac{2}{3} \text{이므로 } m+n=2$$

056

선분 AB의 중점 M의 위치벡터는

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

선분 BC를 1 : 2로 내분하는 점 N의 위치벡터는

$$\overrightarrow{ON} = \frac{\vec{c} + 2\vec{b}}{1+2} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

$$\therefore \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \left(\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

057

$\triangle ABC$ 의 세 꼭짓점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 라고 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} &= (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG}) \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OG} \\ &= \vec{a} + \vec{b} - 2 \cdot \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}}{3} \\ \overrightarrow{GC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OG} = \vec{c} - \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} = \frac{-\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}}{3}\end{aligned}$$

따라서 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{GC}$ 이므로 $k = -1$

058

점 G는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \quad \therefore \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 3\overrightarrow{OG} \\ \therefore |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| &= |3\overrightarrow{OG}| = 3|\overrightarrow{OG}| = 3\sqrt{3^2 + 4^2} = 15\end{aligned}$$

059

$$\begin{aligned}& -(-2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) + 2(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) \\ &= 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} + 2\vec{a} - 4\vec{b} + 2\vec{c} = 4\vec{a} - 5\vec{b} + 3\vec{c} \\ &= 4(2, -1) - 5(-2, 3) + 3(-1, 3) \\ &= (8, -4) - (-10, 15) + (-3, 9) = (15, -10)\end{aligned}$$

060

$$\begin{aligned}\vec{c} - 2\vec{a} - 3\vec{b} &= (-1, 1) - 2(1, 2) - 3(-2, 1) \\ &= (3, -6) \\ \therefore |\vec{c} - 2\vec{a} - 3\vec{b}| &= \sqrt{3^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}\end{aligned}$$

061

$$\begin{aligned}2\vec{a} = 6\vec{x} - 3\vec{b} \text{에서 } 6\vec{x} &= 2\vec{a} + 3\vec{b} \\ \therefore \vec{x} &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{3}(3, 2) + \frac{1}{2}(2, -1) \\ &= \left(1, \frac{2}{3}\right) + \left(1, -\frac{1}{2}\right) = \left(2, \frac{1}{6}\right) \\ \text{따라서 } 6\vec{x} &= (12, 1) \text{이므로 } |6\vec{x}| = \sqrt{12^2 + 1^2} = \sqrt{145}\end{aligned}$$

062

$$\begin{aligned}\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b} \text{를 성분으로 나타내면} \\ (5, 7) &= k(1, 1) + l(-1, 2) = (k-l, k+2l) \\ \text{이므로 } k-l &= 5, k+2l = 7 \\ \text{두 식을 연립하여 풀면} \\ k = \frac{17}{3}, l = \frac{2}{3} &\quad \therefore k+5l = 9\end{aligned}$$

063

D(x, y)라고 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (5, -1) - (2, 3) = (3, -4) \\ \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = (x, y) - (-2, 2) = (x+2, y-2)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ 이므로 $(3, -4) = (x+2, y-2)$

즉, $x+2=3, y-2=-4$ 에서 $x=1, y=-2$
 $\therefore D(1, -2)$

064

$$\begin{aligned}\vec{a} + 2\vec{b} &= (1, 4) + 2(x, 1) = (2x+1, 6) \\ 2\vec{a} + \vec{b} &= 2(1, 4) + (x, 1) = (x+2, 9) \\ \vec{a} + 2\vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b} &\text{가 서로 평행하므로} \\ \vec{a} + 2\vec{b} &= k(2\vec{a} + \vec{b}) \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)} \\ \text{즉, } (2x+1, 6) &= k(x+2, 9) \text{에서}\end{aligned}$$

$$2x+1 = k(x+2), 6 = 9k \quad \therefore k = \frac{2}{3}$$

따라서 $k = \frac{2}{3}$ 를 $2x+1 = k(x+2)$ 에 대입하면

$$2x+1 = \frac{2}{3}(x+2), 4x = 1 \quad \therefore x = \frac{1}{4}$$

065

P(x, y)라고 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} &= (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}) \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OP} \\ &= (1, 1) + (4, 1) + (1, 4) - 3(x, y) \\ &= (6-3x, 6-3y)\end{aligned}$$

이때 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}| = 3$ 이므로

$$\sqrt{(6-3x)^2 + (6-3y)^2} = 3$$

양변을 제곱하면 $(6-3x)^2 + (6-3y)^2 = 9$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$$

따라서 점 P의 자취는 중심의 좌표가 (2, 2), 반지름의 길이가 1인 원이므로 그 길이는 $2\pi \times 1 = 2\pi$

066

(1) $\triangle OAB$ 는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이고 정삼각

형의 한 내각의 크기는 60° 이므로

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2 \times 2 \times \cos 60^\circ = 2$$

(2) 정육각형의 한 내각의 크기는 120° 이므로

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = 2 \times 2 \times \cos 120^\circ = -2$$

(3) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO}$ 이므로

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \text{가 이루는 각의 크기}) = \angle BAO = 60^\circ$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 \times 2 \times \cos 60^\circ = 2$$

(4) 두 벡터 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CF}$ 는 평행하고 방향이 반대이므로

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CF} \text{가 이루는 각의 크기}) = 180^\circ$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} = 2 \times 4 \times \cos 180^\circ = -8$$

067

$$\vec{a} + 2\vec{b} = (-1, 2) + 2(2, -2) = (3, -2)$$

$$\begin{aligned}\vec{b} - \vec{a} &= (2, -2) - (-1, 2) = (3, -4) \\ \therefore (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) &= 3 \times 3 + (-2) \times (-4) = 17\end{aligned}$$

068

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= 1^\circ \text{므로 } (2x+1)(x-2) + 3 \times (-2) = 1 \\ 2x^2 - 3x - 9 &= 0, (2x+3)(x-3) = 0 \\ \therefore x &= 3 \quad (\because x > 0)\end{aligned}$$

069

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= 1, |\vec{b}| = 2^\circ \text{이고, 두 벡터 } \vec{a}, \vec{b} \text{가 이루는 각의 크기가 } \frac{\pi}{3}^\circ \text{므로} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{3} = 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 1 \\ \text{이때 } (\vec{a} + k\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) &= 6^\circ \text{므로} \\ |\vec{a}|^2 + (k-1)\vec{a} \cdot \vec{b} - k|\vec{b}|^2 &= 6 \\ 1^2 + k-1 - k \cdot 2^2 &= 6, -3k = 6 \quad \therefore k = -2\end{aligned}$$

070

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= 2^\circ \text{이고, 두 벡터 } \vec{a}, \vec{b} \text{가 이루는 각의 크기가 } \frac{\pi}{3}^\circ \text{므로} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{3} = 2 \times |\vec{b}| \times \frac{1}{2} = |\vec{b}| \\ |\vec{a} + \vec{b}| &= 2\sqrt{7}^\circ \text{의 양변을 제곱하면} \\ |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 &= 28, 2^2 + 2|\vec{b}| + |\vec{b}|^2 = 28 \\ |\vec{b}|^2 + 2|\vec{b}| - 24 &= 0, (|\vec{b}|+6)(|\vec{b}|-4) = 0 \\ \therefore |\vec{b}| &= 4 \quad (\because |\vec{b}| \geq 0)\end{aligned}$$

071

$$\begin{aligned}|\vec{a} - \vec{b}| &= \sqrt{13}^\circ \text{의 양변을 제곱하면} \\ |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 &= 13, 4^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 3^2 = 13 \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} &= 6 \\ |2\vec{a} + \vec{b}|^2 &= 4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 4 \times 4^2 + 4 \times 6 + 3^2 = 97 \\ \therefore |2\vec{a} + \vec{b}| &= \sqrt{97}\end{aligned}$$

072

$$\begin{aligned}\vec{a} - \vec{b} &= (1, 2) - (-1, 3) = (2, -1) \\ \vec{a} - \vec{c} &= (1, 2) - (2, -1) = (-1, 3) \\ \text{이므로 } \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{c} &\text{가 이루는 각의 크기를 } \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \text{라고 하면}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{c})}{|\vec{a} - \vec{b}| |\vec{a} - \vec{c}|} \\ &= \frac{2 \times (-1) + (-1) \times 3}{\sqrt{2^2 + (-1)^2} \sqrt{(-1)^2 + 3^2}} \\ &= \frac{-5}{\sqrt{5} \sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore \theta = \frac{3}{4}\pi$$

073

$$\begin{aligned}|\vec{a} + 3\vec{b}| &= 3\sqrt{3}^\circ \text{의 양변을 제곱하면} \\ |\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 &= 27, 3^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9 \times 2^2 = 27 \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} &= -3\end{aligned}$$

두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)라고 하면

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-3}{3 \times 2} = -\frac{1}{2} \\ \therefore \theta &= \frac{2}{3}\pi\end{aligned}$$

074

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b} \text{라고 하면} \\ |\vec{a}| &= \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}, |\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}, \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= 2 \times 4 + 4 \times 2 = 16\end{aligned}$$

따라서 $\angle AOB = \theta$ 라고 하면

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{16}{2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}} = \frac{4}{5} \\ \therefore \triangle OAB &= \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} \times \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} \times \frac{3}{5} = 6\end{aligned}$$

다른풀이 좌표평면 위의 세 점 $(0, 0), (a_1, a_2), (b_1, b_2)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} |a_1b_2 - a_2b_1|$ 로 구할 수 있다.

$$\therefore \triangle OAB = \frac{1}{2} |2 \times 2 - 4 \times 4| = \frac{1}{2} \times |-12| = 6$$

075

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (1, -x) + (x+4, -1) = (x+5, -x-1) \\ \vec{a} - \vec{b} &= (1, -x) - (x+4, -1) = (-x-3, -x+1)\end{aligned}$$

$\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$ 가 서로 수직이므로

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

$$\begin{aligned}(x+5)(-x-3) + (-x-1)(-x+1) &= 0 \\ -x^2 - 8x - 15 + x^2 - 1 &= 0, 8x = -16\end{aligned}$$

$$\therefore x = -2$$

076

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 3\vec{b} &\text{가 서로 수직이므로} \\ (2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b}) &= 0 \\ 2|\vec{a}|^2 + 7\vec{a} \cdot \vec{b} + 3|\vec{b}|^2 &= 0\end{aligned}$$

두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)라고 하면

$$2|\vec{a}|^2 + 7|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta + 3|\vec{b}|^2 = 0 \quad \dots \textcircled{①}$$

$|\vec{a}| = \sqrt{2}|\vec{b}|$ 를 $\textcircled{①}$ 에 대입하면

$$4|\vec{b}|^2 + 7\sqrt{2}|\vec{b}|^2\cos\theta + 3|\vec{b}|^2 = 0$$

$$7|\vec{b}|^2(1 + \sqrt{2}\cos\theta) = 0$$

$$|\vec{b}| \neq 0 \text{이므로 } \sqrt{2}\cos\theta = -1$$

$$\therefore \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \theta = \frac{3}{4}\pi$$

077

$\vec{a} = (-1, 3)$ 과 \vec{c} 가 서로 평행하므로

$\vec{c} = k\vec{a}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)

$$\therefore \vec{c} = (-k, 3k) \quad \dots \textcircled{①}$$

$\vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$ 에서

$$\vec{d} = \vec{b} - \vec{c} = (2+k, 1-3k) \quad \dots \textcircled{②}$$

또, $\vec{a} = (-1, 3)$ 과 \vec{d} 가 서로 수직이므로 $\vec{a} \cdot \vec{d} = 0$ 에서
 $-(2+k) + 3(1-3k) = 0$

$$10k = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{10}$$

이것을 $\textcircled{①}, \textcircled{②}$ 에 각각 대입하면

$$\vec{c} = \left(-\frac{1}{10}, \frac{3}{10}\right), \vec{d} = \left(\frac{21}{10}, \frac{7}{10}\right)$$

078

$$(1) \frac{x-1}{-2} = \frac{y-3}{5}$$

(2) 방향벡터의 x 성분이 0이므로 직선의 방정식은 $x=1$

(3) 방향벡터의 y 성분이 0이므로 직선의 방정식은 $y=3$

079

직선 $\frac{x+1}{2} = \frac{2-y}{3}$ 에서 $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3}$ 이므로 구하

는 직선의 방향벡터는 $\vec{u} = (2, -3)$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3}$

080

두 점 A(2, 3), B(3, 1)에 대하여 $\overrightarrow{AB} = (1, -2)$

이때 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-a}{2} = \frac{y-1}{b}$$

(i) 이 직선이 지나는 점은 $(a, 1)$ 이므로 $a=3$

(ii) 이 직선의 방향벡터는

$$(2, b) = k\overrightarrow{AB} \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)}$$

$$\text{즉, } 2=k, b=-2k \text{이므로 } b=-4$$

$$(i), (ii)에서 a^2 + b^2 = 3^2 + (-4)^2 = 25$$

081

$$(1) -2(x-1) + 5(y-2) = 0 \quad \therefore 2x - 5y + 8 = 0$$

$$(2) 1 \times (x+3) + 4y = 0 \quad \therefore x + 4y + 3 = 0$$

$$(3) 0 \times (x+2) - 2(y-3) = 0 \quad \therefore y = 3$$

082

직선 $2x - y - 5 = 0$ 의 법선벡터가 $\vec{n} = (2, -1)$ 이므로
 이 직선에 수직인 직선의 방향벡터가 $\vec{n} = (2, -1)$ 이다.
 따라서 점 $(2, -1)$ 을 지나고 방향벡터가 $\vec{n} = (2, -1)$
 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} \quad \therefore \frac{x-2}{2} = -y - 1$$

083

직선 $\frac{x+1}{2} = \frac{2-y}{3}$, 즉 $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3}$ 의 방향벡터

가 $\vec{u} = (2, -3)$ 이므로 이 직선에 수직인 직선의 법선벡터가 $\vec{u} = (2, -3)$ 이다.

점 $(3, 4)$ 를 지나고 법선벡터가 $\vec{u} = (2, -3)$ 인 직선 l 의 방정식은

$$2(x-3) - 3(y-4) = 0 \quad \therefore 2x - 3y + 6 = 0$$

따라서 직선 l 이 점 $(a, 6)$ 을 지나므로

$$2a - 3 \times 6 + 6 = 0 \quad \therefore a = 6$$

084

(1) 두 직선의 방향벡터는 각각 $\vec{u} = (2, -1), \vec{v} = (4, 3)$
 이므로

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|2 \times 4 + (-1) \times 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2} \sqrt{4^2 + 3^2}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{5} \times 5} = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

$$\therefore \sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(2) 두 직선의 방향벡터는 각각 $\vec{u} = (2, 1), \vec{v} = (1, 3)$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|2 \times 1 + 1 \times 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 3^2}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{5} \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

085

(1) 두 직선의 법선벡터는 각각 $\vec{n}_1 = (1, 2), \vec{n}_2 = (3, 1)$
 이므로 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)

라고 하면

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|1 \times 3 + 2 \times 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5} \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

(2) 두 직선의 법선벡터는 각각 $\vec{n}_1 = (\sqrt{3}, 1)$, $\vec{n}_2 = (1, \sqrt{3})$ 이므로 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)라고 하면

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|\sqrt{3} \times 1 + 1 \times \sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

086

(1) 두 직선의 방향벡터는 각각 $\vec{u} = (2, 3)$, $\vec{v} = (a, 1)$
두 직선이 평행하면 $\vec{v} = k\vec{u}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)
즉, $(a, 1) = k(2, 3)$ 에서 $a = 2k$, $1 = 3k$
 $\therefore k = \frac{1}{3}$, $a = \frac{2}{3}$
두 직선이 수직이면 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
즉, $2a + 3 = 0$ 에서 $a = -\frac{3}{2}$

(2) 두 직선의 법선벡터는 각각 $\vec{n}_1 = (3, a)$, $\vec{n}_2 = (2, -1)$
두 직선이 평행하면 $\vec{n}_1 = k\vec{n}_2$ (단, k 는 0이 아닌 실수)
즉, $(3, a) = k(2, -1)$ 에서 $3 = 2k$, $a = -k$
 $\therefore k = \frac{3}{2}$, $a = -\frac{3}{2}$
두 직선이 수직이면 $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$
즉, $3 \times 2 + a \times (-1) = 0$ 에서 $a = 6$

087

점 H는 주어진 직선 위의 점이므로

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y-5}{3} = t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x = 2t + 4, y = 3t + 5 \quad \therefore H(2t+4, 3t+5)$$

$$\therefore \vec{AH} = \vec{OH} - \vec{OA} = (2t+5, 3t+1)$$

직선의 방향벡터는 $\vec{u} = (2, 3)$ 이므로 $\vec{u} \cdot \vec{AH} = 0$ 에서
 $2(2t+5) + 3(3t+1) = 0$

$$13t + 13 = 0 \quad \therefore t = -1 \quad \therefore H(2, 2)$$

따라서 $a = 2$, $b = 2$ 이므로 $a+b=4$

088

(1) 원 위의 점을 P(x, y), 중심을 C(1, 2)라 하고 두 점 P, C의 위치벡터를 각각 \vec{p} , \vec{c} 라고 하면 $|\vec{p}-\vec{c}| = 2$

이때 $\vec{p}-\vec{c} = (x-1, y-2)$ 이므로

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 2$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

(2) 원 위의 점을 P(x, y), 지름의 양 끝점을 A(-3, 1), B(5, -5)라 하고 세 점 P, A, B의 위치벡터를 각각 \vec{p} , \vec{a} , \vec{b} 라고 하자.

$\triangle PAB$ 는 $\angle APB = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\vec{AP} \perp \vec{BP} \iff \vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$$

$$\iff (\vec{p}-\vec{a}) \cdot (\vec{p}-\vec{b}) = 0$$

이때 $\vec{p}-\vec{a} = (x+3, y-1)$, $\vec{p}-\vec{b} = (x-5, y+5)$

$$\text{이므로 } (x+3)(x-5) + (y-1)(y+5) = 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y - 20 = 0$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$$

089

$$(1) |\vec{p}| = 3 \text{이므로 } \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \quad \therefore x^2 + y^2 = 9$$

따라서 점 P는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 3인 원 위에 있다.

$$(2) \vec{p}-\vec{c} = (x-2, y+1) \text{이므로 } |\vec{p}-\vec{c}| = 1 \text{에서}$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = 1 \quad \therefore (x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$$

따라서 점 P는 중심이 점 C(2, -1)이고 반지름의 길이가 1인 원 위에 있다.

090

$$\vec{p}-\vec{a} = (x+3, y-5), \vec{p}-\vec{b} = (x+1, y-1) \text{이므로}$$

$$(\vec{p}-\vec{a}) \cdot (\vec{p}-\vec{b}) = 0 \text{에서}$$

$$(x+3)(x+1) + (y-5)(y-1) = 0$$

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y + 8 = 0 \quad \therefore (x+2)^2 + (y-3)^2 = 5$$

따라서 위치벡터가 \vec{p} 인 점 P의 자취는 중심의 좌표가

(-2, 3)이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 원이므로 그 넓이는 $\pi \times (\sqrt{5})^2 = 5\pi$

3 평면 운동

091

$$(1) \frac{dx}{dt} = -6 \sin 3t, \frac{dy}{dt} = 6 \cos 3t \text{이므로 속도 } \vec{v} \text{는}$$

$$\vec{v} = (-6 \sin 3t, 6 \cos 3t)$$

따라서 속력 $|\vec{v}|$ 는

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-6 \sin 3t)^2 + (6 \cos 3t)^2}$$

$$= \sqrt{36 \sin^2 3t + 36 \cos^2 3t}$$

$$= \sqrt{36(\sin^2 3t + \cos^2 3t)}$$

$$= \sqrt{36} = 6$$

$$(2) \frac{d^2x}{dt^2} = -18\cos 3t, \frac{d^2y}{dt^2} = -18\sin 3t \text{이므로}$$

$$\text{가속도 } \vec{a} \text{는 } \vec{a} = (-18\cos 3t, -18\sin 3t)$$

따라서 가속도의 크기 $|\vec{a}|$ 는

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{(-18\cos 3t)^2 + (-18\sin 3t)^2} \\ &= \sqrt{324\cos^2 3t + 324\sin^2 3t} \\ &= \sqrt{324(\sin^2 3t + \cos^2 3t)} \\ &= \sqrt{324} = 18 \end{aligned}$$

092

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t, \frac{dy}{dt} = \sin t \text{이므로 속도 } \vec{v} \text{는}$$

$$\vec{v} = (1 - \cos t, \sin t)$$

즉, 속력 $|\vec{v}|$ 는

$$|\vec{v}| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t}$$

$0 \leq t \leq 2\pi$ 에서 $-1 \leq \cos t \leq 1$ 이므로

$$0 \leq 2 - 2\cos t \leq 4 \quad \therefore 0 \leq |\vec{v}| \leq 2$$

이때 속력 $|\vec{v}|$ 가 최대가 되는 것은 $2 - 2\cos t = 4$, 즉 $\cos t = -1$ 일 때이다.

따라서 속력이 최대가 되는 시각은 $t = \pi$ 이고 그때의 속력의 최댓값은 2이다.

093

$$\frac{dx}{dt} = 3\cos t - 4\sin t, \frac{dy}{dt} = 4\cos t + 3\sin t \text{이므로}$$

$t=0$ 에서 $t=\pi$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{(3\cos t - 4\sin t)^2 + (4\cos t + 3\sin t)^2} dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{25(\cos^2 t + \sin^2 t)} dt \\ &= \int_0^\pi 5 dt \\ &= \left[5t \right]_0^\pi = 5\pi \end{aligned}$$

094

$$y' = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{x^2} \text{이므로 구하는 곡선의 길이는}$$

$$\begin{aligned} &\int_1^3 \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2} dx = \int_1^3 \sqrt{\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2} dx \\ &= \int_1^3 \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{x} \right]_1^3 \\ &= \frac{17}{6} \end{aligned}$$

III. 공간도형과 공간벡터

1 공간도형

095

평면의 결정조건에 따라 만들어지는 평면을 찾으면 다음과 같다.

(i) 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점

세 점 E, G, H로 만들어지는 평면은 평면 EGH의 1개

(ii) 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점

한 직선 AF와 이 직선 위에 있지 않은 한 점으로 만들어지는 평면은

평면 AEF, 평면 AFG, 평면 AFH의 3개

한 직선 CF와 이 직선 위에 있지 않은 한 점으로 만들어지는 평면은

평면 CEF, 평면 CFG, 평면 CHF의 3개

(iii) 만나는 두 직선 : 직선 AF와 직선 CF로 만들어지는 평면은 평면 AFC의 1개

(iv) 평행한 두 직선 : 없다.

(i)~(iv)에서 구하는 서로 다른 평면의 개수는

$$1+3+3+1=8$$

096

직선 AB와 꼬인 위치에 있는 직선은

직선 CH, 직선 DI, 직선 EJ, 직선 GH, 직선 HI,

직선 IJ, 직선 FJ의 7개 $\therefore a=7$

직선 AB와 평행한 평면은 평면 FGHIJ의 1개

$$\therefore b=1$$

또, 평면 ABCDE와 만나는 평면은

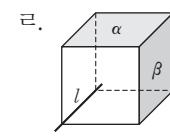
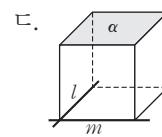
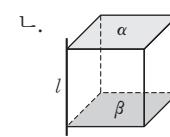
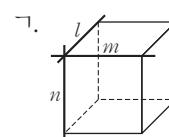
평면 ABGF, 평면 BGHC, 평면 CHID, 평면 DIJE,

평면 AFJE의 5개 $\therefore c=5$

$$\therefore a+b+c=13$$

097

정육면체의 모서리를 직선으로, 면을 평면으로 생각하면 다음 그림과 같다.



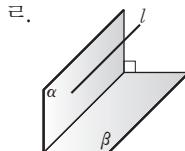
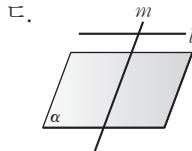
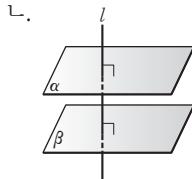
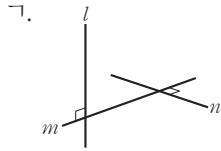
ㄱ. $l \perp m$ 이고 $m \perp n$ 이면 $l \perp n$ 일 수도 있다. (거짓)

ㄷ. $l \parallel \alpha$ 이고 $m \parallel \alpha$ 이면 $l \perp m$ 일 수도 있다. (거짓)

ㄹ. $l \parallel \alpha$ 이고 $\alpha \perp \beta$ 이면 $l \parallel \beta$ 일 수도 있다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

다른풀이



따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

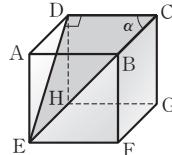
098

직선 AB는 직선 DC와 평행하고 직선 AB와 직선 CE가 이루는 각의 크기는 α 이므로 직선 DC와 직선 CE가 이루는 각의 크기도 α 이다.

정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라

고 하면 $\overline{CE} = \sqrt{3}a$ 이므로 직각삼각형 DEC에서

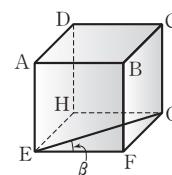
$$\cos \alpha = \frac{\overline{DC}}{\overline{CE}} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



직선 AB는 직선 EF와 평행하고 직선 EF와 직선 EG가 이루는 각의 크기는 45° 이므로 직선 AB와 직선 EG가 이루는 각의 크기도 45° 이다.

$$\therefore \cos \beta = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \cos \alpha \times \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$



099

ㄱ. $\overline{BD}, \overline{AC}$ 는 정사각형 ABCD의 두 대각선이고 정사각형의 두 대각선은 서로 수직이등분하므로

$$\overline{BD} \perp \overline{AC} \text{ (참)}$$

ㄴ. \overline{BD} 는 \overline{CG} 를 평행이동한 \overline{BF} 와 수직이므로

$$\overline{BD} \perp \overline{CG} \text{ (참)}$$

ㄷ, 르. ㄱ, ㄴ에 의해 직선 BD는 평면 ACG 위의 직선

AC, 직선 CG와 모두 수직이므로 평면 ACG와 수직

이고 이 평면 위의 모든 직선과 수직이다.

$$\therefore \overline{BD} \perp \text{(평면 ACG)}, \overline{BD} \perp \overline{AG} \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, 르이다.

100

$\overline{PO} \perp \alpha$ 이고 $\overline{OH} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼

수선의 정리에 의하여 $\overline{PH} \perp \overline{AB}$

즉, $\triangle PAH$ 는 직각삼각형이므로

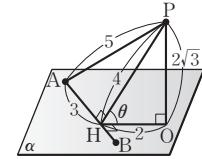
$$\overline{PH} = \sqrt{\overline{PA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

또, $\triangle PHO$ 는 직각삼각형이므로

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{PH}^2 - \overline{PO}^2} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2$$

따라서 $\triangle PHO$ 에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{OH}}{\overline{PH}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



101

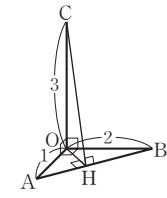
$\overline{OC} \perp \overline{OA}, \overline{OC} \perp \overline{OB}$ 이므로

$\overline{OC} \perp$ (평면 OAB)

또, $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ 이므로 두 점 O, H를

이으면 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{OH} \perp \overline{AB}$$



직각삼각형 OAB에서

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$\triangle OAB$ 의 넓이를 두 방향에서 생각하면

$$\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OH}$$

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 2 = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \overline{OH} \quad \therefore \overline{OH} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

따라서 직각삼각형 OHC에서

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{OC}^2 + \overline{OH}^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$$

102

[1단계] 사각뿔 O-ABCD의 옆

면은 정삼각형, 밑면은 정사각

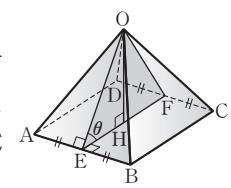
형이므로 평면 OAB와 평면

ABCD의 교선 AB의 중점 E

에서 수직으로 뻗어나간 두 직

선을 생각하면 오른쪽 그림과

같고 $\theta = \angle OEF$ 이다.



[2단계] 사각뿔 O-ABCD의 한 모서리의 길이를 2, 꼭짓점 O에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$$\overline{OE} = \overline{OF} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AB} = \sqrt{3},$$

$$\overline{EH} = \overline{FH} = \frac{1}{2} \overline{EF} = \frac{1}{2} \overline{AB} = 1$$

따라서 직각삼각형 OEH에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{EH}}{\overline{OE}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

103

[1단계] 밑면이 정사각형인 직육면체이므로 평면 DEG와 평면 EFGH의 교선 EG의 중점 M은 밑면의 두 대각선의 교점이다. 즉, 점 M에서 수직으로 뻗어나간 두 직선을 생각하면 위의 그림과 같이 각각 점 D, 점 H를 지난다.

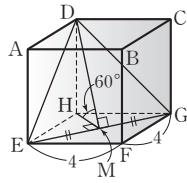
따라서 평면 DEG와 평면 EFGH가 이루는 각은 $\angle DMH$ 이므로 $\angle DMH = 60^\circ$

[2단계] 직각삼각형 DHM에서

$$\overline{HM} = \frac{1}{2} \overline{HF} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

이때 $\angle DMH = 60^\circ$ 이므로

$$\overline{DH} = \overline{HM} \tan 60^\circ = 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{6}$$

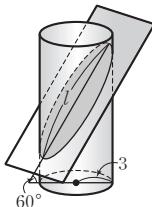


104

단면인 타원의 장축의 길이를 l 이라고 하면 장축의 밑면 위로의 정사영은 밑면의 지름이므로

$$2 \times 3 = l \times \cos 60^\circ$$

$$\therefore l = 6 \times 2 = 12$$



105

평면 ABED와 평면 BEFC의 교선 BE 위의 점 B에서 수직으로 각 평면 위로 뻗어나간 두 직선은 각각 직선 AB, 직선 BC이므로 두 평면이 이루는 각의 크기는 $\angle ABC$ 의 크기와 같다.

이때 $\triangle ABC$ 가 정삼각형이므로 $\angle ABC = 60^\circ$

한편 $\square ABED$ 의 넓이는 $4 \times 6 = 24$

따라서 구하는 정사영의 넓이는 $24 \times \cos 60^\circ = 12$

106

$\triangle CHF$ 의 평면 EFGH 위로의 정사영은 $\triangle GHF$ 이므로

$$\triangle GHF = \triangle CHF \times \cos \theta \quad \dots \textcircled{①}$$

$\triangle CHF$ 는 한 변의 길이가 $4\sqrt{2}$ 인 정삼각형이므로

$$\triangle CHF = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (4\sqrt{2})^2 = 8\sqrt{3}$$

$\triangle GHF$ 는 $\overline{HG} = \overline{FG} = 4$ 인 직각이등변삼각형이므로

$$\triangle GHF = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$

따라서 ①에 의해 $8 = 8\sqrt{3} \cos \theta$

$$\therefore \cos \theta = \frac{8}{8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

107

오른쪽 그림과 같이 모서리 EF와 모서리 FG의 중점을 각각 M, N이라고 하면 $\triangle PQR$ 의 평면 EFGH 위로의 정사영은

$\triangle MFN$ 이므로

$$\triangle MFN = \triangle PQR \times \cos \theta \quad \dots \textcircled{②}$$

$\triangle PQR$ 는 한 변의 길이가 $4\sqrt{2}$ 인 정삼각형이므로

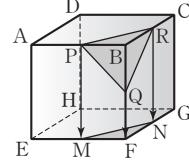
$$\triangle PQR = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (4\sqrt{2})^2 = 8\sqrt{3}$$

$\triangle MFN$ 은 $\overline{MF} = \overline{NF} = 4$ 인 직각이등변삼각형이므로

$$\triangle MFN = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$

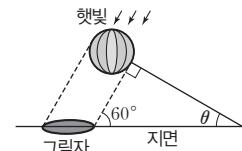
따라서 ②에 의해 $8 = 8\sqrt{3} \cos \theta$

$$\therefore \cos \theta = \frac{8}{8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



108

정면에서 본 상황을 간단하게 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.



이때 햇빛과 수직으로 만나는

애드벌룬의 지름이 지면과 이루는 각의 크기를 θ 라고 하면 햇빛이 지면과 이루는 각의 크기가 60° 이므로

$$\theta = 90^\circ - (\text{햇빛과 지면이 이루는 각의 크기}) = 30^\circ$$

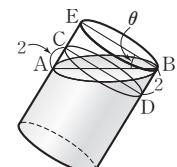
애드벌룬의 반지름의 길이를 r m라고 하면 그림자의 넓이가 $12\sqrt{3}\pi$ m²이고, 그림자의 정사영은 구의 중심을 지나도록 자른 단면인 원이므로

$$\pi r^2 = 12\sqrt{3}\pi \times \cos 30^\circ, r^2 = 18$$

$$\therefore r = 3\sqrt{2} \text{ (m)}$$

109

오른쪽 그림과 같이 컵을 기울이면 한쪽 수면이 올라온 만큼 반대쪽 수면은 내려가므로 물이 쏟아지기 직전 상태의 수면의 장축을 \overline{AB} , 처음 수면의 지름을 \overline{CD} 라고 하면



$$\overline{AC} = \overline{BD} = 2 \quad \therefore \overline{AE} = 4$$

물이 쏟아지기 직전 상태의 수면과 컵의 밑면이 이루는 각의 크기는 $\angle ABE$ 의 크기와 같고, 이를 θ 라고 하자.

직각삼각형 ABE에서 $\overline{AE} = 4$, $\overline{BE} = 6$ 이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

한편 컵의 밑면의 넓이는 9π 이고 수면의 정사영이 컵의 밑면이므로 수면의 넓이를 S 라고 하면

$$S \times \cos \theta = 9\pi \quad \therefore S = \frac{9\pi}{\cos \theta} = \frac{9\pi}{\frac{3\sqrt{13}}{13}} = 3\sqrt{13}\pi$$

2 공간좌표

110

(1) 점 $P(-1, 2, -2)$ 와 y 축에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $(1, 2, 2)$

이 점에서 xy 평면에 내린 수선의 발은 $A(1, 2, 0)$

(2) 점 $P(-1, 2, -2)$ 를 xy 평면에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-1, 2, 2)$

이 점을 x 축에 대하여 대칭이동한 점은

$B(-1, -2, -2)$

(3) 점 $P(-1, 2, -2)$ 와 원점에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $(1, -2, 2)$

이 점을 yz 평면에 대하여 대칭이동한 점은

$C(-1, -2, 2)$

111

$\overline{AB}=\overline{BC}$ 에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$ 이므로

$$(3-5)^2 + \{1-(-2)\}^2 + (2-3)^2$$

$$= (a-3)^2 + (-1-1)^2 + (1-2)^2$$

$$14 = a^2 - 6a + 14, a^2 - 6a = 0, a(a-6) = 0$$

$$\therefore a=6 (\because a>0)$$

112

점 $P(a, b, c)$ 은 yz 평면 위의 점이므로 $a=0$

$$\therefore P(0, b, c)$$

$\overline{PA}=\overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$ 이므로

$$(0-4)^2 + b^2 + c^2 = (0-2)^2 + (b-1)^2 + (c+1)^2$$

$$\therefore b-c+5=0 \quad \dots\dots \textcircled{\text{①}}$$

$\overline{PA}=\overline{PC}$ 에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$ 이므로

$$(0-4)^2 + b^2 + c^2 = (0+3)^2 + (b-2)^2 + (c-1)^2$$

$$\therefore 2b+c+1=0 \quad \dots\dots \textcircled{\text{②}}$$

$$\textcircled{\text{①}}, \textcircled{\text{②}} \text{을 연립하여 풀면 } b=-2, c=3$$

$$\therefore a+b+c=0+(-2)+3=1$$

113

두 점 A, B의 x 좌표의 부호가 같으므로 두 점은 yz 평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A와 yz 평면에 대하여 대칭인 점을 A'이라고 하면 yz

평면 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}=\overline{A'P}$ 이므로

$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP} \geq \overline{A'B}$$

이때 $\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 최솟값, 즉 $\overline{A'B}$ 의 길이가 $3\sqrt{6}$ 이고

$$\sqrt{(-1-2)^2 + \{2-(-4)\}^2 + (a-6)^2} = 3\sqrt{6}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 12a + 27 = 0, (a-3)(a-9) = 0$$

$$\therefore a=9 (\because a>5)$$

114

$A(1, 2, 3), B(4, 6, 8)$ 이므로

$$\overline{AB}$$

$$= \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2 + (8-3)^2}$$

$$= 5\sqrt{2}$$

두 점 A, B의 xy 평면 위로의 정

사영을 각각 A', B'이라고 하면

$$A'(1, 2, 0), B'(4, 6, 0)$$

$$\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2 + (0-0)^2} = 5$$

직선 AB와 xy 평면이 이루는 각의 크기를

$$\theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}) \text{라고 하면 } \overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta \text{이므로}$$

$$5 = 5\sqrt{2} \cos \theta, \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

115

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이 P이므로

$$P\left(\frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)}{2+1}, \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot 3}{2+1}, \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 4}{2+1}\right)$$

$$\therefore P(1, 1, 2)$$

선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점이 Q이므로

$$Q\left(\frac{2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1)}{2-1}, \frac{2 \cdot 0 - 1 \cdot 3}{2-1}, \frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot 4}{2-1}\right)$$

$$\therefore Q(5, -3, -2)$$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$\overline{PQ} = \sqrt{(5-1)^2 + (-3-1)^2 + (-2-2)^2} = 4\sqrt{3}$$

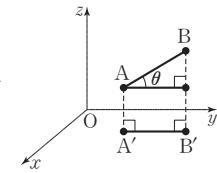
116

선분 AB가 yz 평면에 의해 1 : m 으로 내분되므로 yz 평면 위의 점이 선분 AB를 1 : m 으로 내분한다.

이때 yz 평면 위의 점의 x 좌표는 0이므로 내분점의 x 좌표도 0이다.

$$\therefore 0 = \frac{1 \cdot (-3) + m \cdot 1}{1+m} \text{이므로}$$

$$m-3=0 \quad \therefore m=3$$



117

평행사변형의 한 꼭짓점 D의 좌표를 $D(a, b, c)$ 라고 하면 \overline{BD} 의 중점이 $M(-1, 3, 4)$ 이므로

$$\frac{2+a}{2} = -1, \frac{5+b}{2} = 3, \frac{3+c}{2} = 4$$

$$\therefore a = -4, b = 1, c = 5 \quad \therefore D(-4, 1, 5)$$

따라서 \overline{AD} 의 길이는

$$\sqrt{(-4 - (-3))^2 + (1 - 2)^2 + (5 - 5)^2} = \sqrt{2}$$

118

$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$ 이라고 하면 \overline{BC} 의 중점 M의 좌표가 $M(3, 4, -1)$ 이므로

$$\frac{x_2+x_3}{2} = 3, \frac{y_2+y_3}{2} = 4, \frac{z_2+z_3}{2} = -1$$

$$\therefore x_2 + x_3 = 6, y_2 + y_3 = 8, z_2 + z_3 = -2$$

또, 무게중심 G의 좌표가 $G(-1, 3, 0)$ 이므로

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3} = -1, \frac{y_1+y_2+y_3}{3} = 3, \frac{z_1+z_2+z_3}{3} = 0$$

$$\therefore \frac{x_1+6}{3} = -1, \frac{y_1+8}{3} = 3, \frac{z_1+(-2)}{3} = 0 \text{이므로}$$

$$x_1 = -9, y_1 = 1, z_1 = 2 \quad \therefore A(-9, 1, 2)$$

다른풀이 $\triangle ABC$ 의 무게중심 G는 선분 AM을 $2:1$ 로 내분한다. $A(a, b, c)$ 라고 하면

$$\frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot a}{2+1} = -1, \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot b}{2+1} = 3, \frac{2 \cdot (-1) + 1 \cdot c}{2+1} = 0$$

$$\therefore a = -9, b = 1, c = 2 \quad \therefore A(-9, 1, 2)$$

119

$$(1) (x-2)^2 + (y-3)^2 + \{z - (-1)\}^2 = 1^2$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 1$$

(2) 구의 반지름의 길이를 r 라고 하면

$$\text{구 } (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = r^2 \text{이}$$

점 $(4, 2, -1)$ 을 지나므로

$$(4+1)^2 + (2-3)^2 + (-1+2)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 27$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 27$$

(3) 구의 중심은 \overline{AB} 의 중점이므로

$$\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{-3-1}{2}, \frac{3+1}{2}\right) \quad \therefore (1, -2, 2)$$

구의 반지름의 길이는

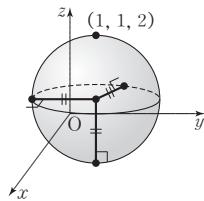
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \overline{AB} &= \frac{1}{2} \sqrt{(3 - (-1))^2 + (-1 - (-3))^2 + (1 - 3)^2} \\ &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 6$$

120

xy 평면, yz 평면, zx 평면에 동시에 접하면서 각 좌표가 모두 양수인 점 $(1, 1, 2)$ 를 지나는 구의 중심의 각 좌표는 모두 양수이다. 또, 중심이 각 좌표평면에서 반지름의 길이만큼 떨어져 있으므로 반지름의 길이를 r 라고 하면 구의 중심의 좌표는 (r, r, r) 가 된다.



즉, 이 구의 방정식은 $(x-r)^2 + (y-r)^2 + (z-r)^2 = r^2$ 이고 점 $(1, 1, 2)$ 를 지나므로

$$(1-r)^2 + (1-r)^2 + (2-r)^2 = r^2$$

$$2r^2 - 8r + 6 = 0, r^2 - 4r + 3 = 0, (r-1)(r-3) = 0$$

$$\therefore r=1 \text{ 또는 } r=3$$

따라서 구하는 구의 부피는

$$\frac{4}{3}\pi \times 1^3 = \frac{4}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 36\pi$$

121

이차방정식 $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ 에서

$$(x^2 - 6x) + (y^2 - 4y) + z^2 = -9$$

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) + z^2 = -9 + 9 + 4$$

$$\therefore (x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$$

따라서 주어진 이차방정식이 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(3, 2, 0)$ 이고 반지름의 길이가 2인 구이므로 부피

$$= \frac{4}{3}\pi \times 2^3 = \frac{32}{3}\pi$$

122

이차방정식 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z + k = 0$ 에서

$$(x^2 + 2x) + (y^2 + 4y) + (z^2 + 6z) = -k$$

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) + (z^2 + 6z + 9) = -k + 1 + 4 + 9$$

$$\therefore (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 14 - k \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

이 이차방정식이 나타내는 도형이 구가 되려면 $\textcircled{1}$ 의 우변이 반지름의 길이의 제곱이 될 수 있어야 하므로

$$14 - k > 0 \quad \therefore k < 14$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k 는 $1, 2, 3, \dots, 13$ 의 13개이다.

123

구하는 구의 방정식을

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0 \text{ 으로 놓으면}$$

$$\text{점 } (0, 0, 0) \text{을 지나므로}$$

$$D = 0$$

점 $(0, -1, -1)$ 을 지나므로

$$1+1-B-C+D=0 \quad \dots \textcircled{①}$$

점 $(3, 3, 0)$ 을 지나므로

$$9+9+3A+3B+D=0 \quad \dots \textcircled{②}$$

점 $(5, 3, -4)$ 을 지나므로

$$25+9+16+5A+3B-4C+D=0 \quad \dots \textcircled{③}$$

①, ②, ③을 연립하여 풀면

$$A=0, B=-6, C=8$$

즉, 구의 방정식은 $x^2+y^2+z^2-6y+8z=0$ 이므로

$$x^2+(y-3)^2+(z+4)^2=25$$

따라서 이 구의 중심의 좌표는 $(0, 3, -4)$, 반지름의 길이는 5이므로

$$a+b+c+r=0+3+(-4)+5=4$$

124

$$\text{구 } x^2+y^2+z^2=1 \quad \dots \textcircled{①}$$

에서 구 ①은 중심이 원점이고, 반지름의 길이가 1이다.

$$\text{구 } x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z+k=0 \quad \dots \textcircled{②}$$

에서 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9-k$ 이므로

구 ②은 중심의 좌표가 $(1, 2, 2)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{9-k}$ 이다.

이때 두 구의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$

따라서 두 구가 내접하려면 중심 사이의 거리가 반지름의 길이의 차와 같아야 하므로

$$|\sqrt{9-k}-1|=3, \sqrt{9-k}-1=\pm 3$$

$$\sqrt{9-k}=4 \text{ 또는 } \sqrt{9-k}=-2$$

$$\sqrt{9-k}>0 \text{이므로 } \sqrt{9-k}=4, 9-k=16$$

$$\therefore k=-7$$

125

구와 y 축의 두 교점은 y 축 위의 점이므로 $x=0, z=0$ 을 구의 방정식에 대입하면

$$(0-1)^2+(y-1)^2+(0-1)^2=r^2$$

$$(y-1)^2=r^2-2 \quad \therefore y=1\pm\sqrt{r^2-2}$$

따라서 두 교점의 좌표는

$$(0, 1+\sqrt{r^2-2}, 0), (0, 1-\sqrt{r^2-2}, 0)$$

이고 두 점 사이의 거리가 4이므로

$$(1+\sqrt{r^2-2})-(1-\sqrt{r^2-2})=4, \sqrt{r^2-2}=2$$

$$r^2=6 \quad \therefore r=\sqrt{6} (\because r>0)$$

126

구와 zx 평면이 만나서 생기는 도형은 zx 평면 위의 점으로 이루어진 도형이므로 $y=0$ 을 구의 방정식에 대입하면 $x^2+z^2-2x-6z+k=0$

$$\therefore (x-1)^2+(z-3)^2=10-k$$

따라서 주어진 구를 zx 평면으로 자른 단면은 중심의 좌표가 $(1, 0, 3)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{10-k}$ 인 원이다.

이때 이 원의 넓이가 100π 이므로

$$\pi(\sqrt{10-k})^2=100\pi \quad \therefore k=-90$$

127

구의 중심을 C , 접점을 B 라 하고 구의 반지름의 길이를 r 라고 하면 $C(1, -2, 0), r=6$

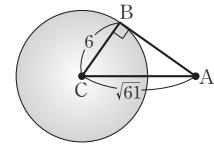
$$\therefore \overline{AC}=\sqrt{(1-5)^2+(-2-4)^2+(0-3)^2}=\sqrt{61}, \\ \overline{BC}=6$$

이때 구 밖의 점에서 구에 그은 접선은 그 접점과 구의 중심을 이은 반지름에 수직이므로 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC$ 는

$\angle ABC=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

따라서 구하는 접선의 길이는

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{(\sqrt{61})^2-6^2}=5$$



128

구의 중심을 C , 반지름의 길이를 r 라고 하면

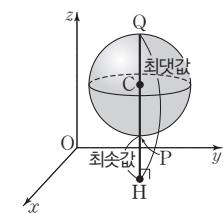
$$C(1, 2, 4), r=1$$

구의 중심 C 에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 H 라고 하면 $H(1, 2, 0)$

$$\therefore \overline{CH}=|\text{중심의 } z\text{좌표}|=4$$

오른쪽 그림과 같이 직선 CH 와

구가 만나는 점 중 점 H 에 가까운 점을 P , 점 H 에서 멀리 있는 점을 Q 라고 하자. 점 H 와 구 위의 점을 잇는 선분을 그어 보면 구 위의 점이 P 일 때 거리는 최소가 되고, 구 위의 점이 Q 일 때 거리는 최대가 된다.



따라서 거리의

$$(\text{최댓값})=\overline{HQ}=\overline{HC}+\overline{CQ}=\overline{HC}+r=4+1=5$$

$$(\text{최솟값})=\overline{HP}=\overline{HC}-\overline{CP}=\overline{HC}-r=4-1=3$$

3 공간벡터

129

$$(1) \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$$

$$(2) \overrightarrow{HE}=-\overrightarrow{EH}=-\overrightarrow{AD}=-\vec{b}$$

$$(3) \overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{CG}=-\overrightarrow{AE}=-\vec{c}$$

$$(4) \overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AC}=\vec{d}$$

130

- (1) \overrightarrow{EF}
 (2) $\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{DA}$

131

- (1) $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \vec{b} + \vec{c}$
 (2) $\overrightarrow{EC} = (\text{점 } E \text{에서 점 } C \text{까지})$
 $= (E \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C)$
 $= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
 $= (-\vec{c}) + \vec{a} + \vec{b}$
 $= \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$
 (3) $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$
 $= (-\vec{c}) + \vec{b} = \vec{b} - \vec{c}$
 (4) $\overrightarrow{GA} = (\text{점 } G \text{에서 점 } A \text{까지})$
 $= (G \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A)$
 $= \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$
 $= (-\vec{c}) + (-\vec{b}) + (-\vec{a})$
 $= -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

132

- (1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$
 (2) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \vec{c} - \vec{b}$
 (3) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \vec{a} - \vec{c}$

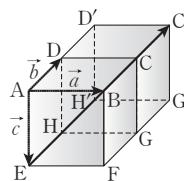
133

- $\overrightarrow{AM} = (\text{점 } A \text{에서 점 } M \text{까지}) = (A \rightarrow E \rightarrow M)$
 $= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2} \overrightarrow{EG}$
 $= \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$
 $= \vec{c} + \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b})$
 $= \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} + \vec{c}$

134

오른쪽 그림과 같이 정육면체
 $ABCD-EFGH$ 의 한 면
 $CDHG$ 에 같은 크기의 정육면체
 를 연결하여 붙인 후, 새로 만들어
 진 꼭짓점을 C' , D' , H' , G' 이라고
 하면

$$\begin{aligned} \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} &= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EA} \\ &= \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EC'} \\ \therefore |\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}| &= |\overrightarrow{EC'}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6} \end{aligned}$$



135

$\vec{q} + \vec{r} = 3\vec{a} + (m-1)\vec{b}$
 $\vec{p}, \vec{q} + \vec{r}$ 가 서로 평행하므로
 $\vec{q} + \vec{r} = k\vec{p}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)
 $\therefore 3\vec{a} + (m-1)\vec{b} = k(\vec{a} + \vec{b})$ 에서
 $3 = k, m-1 = k$
 $\therefore k = 3, m = 4$

136

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로
 $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)
 $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$ 이므로
 $(8\vec{a} - 3\vec{b}) - m\vec{a} = k(\vec{b} - m\vec{a})$
 $(8-m)\vec{a} - 3\vec{b} = -k\vec{ma} + k\vec{b}$ 에서
 $8-m = -km, -3 = k$
 $\therefore k = -3, m = 2$

137

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \vec{c} - \vec{b}$,
 $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HG} = \vec{c} + \vec{a}$ 이므로
 $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG}) = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}) + (\vec{c} + \vec{a})$
 $= \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

138

점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로
 $\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$
 $\therefore \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG} = \vec{a} - \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$
 $= \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$

139

$\vec{x} - \vec{b} = -2\vec{a} + 2\vec{x}$ 에서
 $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$
 $= 2(2, -1, 1) - (1, -2, 4)$
 $= (3, 0, -2)$

140

$$\begin{aligned} &(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}) - (3\vec{c} - \vec{a}) \\ &= 2\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c} \\ &= 2(2, 1, 3) + 2(-1, 2, 4) - 4(0, 3, 4) \\ &= (2, -6, -2) \\ &\text{따라서 구하는 벡터의 크기는} \\ &\sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11} \end{aligned}$$

141

$\vec{c} = l\vec{a} + m\vec{b}$ 를 성분으로 나타내면

$$\begin{aligned}(k, 12, 3) &= l(4, 0, -3) + m(2, -4, 1) \\&= (4l+2m, -4m, -3l+m)\end{aligned}$$

이므로 $4l+2m=k, -4m=12, -3l+m=3$

세 식을 연립하여 풀면

$$k=-14, l=-2, m=-3$$

142

$D(x, y, z)$ 라고 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} \\&= (x, y, z) - (-2, 1, 4) \\&= (x+2, y-1, z-4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \\&= (2, 0, -3) - (1, 2, -5) \\&= (1, -2, 2)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ 이므로

$$\begin{aligned}(x+2, y-1, z-4) &= (1, -2, 2) \\즉, x+2=1, y-1=-2, z-4=2 &\text{에서} \\x=-1, y=-1, z=6 &\text{이다.}\end{aligned}$$

$$\therefore D(-1, -1, 6)$$

143

$$\begin{aligned}\vec{a} + m\vec{b} &= (1, -3, 2) + m(-2, 0, 2) \\&= (1-2m, -3, 2+2m)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\vec{a} - \vec{b} &= 2(1, -3, 2) - (-2, 0, 2) \\&= (4, -6, 2)\end{aligned}$$

$\vec{a} + m\vec{b}, 2\vec{a} - \vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{a} + m\vec{b} = k(2\vec{a} - \vec{b}) \quad (\text{단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수})$$

$$\begin{aligned}\text{즉, } (1-2m, -3, 2+2m) &= k(4, -6, 2) \text{에서} \\1-2m=4k, -3=-6k, 2+2m=2k &\text{이다.}\end{aligned}$$

$$\therefore k=\frac{1}{2}, m=-\frac{1}{2}$$

144

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2, 1, 0) - (1, 2, -3) \\&= (1, -1, 3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (x, 0, y) - (1, 2, -3) \\&= (x-1, -2, y+3)\end{aligned}$$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \quad (\text{단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수})$$

$$\begin{aligned}\text{즉, } (x-1, -2, y+3) &= k(1, -1, 3) \text{에서} \\x-1=k, -2=-k, y+3=3k &\text{이다.}\end{aligned}$$

$$\therefore k=2, x=3, y=3$$

145

(1) \overrightarrow{AB} 와 \overrightarrow{AD} 가 이루는 각의 크기가 90° 이고

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AB}| &= 2, |\overrightarrow{AD}| = 2 \text{이므로} \\&\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}| \cos 90^\circ \\&= 2 \times 2 \times 0 = \mathbf{0}\end{aligned}$$

(2) \overrightarrow{AE} 와 \overrightarrow{DG} 가 이루는 각의 크기가 45° 이고

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AE}| &= 2, |\overrightarrow{DG}| = 2\sqrt{2} \text{이므로} \\&\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DG} = |\overrightarrow{AE}| |\overrightarrow{DG}| \cos 45^\circ \\&= 2 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \mathbf{4}\end{aligned}$$

(3) \overrightarrow{AE} 와 \overrightarrow{GC} 가 이루는 각의 크기가 180° 이고

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AE}| &= 2, |\overrightarrow{GC}| = 2 \text{이므로} \\&\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{GC} = |\overrightarrow{AE}| |\overrightarrow{GC}| \cos 180^\circ \\&= 2 \times 2 \times (-1) = \mathbf{-4}\end{aligned}$$

146

(1) $\square ABFD$ 는 정사각형이므로 $\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{BD}$

$$\therefore \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BD} = |\overrightarrow{AF}| |\overrightarrow{BD}| \cos 90^\circ = \mathbf{0}$$

(2) $\triangle BFC$ 는 정삼각형이므로 $\angle CBF = 60^\circ$

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BC} &= |\overrightarrow{BF}| |\overrightarrow{BC}| \cos 60^\circ \\&= 4 \times 4 \times \frac{1}{2} = \mathbf{8}\end{aligned}$$

147

$$\begin{aligned}2\vec{a} + \vec{b} &= 2(2, 3, -1) + (1, 5, 1) = (5, 11, -1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} - \vec{b} &= (2, 3, -1) - (1, 5, 1) = (1, -2, -2)\end{aligned}$$

$$\therefore (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$$

$$= 5 \times 1 + 11 \times (-2) + (-1) \times (-2) = \mathbf{-15}$$

148

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \text{이므로}$$

$$2 \times 3 + 0 \times 4 + (x-2)(x+1) = 4$$

$$x^2 - x = 0, x(x-1) = 0 \quad \therefore x = \mathbf{1} \quad (\because x > 0)$$

149

$$\vec{a} - \vec{b} = (1, 2, 3) - (-1, 5, 2) = (2, -3, 1),$$

$$\vec{a} - \vec{c} = (1, 2, 3) - (2, 4, 0) = (-1, -2, 3)$$

이므로 $\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{c}$ 가 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)

라고 하면

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{c})}{|\vec{a} - \vec{b}| |\vec{a} - \vec{c}|} \\&= \frac{2 \times (-1) + (-3) \times (-2) + 1 \times 3}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 3^2}} \\&= \frac{7}{\sqrt{14} \sqrt{14}} = \frac{1}{2} \\&\therefore \theta = \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

150

세 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 가 서로 수직이므로
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \vec{a} \cdot \vec{c} = 0, \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x + y + 1 = 0$ 에서 $x + y = -1$
 $\vec{a} \cdot \vec{c} = x + 1 + z = 0$ 에서 $x + z = -1$
 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1 + y + z = 0$ 에서 $y + z = -1$
 위의 식을 변끼리 더하여 정리하면
 $x + y + z = -\frac{3}{2}$
 $\therefore x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}, z = -\frac{1}{2}$

151

(i) $\vec{a} // \vec{c}$ 이므로 $\vec{a} = k\vec{c}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)
 $(1, 2, m) = k(2, 4, -8)$
 $1 = 2k, 2 = 4k, m = -8k$
 $\therefore k = \frac{1}{2}, m = -4$

(ii) $\vec{a} \perp \vec{b}$ 이므로 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
 $(1, 2, m) \cdot (-4, n-2, 1) = 0$
 $-4 + 2(n-2) + m = 0$
 $2n + m = 8, 2n = 12 \quad \therefore n = 6$

152

(1) $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{6}$
 (2) $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5}, z-3=0$
 $\therefore \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5}, z=3$

(3) $x-1=0, \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{6}$
 $\therefore x=1, \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{6}$

153

직선 $\frac{x+5}{3} = -z-1, y=-3$ 에서
 $\frac{x+5}{3} = \frac{y+3}{0} = \frac{z+1}{-1}$
 이므로 이 직선의 방향벡터는 $(3, 0, -1)$ 이다.
 따라서 점 $(6, -1, 3)$ 을 지나고 방향벡터가
 $(3, 0, -1)$ 인 직선의 방정식은
 $\frac{x-6}{3} = \frac{z-3}{-1}, y+1=0$
 $\therefore \frac{x-6}{3} = 3-z, y=-1$

154

(1) $\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-3}{-1-3} = \frac{z-(-2)}{4-(-2)}$
 $\therefore x-1 = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+2}{6}$

(2) $\frac{x-2}{0-2} = \frac{y-0}{3-0} = \frac{z-(-4)}{-4-(-4)}$
 $\frac{x-2}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z+4}{0}$
 $\therefore \frac{x-2}{-2} = \frac{y}{3}, z=-4$

155

(1) 점 A(-2, 2, -2)를 지나고 방향벡터가
 $\vec{u}=(1, 2, 3)$ 인 직선의 방정식은
 $\frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{3}$
 x=0을 위의 식에 대입하면
 $\frac{0+2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{3} \quad \therefore y=6, z=4$
 $\therefore P(0, 6, 4)$

(2) 점 A(6, 2, 3)을 지나고 방향벡터가
 $\vec{u}=(3, 2, -1)$ 인 직선의 방정식은
 $\frac{x-6}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1}$
 x=0을 위의 식에 대입하면
 $\frac{0-6}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1} \quad \therefore y=-2, z=5$
 $\therefore P(0, -2, 5)$

156

[1단계] $x-1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1} = t$ (t 는 실수)로 놓으면
 $x=t+1, y=2t+2, z=-t+3 \quad \dots \textcircled{①}$

[2단계] $\frac{x+3}{3} = y+1 = \frac{z+1}{5} = s$ (s 는 실수)로 놓으면
 $x=3s-3, y=s-1, z=5s-1 \quad \dots \textcircled{②}$

[3단계] $\textcircled{①}, \textcircled{②}$ 에서 x, y, z 를 소거하면
 $t+1=3s-3, 2t+2=s-1, -t+3=5s-1$
 세 식을 연립하여 풀면
 $t=-1, s=1$
 따라서 $\textcircled{①}$ 또는 $\textcircled{②}$ 에서 교점의 좌표는 $(0, 0, 4)$

157

[1단계] $x-a = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3} = t$ (t 는 실수)로 놓으면
 $x=t+a, y=2t+1, z=3t \quad \dots \textcircled{③}$

[2단계] $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+3}{5} = s$ (s 는 실수)로 놓으면

$$x=2s, y=3s, z=5s-3 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

[3단계] $\textcircled{L}, \textcircled{L}$ 에서 x, y, z 를 소거하면

$$t+a=2s, 2t+1=3s, 3t=5s-3$$

뒤의 두 식을 연립하여 풀면

$$t=4, s=3$$

이것을 $t+a=2s$ 에 대입하면

$$4+a=6 \quad \therefore a=2$$

158

두 직선의 방향벡터는 각각

$$\vec{u}=(-1, -2, 1), \vec{v}=(2, 1, 1)$$

이때 두 직선이 이루는 각의 크기가 θ 이므로

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \\ &= \frac{|(-1) \times 2 + (-2) \times 1 + 1 \times 1|}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{6} \sqrt{6}} = \frac{1}{2} \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{3} \quad \therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

159

두 직선의 방향벡터는 각각

$$\vec{u}=(1, \sqrt{2}, 1), \vec{v}=(\sqrt{2}, 2, m)$$

(1) $\vec{v}=k\vec{u}$ (k 는 0이 아닌 실수)에서

$$(\sqrt{2}, 2, m)=k(1, \sqrt{2}, 1)$$

$$\sqrt{2}=k, 2=\sqrt{2}k, m=k$$

$$\therefore k=\sqrt{2}, m=\sqrt{2}$$

(2) $\vec{u} \cdot \vec{v}=0$ 에서 $(1, \sqrt{2}, 1) \cdot (\sqrt{2}, 2, m)=0$

$$\sqrt{2}+2\sqrt{2}+m=0$$

$$\therefore m=-3\sqrt{2}$$

160

두 직선의 방향벡터는 각각

$$\vec{u}_1=(1, -1, -2), \vec{u}_2=(-2, 1, 1)$$

구하는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}=(a, b, c)$ 라고 하면

$$\vec{u} \cdot \vec{u}_1=0 \text{에서 } (a, b, c) \cdot (1, -1, -2)=0$$

$$\therefore a-b-2c=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u}_2=0 \text{에서 } (a, b, c) \cdot (-2, 1, 1)=0$$

$$\therefore -2a+b+c=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 a, b 를 c 로 나타내면

$$a=-c, b=-3c$$

$$\therefore \vec{u}=(-c, -3c, c)$$

따라서 점 $(5, 5, 5)$ 를 지나고 방향벡터가

$$\vec{u}=(-c, -3c, c) \text{인 직선의 방정식은}$$

$$\frac{x-5}{-c} = \frac{y-5}{-3c} = \frac{z-5}{c}$$

$$\therefore 5-x = \frac{y-5}{-3} = z-5$$

161

(1) [1단계] $\frac{x-4}{3} = y-3 = \frac{z-2}{-2} = t$ (t 는 실수)로 놓으면

$$x=3t+4, y=t+3, z=-2t+2$$

점 H 는 직선 l 위의 점이므로

$$H(3t+4, t+3, -2t+2)$$

[2단계] 직선 l 의 방향벡터는

$$\vec{u}=(3, 1, -2)$$

즉, $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$ 에서

$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}=0$$
 이고

$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}$$

$$=(3t+4, t+3, -2t+2)-(0, 1, 2)$$

$$=(3t+4, t+2, -2t)$$

이므로

$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}=(3t+4, t+2, -2t) \cdot (3, 1, -2)$$

$$=14t+14=0$$

$$\therefore t=-1$$

따라서 수선의 발 H 의 좌표는 $H(1, 2, 4)$

(2) 점 A 에서 직선 l 에 내린 수선의 길이는 \overline{AH} 의 길이이므로

$$\overline{AH}=\sqrt{(1-0)^2+(2-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{6}$$

(3) 두 점 $A(0, 1, 2), H(1, 2, 4)$ 를 지나는 직선이므로

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-1}{2-1} = \frac{z-2}{4-2}$$

$$\therefore x=y-1=\frac{z-2}{2}$$

162

법선벡터가 $\vec{n}=(3, -1, -1)$ 이므로 구하는 평면의 방정식은

$$3(x+3)-1 \cdot (y-0)-1 \cdot (z-3)=0$$

$$\therefore 3x-y-z+12=0$$

다른풀이 법선벡터가 $\vec{n}=(3, -1, -1)$ 이므로 평면의 방정식을 $3x-y-z+d=0$ 으로 놓을 수 있다.

이 평면이 점 $A(-3, 0, 3)$ 을 지나므로

$$-9-0-3+d=0 \quad \therefore d=12$$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$3x-y-z+12=0$$

163

주어진 직선의 방정식의 각 변을 2로 나누면

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$$

평면의 법선벡터는 직선의 방향벡터와 같으므로
 $\vec{n} = \vec{u} = (2, 1, 2)$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$2(x-1) + 1 \cdot (y-1) + 2(z-1) = 0 \\ \therefore 2x + y + 2z - 5 = 0$$

164

두 점 B, C를 지나는 직선의 방향

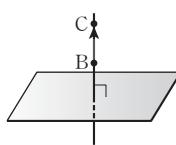
벡터는

$$\vec{n} = \vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} \\ = (4, 5, 6) - (2, 3, 4) \\ = (2, 2, 2)$$

이것은 구하는 평면의 법선벡터와 같다.

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$2(x-0) + 2(y-1) + 2(z-2) = 0 \\ \therefore x + y + z - 3 = 0$$

**165**

구하는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$ 으로 놓고 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 대입하면

$$a+b+d=0, b+c+d=0, a+c+d=0$$

세 식을 연립하여 a, b, d를 c로 나타내면

$$a=c, b=c, d=-2c$$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$cx+cy+cz-2c=0$$

$$\therefore x + y + z - 2 = 0$$

166

$$x-y+z+2=0 \quad \dots \textcircled{①}$$

$$2x-y-2z-1=0 \quad \dots \textcircled{②}$$

$\textcircled{①}-\textcircled{②}$ 을 하면

$$-x+3z+3=0 \quad \therefore x=3z+3 \quad \dots \textcircled{③}$$

$\textcircled{③}$ 을 $\textcircled{①}$ 에 대입하면

$$4z-y+5=0 \quad \therefore y=4z+5 \quad \dots \textcircled{④}$$

$\textcircled{④}, \textcircled{③}$ 에서 z를 x, y로 각각 나타내면

$$z = \frac{x-3}{3}, z = \frac{y-5}{4}$$

따라서 구하는 교선의 방정식은

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{4} = z$$

167

두 평면의 교선을 포함하는 평면의 방정식은

$$(x+y+z-1)+k(x-y-z-2)=0 \quad (\text{단, } k \text{는 실수}) \\ \dots \textcircled{①}$$

이 평면이 점 A(1, -1, -1)을 지나므로

$$(1-1-1-1)+k(1+1+1-2)=0 \quad \therefore k=2$$

이것을 $\textcircled{①}$ 에 대입하여 정리하면 구하는 평면의 방정식은

$$3x-y-z-5=0$$

168

$$x = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3} = t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=t, y=2t-3, z=3t-1 \quad \dots \textcircled{①}$$

점 $(t, 2t-3, 3t-1)$ 은 평면 $x-2y-3z+3=0$ 위의 점이므로

$$t-2(2t-3)-3(3t-1)+3=0 \quad \therefore t=1$$

$t=1$ 을 $\textcircled{①}$ 에 대입하면

$$x=1, y=-1, z=2$$

따라서 교점의 좌표는 $(1, -1, 2)$

169

[1단계] 평면에 수직인 직선의 방정식을 구한다.

직선 AA'은 평면 $x-2y+z=3$ 에 수직이므로 평면의 법선벡터 $\vec{n}=(1, -2, 1)$ 과 직선 AA'의 방향벡터 \vec{u} 가 평행하다.

즉, $\vec{u}=\vec{n}=(1, -2, 1)$ 이므로 점 A(2, 2, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{1}$$

[2단계] 이 직선과 평면의 교점 H의 좌표를 구한다.

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{1} = t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=t+2, y=-2t+2, z=t+2$$

직선과 평면의 교점을 H라고 하면

$$H(t+2, -2t+2, t+2)$$

이때 점 H는 평면 $x-2y+z=3$ 위의 점이므로

$$(t+2)-2(-2t+2)+(t+2)=3 \quad \therefore t=\frac{1}{2}$$

$$\therefore H\left(\frac{5}{2}, 1, \frac{5}{2}\right)$$

[3단계] 점 A'의 좌표를 구한다.

A'(a, b, c)라고 하면

$$\frac{a+2}{2} = \frac{5}{2}, \frac{b+2}{2} = 1, \frac{c+2}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore a=3, b=0, c=3 \quad \therefore A'(3, 0, 3)$$

170

두 평면의 법선벡터는 각각

$$\vec{n}_1 = (1, 2, -3), \vec{n}_2 = (2, -3, 1)$$

두 평면이 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)라고 하면

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|1 \times 2 + 2 \times (-3) + (-3) \times 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} \\ &= \frac{7}{\sqrt{14} \sqrt{14}} = \frac{1}{2} \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

171

직선의 방향벡터는 $\vec{u} = (-4, 1, 1)$, 평면의 법선벡터는 $\vec{n} = (2, -2, 1)$ 이므로 직선과 평면이 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)라고 하면

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} \\ &= \frac{|(-4) \times 2 + 1 \times (-2) + 1 \times 1|}{\sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} \\ &= \frac{9}{3\sqrt{2} \times 3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

172

두 평면의 법선벡터는 각각

$$\vec{n}_1 = (2, m, 4), \vec{n}_2 = (1, -3, 2)$$

(1) $\vec{n}_1 = k\vec{n}_2$ (k 는 0이 아닌 실수)에서

$$(2, m, 4) = k(1, -3, 2)$$

$$2=k, m=-3k, 4=2k$$

$$\therefore k=2, m=-6$$

(2) $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ 에서 $2-3m+8=0$

$$\therefore m=\frac{10}{3}$$

173

두 평면의 법선벡터는 각각

$$\vec{n}_1 = (1, -1, -2), \vec{n}_2 = (2, 1, 1)$$

구하는 평면의 법선벡터를 $\vec{n} = (a, b, c)$ 라고 하면

$$\vec{n} \cdot \vec{n}_1 = 0 \text{에서 } (a, b, c) \cdot (1, -1, -2) = 0$$

$$\therefore a-b-2c=0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{n}_2 = 0 \text{에서 } (a, b, c) \cdot (2, 1, 1) = 0$$

$$\therefore 2a+b+c=0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 b, c 를 a 로 나타내면 $b=-5a, c=3a$

$$\therefore \vec{n} = (a, -5a, 3a)$$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$a(x-0)-5a(y-0)+3a(z-0)=0$$

$$\therefore x-5y+3z=0$$

174

$3x+2y+z=6$ 에서 $3x+2y+z-6=0$ 이므로 구하는 거리는

$$\frac{|3 \times 4 + 2 \times 3 + 1 \times 2 - 6|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

175

구하는 평면의 법선벡터가 직선 $x = \frac{y-3}{-3} = z$ 의 방향벡

터와 같으므로 $\vec{n} = \vec{u} = (1, -3, 1)$ 에서 구하는 평면의 방정식을 $x-3y+z+d=0$ 으로 놓을 수 있다.

구의 중심 $C(2, -1, 4)$ 와 평면 $x-3y+z+d=0$ 사이의 거리는 구의 반지름의 길이 $\sqrt{11}$ 과 같으므로

$$\frac{|2-3 \times (-1)+4+d|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \sqrt{11}$$

$$|9+d|=11, 9+d=\pm 11$$

$$\therefore d=2 \text{ 또는 } d=-20$$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$x-3y+z+2=0 \text{ 또는 } x-3y+z-20=0$$

176

오른쪽 그림과 같이 구의 중심

$$C(1, 2, -1)$$

에서 평면

$$2x+y+2z-11=0$$

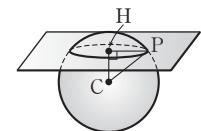
에 내린 수선

의 발을 H 라고 하면 구의 중심 C

와 평면 사이의 거리는

$$CH = \frac{|2 \times 1 + 1 + 2 \times (-1) - 11|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}}$$

$$= \frac{9}{3} = 3$$



구와 평면의 교선인 원 위의 점을 P 라고 하면 구의 반지름의 길이는 5이므로

$$CP=5$$

위 그림의 직각삼각형 CPH에서

$$\overline{HP}^2 = \overline{CP}^2 - \overline{CH}^2 = 5^2 - 3^2 = 16$$

$$\therefore \overline{HP}=4$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi \times 4^2 = 16\pi$$

연습문제

I. 평면곡선

1 이차곡선

001

포물선 $4x+y^2=0$, 즉 $y^2=-4x=4 \cdot (-1) \cdot x$ 의 초점의 좌표는 $A(-1, 0)$

포물선 $x^2-12y=0$, 즉 $x^2=12y=4 \cdot 3 \cdot y$ 의 초점의 좌표는 $B(0, 3)$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle OAB &= \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times 3 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$
■ 3

002

꼭짓점이 원점이고 준선이 y 축에 평행한 포물선의 방정식은 $y^2=4px$ ($p \neq 0$) 꼴이다.

이때 준선이 $x=-2$ 이므로 $p=2$

따라서 구하는 포물선의 방정식은 $y^2=8x$ 이고 이 포물선이 점 $(a, 4)$ 를 지나므로

$$4^2=8a \quad \therefore a=2$$
■ 2

003

포물선 $x^2=4y=4 \cdot 1 \cdot y$ 의 초점의 좌표는 $F(0, 1)$, 준선의 방정식은 $y=-1$ 이므로 오른쪽 그림과 같다.

포물선 위의 점 $P(a, b)$ 에서

준선에 내린 수선의 발을 H 라고 하면 포물선의 정의에 의하여

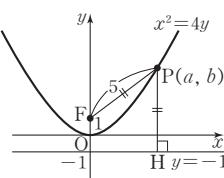
$$\overline{PF}=\overline{PH}=5$$

즉, $b+1=5$ 이므로 $b=4$

점 $P(a, 4)$ 가 포물선 $x^2=4y$ 위의 점이므로

$$a^2=4 \cdot 4=16 \quad \therefore a=4 \quad (\because a>0)$$

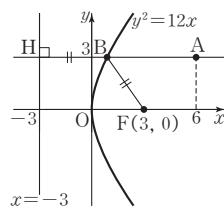
$$\therefore a+b=4+4=8$$
■ 8



004

포물선 $y^2=12x=4 \cdot 3 \cdot x$ 의 초점의 좌표는 $F(3, 0)$, 준선의 방정식은 $x=-3$ 이므로 오른쪽 그림과 같다.

점 $A(6, 3)$ 을 지나는 x 축에 평행한 직선과 준선의 교점을



H 라고 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{BF}=\overline{BH}$$

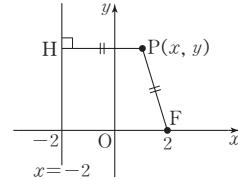
$$\therefore \overline{AB}+\overline{BF}=\overline{AB}+\overline{BH}=\overline{AH}$$

$$=6+3=9$$

■ 9

005

오른쪽 그림과 같이 점 P 의 좌표를 (x, y) 라 하고 점 P 에서 직선 $x=-2$ 에 내린 수선의 발을 H 라고 하면
 $\overline{PF} : \overline{PH} = 1 : 1$ 이므로



$$\overline{PF}=\overline{PH}$$

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=|x+2|$$

양변을 제곱하면

$$(x-2)^2+y^2=(x+2)^2$$

$$\therefore y^2=8x$$

$$y^2=8x$$

다른풀이 거리의 비가 $1 : 1$ 이므로 점 P 에서 한 점

$F(2, 0)$ 과 한 직선 $x=-2$ 에 이르는 거리가 같다. 즉, 한 점과 한 직선으로부터의 거리가 같은 점들의 집합이 포물선이므로 점 P 의 자취는 포물선이다.

따라서 점 $F(2, 0)$ 은 포물선의 초점, 직선 $x=-2$ 는 포물선의 준선이므로 $y^2=4px$ 에서 $p=2$ 인 경우이다.

$$\therefore y^2=8x$$

006

주어진 식을 y 에 대하여 완전제곱 꼴로 고치면

$$(y^2+4y+4)-4=-2x+2$$

$$\therefore (y+2)^2=-2(x-3)$$

이 포물선은 포물선 $y^2=-2x$ 를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2=-2x=4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x$ 에서

$$\text{초점} : \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \text{꼭짓점} : (0, 0), \text{준선} : x=\frac{1}{2}$$

이므로 포물선 $y^2+2x+4y-2=0$ 에서

$$\text{초점} : \left(\frac{5}{2}, -2\right), \text{꼭짓점} : (3, -2), \text{준선} : x=\frac{7}{2}$$

$$\therefore a=\frac{5}{2}, b=-2, c=3, d=-2, e=\frac{7}{2}$$

$$\therefore a+b+c+d+e=5$$

■ 5

007

축이 x 축에 평행하므로 구하는 포물선의 방정식을

$$y^2+Ax+By+C=0 \quad (A \neq 0)$$
으로 놓으면

이 포물선이 세 점 $(2, -1), (3, 1), (6, 3)$ 을 지나므로

$$1+2A-B+C=0 \quad \dots \textcircled{①}$$

$$1+3A+B+C=0 \quad \dots \textcircled{②}$$

$$9+6A+3B+C=0 \quad \dots \textcircled{③}$$

①, ②, ③을 연립하여 풀면

$$A=-4, B=2, C=9$$

이므로 포물선의 방정식은 $y^2-4x+2y+9=0$

위의 식을 y 에 대하여 완전제곱 꼴로 고치면

$$(y^2+2y+1)-1=4x-9$$

$$\therefore (y+1)^2=4(x-2)$$

즉, 포물선 $y^2=4x$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(2, -1)$ 이므로

$$a=2, b=-1 \quad \therefore a+b=1$$

■ 1

008

포물선 $y^2=4x=4\cdot 1\cdot x$ 의 초점을 F라고 하면

$$F(1, 0)$$

포물선 위의 한 점을 A(a, b)라고 하면

$$b^2=4a \quad \dots \textcircled{①}$$

선분 AF의 중점을 M(x, y)라고 하면

$$x=\frac{1+a}{2}, y=\frac{0+b}{2} \quad \therefore a=2x-1, b=2y$$

이를 ①에 대입하면

$$(2y)^2=4(2x-1) \quad \therefore y^2=2x-1$$

이때 포물선 $y^2=2\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 은 포물선 $y^2=2x$ 를 x 축의 방

향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 것이고, 포물선

$$y^2=2x=4\cdot\frac{1}{2}\cdot x \text{의 준선의 방정식은 } x=-\frac{1}{2} \text{이다.}$$

따라서 구하는 준선의 방정식은

$$x=0$$

■ 2

009

포물선 $x^2-2x-4y+9=0$ 에서

$$(x^2-2x+1)-1=4y-9$$

$$\therefore (x-1)^2=4(y-2)$$

이 포물선은 포물선 $x^2=4y$ 를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고,

포물선 $x^2=4y=4\cdot 1\cdot y$ 의 초점의 좌표가 $(0, 1)$ 이므로

포물선 $x^2-2x-4y+9=0$ 의 초점의 좌표는

$$F(0+1, 1+2) \quad \therefore F(1, 3)$$

또, 포물선 $y^2-4x-6y+5=0$ 에서

$$(y^2-6y+9)-9=4x-5$$

$$\therefore (y-3)^2=4(x+1)$$

이 포물선은 포물선 $y^2=4x$ 를 x 축의 방향으로 -1만큼,

y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고,

포물선 $y^2=4x=4\cdot 1\cdot x$ 의 초점의 좌표가 $(1, 0)$ 이므로

포물선 $y^2-4x-6y+5=0$ 의 초점의 좌표는

$$F'(1-1, 0+3) \quad \therefore F'(0, 3)$$

$$\therefore \overline{FF'}=1$$

■ 1

010

오른쪽 그림과 같이 포물선의

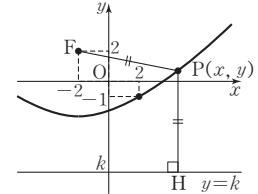
초점을 F($-2, 2$), 포물선

위의 한 점을 P(x, y), y 축

에 수직인 준선의 방정식을

$y=k$ 라 하고 점 P에서 준선

에 내린 수선의 발을 H라고



하자. 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$ 이므로

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}=|y-k|$$

양변을 제곱하면

$$(x+2)^2+(y-2)^2=(y-k)^2$$

$$\therefore x^2+4x+4(k-2)y+8-k^2=0$$

포물선이 점 $(2, -1)$ 을 지나므로

$$4+8-2(k-2)+8-k^2=0$$

$$k^2+2k-24=0, (k+6)(k-4)=0$$

$$\therefore k=-6 \text{ 또는 } k=4$$

따라서 구하는 포물선의 방정식은

$$x^2+4x-16y-28=0 \text{ 또는 } x^2+4x+4y-8=0 \text{이므로}$$

$$a=-16, b=-28, c=-8$$

$$\therefore a-b-c=-16-(-28)-(-8)=20$$

■ 20

011

[1단계] 포물선 $y^2=8x=4\cdot 2\cdot x$ 의 초점을 F라고 하면

$$F(2, 0), \text{준선의 방정식은 } x=-2 \text{이다.}$$

포물선 위의 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는

$\triangle ABC$ 의 무게중심 G가 포물선의 초점과 일치하므로 $G(2, 0)$

세 점 A, B, C의 x 좌표를 각각 x_1, x_2, x_3 이라고 하면

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=2 \quad \therefore x_1+x_2+x_3=6$$

[2단계] 오른쪽 그림과 같이 세

점 A, B, C에서 준선

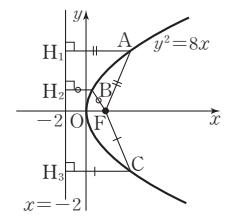
$x=-2$ 에 내린 수선의 발을

각각 H_1, H_2, H_3 이라고 하면

포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF}=\overline{AH_1}, \overline{BF}=\overline{BH_2},$$

$$\overline{CF}=\overline{CH_3}$$



$$\begin{aligned} & \therefore \overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} \\ & = \overline{AF} + \overline{BF} + \overline{CF} \\ & = \overline{AH_1} + \overline{BH_2} + \overline{CH_3} \\ & = (x_1+2) + (x_2+2) + (x_3+2) \\ & = (x_1+x_2+x_3) + 6 \\ & = 6+6=12 \end{aligned}$$

답 12

012

포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PP'}$, $\overline{QF} = \overline{QQ'}$

$$\therefore \overline{PQ} = \overline{PF} + \overline{QF} = \overline{PP'} + \overline{QQ'} = 10$$

이때 $\overline{PP'} // \overline{MM'} // \overline{QQ'}$ 이고 점 M은 선분 PQ의 중점이므로

$$\overline{MM'} = \frac{1}{2}(\overline{PP'} + \overline{QQ'}) = \frac{1}{2} \times 10 = 5$$

답 5

013

[1단계] 포물선 $y^2 = 8x$ 와 직선 $y = x + k$ 의 교점 A, B의 x 좌표를 각각 x_1, x_2 ($x_1 > x_2$)라고 하면 x_1, x_2 는 두 식을 연립한 이차방정식

$$(x+k)^2 = 8x, 즉 x^2 + 2(k-4)x + k^2 = 0$$

의 두 실근이다. 근과 계수의 관계에 의하여

$$x_1 + x_2 = -2(k-4) \quad \dots \textcircled{1}$$

[2단계] 포물선 $y^2 = 8x = 4 \cdot 2 \cdot x$ 의 초점의 좌표는 F(2, 0), 준선의 방정식은 $x = -2$ 이다. 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 준선 $x = -2$ 에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2 라고 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF} = \overline{AH_1}, \overline{BF} = \overline{BH_2}$$

$$\therefore \overline{AF} + \overline{BF} = \overline{AH_1} + \overline{BH_2}$$

$$= (x_1+2) + (x_2+2)$$

$$= (x_1 + x_2) + 4$$

$$= -2(k-4) + 4 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= -2k + 12$$

이때 $\overline{AF} + \overline{BF} = 10$ 이므로

$$-2k + 12 = 10, 2k = 2$$

$$\therefore k = 1$$

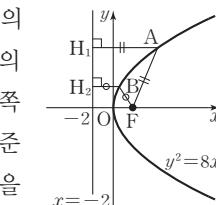
답 1

014

원 $x^2 + (y-4)^2 = 4$ 는 중심의

좌표가 (0, 4), 반지름의 길이

가 2인 원이다.

오른쪽 그림과 같이 이 원에 외접하고 동시에 x 축에 접하는

원의 중심을 C(x, y)라고 하면 원의 반지름의 길이는 y 이다.

이때 두 원의 중심 사이의 거리는 반지름의 길이의 합과 같으므로 $\sqrt{x^2 + (y-4)^2} = y+2$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 = 12(y-1)$$

$$\text{ 답 } x^2 = 12(y-1)$$

015

포물선 $y = \frac{1}{4}x^2$, 즉 $x^2 = 4y = 4 \cdot 1 \cdot y$ 의 초점의 좌표는

F(0, 1), 준선의 방정식은

 $y = -1$ 이다. 오른쪽 그림과 같이

점 F에서 선분 PH에 내린 수선

의 발을 Q라고 하면 $\triangle PFH$ 가 정삼각형이므로 점 Q는 \overline{PH} 를 이등분한다. 이때 $\overline{QH} = 2$ 이므로

$$\overline{PH} = 2\overline{QH} = 4$$

$$\therefore \triangle PFH = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}$$

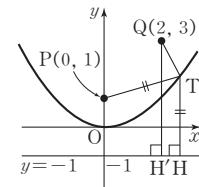
답 $4\sqrt{3}$

016

포물선 $x^2 = 4y = 4 \cdot 1 \cdot y$ 의 초점의 좌표는 P(0, 1), 준선의 방정식은 $y = -1$ 이므로 포물선 위의 점 T에 대하여 $\overline{PT} + \overline{QT}$ 가 최소가 되게 하는 점 T의 좌표를 구해야 한다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 T, Q에 서 준선 $y = -1$ 에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라고 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PT} = \overline{TH}$

$$\therefore \overline{PT} + \overline{QT} = \overline{TH} + \overline{QT} \geq \overline{QH}'$$



따라서 $\overline{PT} + \overline{QT}$ 가 최소가 되게 하는 점 T의 좌표는 포물선 $x^2 = 4y$ 위의 점 중 $x = 2$ 일 때이다.

$$x^2 = 4y \text{에 } x = 2 \text{를 대입하면}$$

$$4 = 4y \quad \therefore y = 1$$

따라서 하수처리장 T의 위치는 (2, 1)

답 (2, 1)

017

초점이 y 축 위에 있으므로 구하는 타원의 방정식을

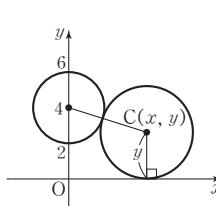
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b > a > 0) \text{이라고 하자.}$$

장축의 길이가 10이므로

$$2b = 10 \quad \therefore b = 5 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$c^2 = b^2 - a^2 \text{에서}$$

$$3^2 = 5^2 - a^2 \quad \therefore a^2 = 16 \quad \dots \textcircled{2}$$



⑦, ⑧을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 대입하면

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

⑨ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

018

타원 $3x^2 + y^2 = 12$, 즉

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1$$
에서

$c = \sqrt{12-4} = 2\sqrt{2}$ 이므로 초점의 좌표는 $(0, 2\sqrt{2})$, $(0, -2\sqrt{2})$

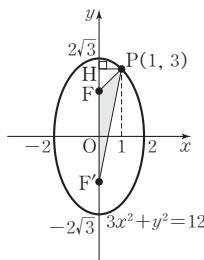
이때 $F(0, 2\sqrt{2})$, $F'(0, -2\sqrt{2})$

라고 하면 타원의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$$\therefore \triangle PFF' = \frac{1}{2} \times \overline{FF'} \times \overline{PH}$$

$$= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 1 = 2\sqrt{2}$$

⑩ $2\sqrt{2}$



019

오른쪽 그림과 같이 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하고 점 P에서 직선 $x=4$ 에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$$\overline{PF} : \overline{PH} = 1 : 2$$
이므로

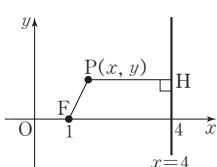
$$\overline{PH} = 2\overline{PF}$$

$$|x-4| = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

양변을 제곱하면

$$(x-4)^2 = 4(x-1)^2 + 4y^2$$

$$\therefore 3x^2 + 4y^2 = 12$$



⑪ $3x^2 + 4y^2 = 12$

020

타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 에서

$c = \sqrt{25-9} = 4$ 이므로 초점의

좌표는 $(4, 0)$, $(-4, 0)$

이때 $F(4, 0)$, $F'(-4, 0)$

이라고 하면 타원의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.

타원의 정의에 의하여

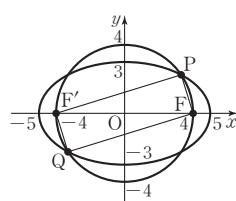
$$\overline{PF} + \overline{PF'} = \overline{QF} + \overline{QF'} = 2 \times 5 = 10$$

$\therefore (\square P'QF'의 둘레의 길이)$

$$= (\overline{PF} + \overline{PF'}) + (\overline{QF} + \overline{QF'})$$

$$= 10 + 10 = 20$$

⑫ 20



021

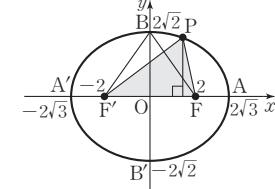
타원 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$ 에서

$c = \sqrt{12-8} = 2$ 이므로 초점

의 좌표는 $(2, 0)$, $(-2, 0)$

이때 $F(2, 0)$, $F'(-2, 0)$

이라고 하면 타원의 그래프는 오른쪽



그림과 같다. 타원 위의 점 P에 대하여 $\triangle PFF'$ 의 밑변 $\overline{FF'}$ 의 길이는 일정하므로 높이가 최대일 때 넓이가 최대가 된다. 즉, $\triangle PFF'$ 의 넓이가 최대가 되는 것은 점 P가 꼭짓점 B 또는 B'에 있을 때이다.

따라서 구하는 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times \overline{FF'} \times \overline{BO} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

⑬ $4\sqrt{2}$

022

타원 $3x^2 + 2y^2 - 12x + 4y - 4 = 0$ 에서

$$3(x-2)^2 + 2(y+1)^2 = 18$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{6} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1 \quad \dots \dots \quad ⑦$$

한편, 타원 $9x^2 + 6y^2 = m$ 에서

$$\frac{x^2}{\frac{m}{9}} + \frac{y^2}{\frac{m}{6}} = 1 \quad \dots \dots \quad ⑧$$

⑦, ⑧이 합동이라면 평행이동한 후 일치해야 하므로

$$6 = \frac{m}{9}, 9 = \frac{m}{6} \quad \therefore m = 54$$

$$m = 54$$
를 ⑧에 대입하면 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{9} = 1$

따라서 $c = \sqrt{9-6} = \sqrt{3}$ 이므로 구하는 초점의 좌표는

$$(0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3})$$

⑯ $(0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3})$

023

타원 $8x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 55 = 0$ 에서

$$8(x+1)^2 + 9(y-1)^2 = 72$$

$$\therefore \frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{8} = 1 \quad \dots \dots \quad ⑦$$

⑦은 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{이때 타원 } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1 \text{에서 } c = \sqrt{9-8} = 1 \text{이므로}$$

$$\text{초점 : } (1, 0), (-1, 0), \text{ 중심 : } (0, 0)$$

따라서 ⑦에서 초점 : $(0, 1), (-2, 1)$, 중심 : $(-1, 1)$ 이므로

$$\begin{aligned} a+b+c+d+e+f &= 0+1+(-2)+1+(-1)+1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

답 0

024

점 M은 \overline{AB} 의 중점, 점 P는 \overline{BM} 의 중점이므로 점 P는 \overline{AB} 를 3:1로 내분하는 점이다. 오른쪽 그림과 같이 바닥과 벽면을 각각 x축, y축으로 정하고 A(a, 0), B(0, b)라고 하자. P(x, y)라고 하면 점 P는 \overline{AB} 를 3:1로 내분하는 점이므로

$$x = \frac{3 \cdot 0 + 1 \cdot a}{3+1}, y = \frac{3 \cdot b + 1 \cdot 0}{3+1}$$

$$\therefore a = 4x, b = \frac{4}{3}y \quad \dots \textcircled{1}$$

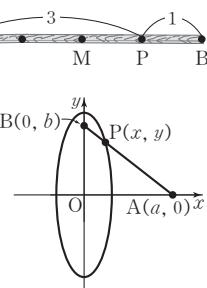
그런데 $\overline{AB} = 4$, 즉 $\overline{AB}^2 = 16$ 이므로 $a^2 + b^2 = 16$

①을 위의 식에 대입하면

$$16x^2 + \frac{16}{9}y^2 = 16 \quad \therefore x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$$

따라서 점 P가 그리는 도형은 타원 $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ 의 일부 이므로 이 타원의 장축의 길이는 $2 \times 3 = 6$

답 6



025

두 초점 F, F'에 대하여 $\overline{FF'}$ 의 중점이 타원의 중심이므로 $\overline{AF} = \overline{AF'} = 6$

따라서 타원 위의 한 점에서 두 초점에 이르는 거리의 합은 장축의 길이와 같으므로
(장축의 길이) = $\overline{AF} + \overline{AF'} = 12$

답 12

026

초점이 x축 위에 있으므로 구하는 타원의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0) \text{이라고 하자.}$$

장축과 단축의 길이의 차가 2이므로

$$2a - 2b = 2 \quad \therefore a - b = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \text{에서 } 3^2 = a^2 - b^2$$

$$\therefore (a+b)(a-b) = 9 \quad \dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면 $a+b=9$

따라서 장축과 단축의 길이의 합은

$$2a + 2b = 2(a+b) = 2 \times 9 = 18$$

답 18

027

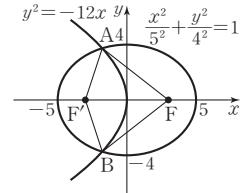
포물선 $y^2 = -12x = 4 \cdot (-3) \cdot x$ 의 초점을 F'이라고 하면 $F'(-3, 0)$

즉, 점 $F'(-3, 0)$ 이 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \quad (a > 4)$ 의 초점

$$\text{이므로 } (-3)^2 = a^2 - 4^2, a^2 = 25 \quad \therefore a = 5 \quad (\because a > 4)$$

따라서 타원 $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ 과

포물선 $y^2 = -12x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 두 점 A, B는 타원 위의 점이므로

$$\overline{AF} + \overline{AF'} = (\text{장축의 길이}) = 2 \times 5 = 10$$

$$\overline{BF} + \overline{BF'} = (\text{장축의 길이}) = 2 \times 5 = 10$$

$$\therefore (\square AF'BF \text{의 둘레의 길이})$$

$$= (\overline{AF} + \overline{AF'}) + (\overline{BF} + \overline{BF'})$$

$$= 10 + 10$$

= 20

답 20

028

오른쪽 그림과 같이 타원

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{에 내접하는 직}$$

사각형의 꼭짓점 중 제1사분면

위의 점의 좌표를 (a, b) 라고 하면 직사각형의 넓이는

$$2a \cdot 2b = 4ab \quad \dots \textcircled{1}$$

한편, 점 (a, b) 는 타원 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{25} + \frac{b^2}{9} = 1$$

이때 $a^2 > 0, b^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a^2}{25} + \frac{b^2}{9} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{25} \cdot \frac{b^2}{9}}$$

(단, 등호는 $\frac{a^2}{25} = \frac{b^2}{9}$ 일 때 성립)

$$1 \geq 2 \cdot \frac{ab}{15} \quad \therefore ab \leq \frac{15}{2}$$

따라서 ①에 의하여 $4ab \leq 30$ 이므로 구하는 넓이의 최댓값은 30이다.

답 30

029

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{10} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\neg. 5x^2 + 2y^2 = 10 \text{에서 } \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5} = 1$$

이 타원과 타원 ①의 장축의 길이가 다르므로 두 타원은 합동이 아니다.

$$\therefore 5x^2 + y^2 - 10x = 10 \text{에서 } 5(x-1)^2 + y^2 = 15$$

$$\therefore \frac{(x-1)^2}{3} + \frac{y^2}{15} = 1$$

이 타원은 타원 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{15} = 1$ 을 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. 이때 타원 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{15} = 1$ 과 타원 ⑦의 장축, 단축의 길이가 다르므로 두 타원은 합동이 아니다.

$$\therefore 5x^2 + y^2 - 10y + 15 = 0 \text{에서 } 5x^2 + (y-5)^2 = 10$$

$$\therefore \frac{x^2}{2} + \frac{(y-5)^2}{10} = 1$$

이 타원은 타원 ⑦을 y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이므로 두 타원은 합동이다.

따라서 타원 ⑦과 합동인 것은 ㄷ이다.

▣ ㄷ

030

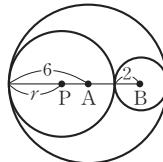
오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 r 인 원 P 가 원 A 와 내접하고 원 B 와 외접한다고 하면

$$\overline{AP} = 6-r, \overline{BP} = 2+r$$

$$\therefore \overline{AP} + \overline{BP} = 8$$

즉, 점 P 는 두 점 A, B 로부터의 거리의 합이 8로 일정한 점들의 집합이므로 점 P 의 자취는 초점이 A, B 이고 장축의 길이가 8인 타원이다.

▣ 8



031

오른쪽 그림과 같이 \overline{AQ} 의 중점 M 이라 하고 두 점 A, P 를 이으면

$$\triangle APM \equiv \triangle QPM$$

(SAS 합동)이므로

$$\overline{PA} = \overline{PQ}$$

$$\therefore \overline{OP} + \overline{PA} = \overline{OP} + \overline{PQ} = \overline{OQ} = 10$$

즉, 점 P 는 두 점 O, A 로부터의 거리의 합이 10으로 일정한 점이므로 점 P 의 자취는 초점이 O, A 이고 장축의 길이가 10인 타원이다.

이때 $P(x, y)$ 라고 하면 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PO} + \overline{PA} = 10$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-6)^2 + y^2} = 10$$

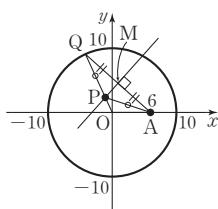
$$\sqrt{(x-6)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$5\sqrt{x^2 + y^2} = 3x + 16$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$16(x-3)^2 + 25y^2 = 400$$



$$\therefore \frac{(x-3)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \boxed{\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$$

032

점 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{10}$ 은 타원 위의 점이고 두 점 F, F' 이 타원의 초점이므로

$$\overline{P_1F} + \overline{P_1F'} = (\text{장축의 길이}) = \overline{AB} = 10^6(\text{km})$$

$$\overline{P_2F} + \overline{P_2F'} = (\text{장축의 길이}) = \overline{AB} = 10^6(\text{km})$$

$$\overline{P_3F} + \overline{P_3F'} = (\text{장축의 길이}) = \overline{AB} = 10^6(\text{km})$$

⋮

$$\overline{P_{10}F} + \overline{P_{10}F'} = (\text{장축의 길이}) = \overline{AB} = 10^6(\text{km})$$

위의 식을 모두 변끼리 더하면

$$\sum_{k=1}^{10} (\overline{P_kF} + \overline{P_kF'}) = 10 \times 10^6(\text{km})$$

$$\sum_{k=1}^{10} \overline{P_kF} + \sum_{k=1}^{10} \overline{P_kF'} = 10 \times 10^6(\text{km})$$

$$4 \times 10^6 + \sum_{k=1}^{10} \overline{P_kF'} = 10 \times 10^6(\text{km})$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^{10} \overline{P_kF'} = 6 \times 10^6(\text{km}) \text{이므로 } a=6$$

▣ 6

033

두 정점으로부터의 거리의 차가 일정한 점 P 의 자취는 그 두 정점을 초점으로 하는 쌍곡선이다.

즉, 두 점 $F(3, 0), F'(-3, 0)$ 이 쌍곡선의 초점이므로

$$\text{쌍곡선의 방정식을 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0) \text{이라고 하면}$$

꼭짓점의 좌표가 $(2, 0), (-2, 0)$ 이므로 $a=2$

초점의 좌표가 $(3, 0), (-3, 0)$ 이므로

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{에서 } 3^2 = 2^2 + b^2 \quad \therefore b^2 = 5$$

따라서 구하는 점 P 의 자취의 방정식은

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1}$$

034

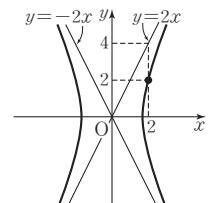
접근선의 방정식이 $y = \pm 2x$ 인 쌍곡선 중 제1사분면 위의 점 $(2, 2)$

를 지나는 쌍곡선은 오른쪽 그림과

같이 초점이 x 축 위에 있는 \circlearrowleft 꼴

이므로 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0) \text{이라고 하자.}$$



접근선의 방정식이 $y = \pm 2x$ 이므로

$$\frac{b}{a} = 2, b = 2a \quad \therefore b^2 = 4a^2$$

쌍곡선이 점 $(2, 2)$ 를 지나므로

$$\frac{2^2}{a^2} - \frac{2^2}{b^2} = 1 \quad \therefore a^2b^2 + 4a^2 - 4b^2 = 0 \quad \boxed{\dots \text{④}}$$

⑦을 ⑤에 대입하여 정리하면

$$4a^4 - 12a^2 = 0, 4a^2(a^2 - 3) = 0$$

$$\therefore a^2 = 3 (\because a > 0), b^2 = 12$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{12} = 1$ 이므로

주축의 길이는 $2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

■ $2\sqrt{3}$

035

$$\text{타원 } \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5} = 1 \text{에서 } c = \sqrt{5-2} = \sqrt{3} \text{이므로 초점의 좌표는 } (0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3})$$

구하는 쌍곡선이 이 타원과 두 초점을 공유하므로 쌍곡선의 초점의 좌표도 $(0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3})$ 이다.

초점이 y 축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 (a > 0, b > 0) \text{이라고 하면}$$

초점의 좌표가 $(0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3})$ 이므로

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{에서 } 3 = a^2 + b^2 \quad \therefore b^2 = 3 - a^2 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

쌍곡선이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$\frac{1}{a^2} - \frac{2^2}{b^2} = -1 \quad \therefore a^2b^2 - 4a^2 + b^2 = 0 \quad \dots \dots \textcircled{2}$$

⑦을 ⑤에 대입하여 정리하면

$$a^4 + 2a^2 - 3 = 0, (a^2 + 3)(a^2 - 1) = 0$$

$$\therefore a^2 = 1, b^2 = 2$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$x^2 - \frac{y^2}{2} = -1 \quad \blacksquare \quad x^2 - \frac{y^2}{2} = -1$$

036

$$\text{쌍곡선 } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1 \text{에서 } c = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5} \text{이므로}$$

초점의 좌표는 $(2\sqrt{5}, 0), (-2\sqrt{5}, 0)$

또, 점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{4}{2}x \quad \therefore y = \pm 2x$

이때 쌍곡선의 두 초점에서 점근선까지의 거리는 서로 같으므로 점 $(2\sqrt{5}, 0)$ 에서 직선 $2x - y = 0$ 까지의 거리는

$$\frac{|2 \times 2\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = 4 \quad \blacksquare 4$$

037

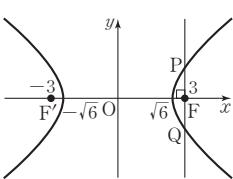
$$\text{쌍곡선 } \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1 \text{에서}$$

$$c = \sqrt{6+3} = 3 \text{이므로 초점의}$$

좌표는 $(3, 0), (-3, 0)$

즉, 두 점 P, Q는 x 좌표가 3

인 쌍곡선 위의 점이다.



$$\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1 \text{에 } x=3 \text{을 대입하면}$$

$$\frac{3^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1, y^2 = \frac{3}{2} \quad \therefore y = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는

$$P\left(3, \frac{\sqrt{6}}{2}\right), Q\left(3, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{6}$$

■ $\sqrt{6}$

038

주어진 쌍곡선의 방정식을 변형하면

$$3(x-1)^2 - (y+2)^2 = 3$$

$$\therefore (x-1)^2 - \frac{(y+2)^2}{3} = 1 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

⑦은 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 에서 $c = \sqrt{1+3} = 2$ 이므로 이 쌍곡선의 초점의 좌표는 $(2, 0), (-2, 0)$

따라서 ⑦의 초점의 좌표는

$$(3, -2), (-1, -2)$$

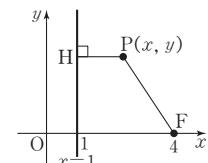
$$\therefore a = 3, b = -2, c = -1, d = -2$$

$$\text{또는 } a = -1, b = -2, c = 3, d = -2$$

$$\therefore |ad - bc| = |3 \cdot (-2) - (-2) \cdot (-1)| = 8 \quad \blacksquare 8$$

039

오른쪽 그림과 같이 점 P의 좌표를 (x, y) 라고 하고, 점 P에서 직선 $x=1$ 에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$$\overline{PF} : \overline{PH} = 2 : 1, \overline{PF} = 2\overline{PH}$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 2|x-1|$$

양변을 제곱하면

$$(x-4)^2 + y^2 = 4(x-1)^2$$

$$\therefore \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

$$\blacksquare \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

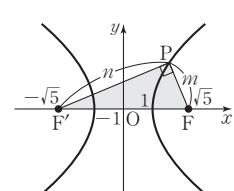
040

$$\text{쌍곡선 } x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \text{에서}$$

$c = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ 이므로 초점의 좌표는 $(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$

이때 $F(\sqrt{5}, 0), F'(-\sqrt{5}, 0)$

이라고 하면 쌍곡선의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\angle FPF' = 90^\circ$ 를 만족하는 쌍곡선 위의 한 점 P에 대하여
 $\overline{PF} = m, \overline{PF'} = n$ 이라고 하면 쌍곡선의 정의에 의하여
 $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = |m - n| = 2 \times 1 = 2 \quad \dots \textcircled{1}$

또, $\triangle PFF'$ 은 $\angle FPF' = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로
 $\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 = \overline{FF'}^2$
 $m^2 + n^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20 \quad \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 제곱하면
 $m^2 - 2mn + n^2 = 4$

위의 식에 $\textcircled{2}$ 을 대입하면
 $20 - 2mn = 4 \quad \therefore mn = 8$

$$\therefore \triangle PFF' = \frac{1}{2}mn = 4 \quad \text{■ 4}$$

041

쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 에서 $c = \sqrt{9+16} = 5$ 이므로 초점은
 $F(5, 0), F'(-5, 0)$

또, 두 점 P, Q가 원점에 대하여 대칭이므로

$$Q(-a, -b)$$

이때 $\square F'QFP$ 의 넓이가 40 이므로

$$\triangle PFF' + \triangle QFF' = 40, 2\triangle PFF' = 40$$

즉, $\triangle PFF' = 20$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{FF'} \times b = 20, \frac{1}{2} \times 10 \times b = 20 \quad \therefore b = 4$$

한편, 점 P(a, 4)가 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{9} - \frac{4^2}{16} = 1, a^2 = 18$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 18 + 4^2 = 34 \quad \text{■ 34}$$

042

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 꼭짓점의 좌표는

$$(a, 0), (-a, 0)$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 의 꼭짓점의 좌표는

$$(0, b), (0, -b)$$

위의 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형은 마름모이고 한 변의 길이는

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

이 사각형의 둘레의 길이가 20 이므로

$$4\sqrt{a^2 + b^2} = 20 \quad \therefore a^2 + b^2 = 25 \quad \dots \textcircled{1}$$

이때 점근선의 방정식이 $y = \pm \frac{1}{2}x$ 이고

$$a > 0, b > 0 \text{이므로 } \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \quad \therefore a = 2b$$

즉, $a = 2b$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면

$$5b^2 = 25, b^2 = 5$$

$$\therefore b = \sqrt{5}, a = 2\sqrt{5}$$

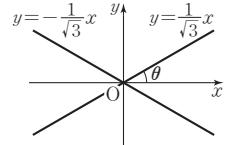
$$\text{■ } a = 2\sqrt{5}, b = \sqrt{5}$$

043

쌍곡선 $x^2 - 3y^2 = 3$, 즉

$$\frac{x^2}{3} - y^2 = 1 \text{의 점근선의 방정식}$$

$$\text{식은 } y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}x$$



직선 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기

를 θ 라고 하면

$$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

따라서 두 점근선이 이루는 예각의 크기는

$$2\theta = 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \quad \text{■ } \frac{\pi}{3}$$

044

쌍곡선 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ 에서 $c = \sqrt{5+4} = 3$ 이므로 쌍곡선의

초점의 좌표는 $(3, 0), (-3, 0)$

또, 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}x \quad \therefore 2x \pm \sqrt{5}y = 0$$

이때 쌍곡선의 한 초점 $(3, 0)$ 을 중심으로 하고 점근선

$2x - \sqrt{5}y = 0$ 에 접하는 원의 반지름의 길이는 점 $(3, 0)$ 에서 직선 $2x - \sqrt{5}y = 0$ 까지의 거리와 같으므로

$$(\text{반지름의 길이}) = \frac{|2 \times 3|}{\sqrt{2^2 + (-\sqrt{5})^2}} = 2$$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\pi \times 2^2 = 4\pi$

$$\text{■ } 4\pi$$

045

$F(1, 0), F'(-1, 0), P(1, 1)$ 이므로

$$\overline{PF} = 1, \overline{PF'} = \sqrt{5}$$

두 점 F, F'이 타원의 초점이고 점 P는 타원 위의 점이므로 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = (\text{장축의 길이}) = 2\overline{OB}$$

$$\therefore \overline{OB} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

또, 두 점 F, F'이 쌍곡선의 초점이고 점 P는 쌍곡선 위의 점이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$$|\overline{PF'} - \overline{PF}| = (\text{주축의 길이}) = 2\overline{OA}$$

$$\therefore \overline{OA} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 1 \quad \text{■ } 1$$

046

쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{18} = 1$ 에서 $c = \sqrt{9+18} = 3\sqrt{3}$ 이므로 초

점은 $F(3\sqrt{3}, 0), F'(-3\sqrt{3}, 0)$

또, 쌍곡선 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{PF} : \overline{PF'} = 1 : 3$ 이므로 $\overline{PF'} = 3\overline{PF}$

이때 쌍곡선의 정의에 의하여

$$|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 2 \times 3 = 6, 2\overline{PF} = 6$$

$$\therefore \overline{PF} = 3, \overline{PF'} = 9$$

$$\therefore (\Delta PFF' \text{의 둘레의 길이}) = \overline{PF} + \overline{PF'} + \overline{FF'}$$

$$= 3 + 9 + 6\sqrt{3} = 12 + 6\sqrt{3}$$

$$\blacksquare 12 + 6\sqrt{3}$$

047

\overline{PA} 는 점 $P(x, y)$ 에서 직선 $2x - y = 0$ 까지의 거리와 같으므로

$$\overline{PA} = \frac{|2x - y|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|2x - y|}{\sqrt{5}}$$

또, \overline{PB} 는 점 $P(x, y)$ 에서 직선 $2x + y = 0$ 까지의 거리와 같으므로

$$\overline{PB} = \frac{|2x + y|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|2x + y|}{\sqrt{5}}$$

이때 $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = 2$ 가 성립하므로

$$\frac{|2x - y|}{\sqrt{5}} \cdot \frac{|2x + y|}{\sqrt{5}} = 2$$

$$|4x^2 - y^2| = 10 \quad \therefore 4x^2 - y^2 = \pm 10$$

$$\blacksquare 4x^2 - y^2 = 10 \text{ 또는 } 4x^2 - y^2 = -10$$

048

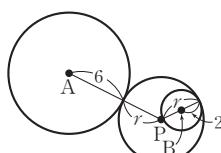
중심이 P인 원의 반지름의 길이를 r 라고 하자.

(i) 원 A는 외접하고 원 B는 내

접하는 원의 중심이 P일 때,
오른쪽 그림과 같으므로

$$\overline{AP} = r + 6, \overline{BP} = r - 2$$

$$\therefore \overline{AP} - \overline{BP} = 8$$

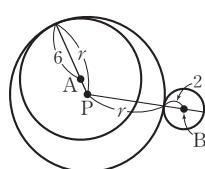


(ii) 원 B는 외접하고 원 A는 내

접하는 원의 중심이 P일 때,
오른쪽 그림과 같으므로

$$\overline{AP} = r - 6, \overline{BP} = r + 2$$

$$\therefore \overline{BP} - \overline{AP} = 8$$



$$(i), (ii)에서 |\overline{AP} - \overline{BP}| = 8$$

따라서 점 P에서 두 점 A, B에 이르는 거리의 차가 8로 일정하므로 점 P의 자취는 초점이 A, B인 쌍곡선이고 주축의 길이는 8이다.

$$\blacksquare 8$$

2 평면곡선의 접선

049

$x^2 + ay^2 + b = 0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(ay^2) + \frac{d}{dx}(b) = 0$$

$$2x + 2ay \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{ay} \quad (y \neq 0)$$

점 (4, 1)에서 $\frac{dy}{dx}$ 의 값이 1이므로

$$1 = -\frac{4}{a} \quad \therefore a = -4$$

점 (4, 1)이 곡선 $x^2 + ay^2 + b = 0$ 위의 점이므로

$$4^2 + a + b = 0 \quad \therefore b = -a - 16 = -12$$

$$\therefore ab = (-4) \times (-12) = 48$$

$$\blacksquare 48$$

050

$\sqrt{x} + \sqrt{2y} = 3$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) + \frac{d}{dx}(\sqrt{2y}) = \frac{d}{dx}(3)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{2\sqrt{2y}} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{2y}}{2\sqrt{x}} \quad (x \neq 0)$$

즉, 곡선 $\sqrt{x} + \sqrt{2y} = 3$ 위의 점 (1, 2)에서의 접선의 기

$$\text{율기는 } \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{2} = -1$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - 2 = -(x - 1) \quad \therefore y = -x + 3 \quad \blacksquare y = -x + 3$$

051

타원 $2x^2 + 3y^2 = 14$ 위의 점 (1, -2)에서의 접선의 방정식은 x^2 대신 x, y^2 대신 $-2y$ 를 대입하면

$$2x + 3 \cdot (-2y) = 14 \quad \therefore x - 3y = 7$$

이 접선이 점 (a, -1)을 지나므로

$$a + 3 = 7 \quad \therefore a = 4$$

$$\blacksquare 4$$

052

쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정

식은 x^2 대신 ax, y^2 대신 by 를 대입하면

$$\frac{ax}{2} - by = 1 \quad \therefore y = \frac{a}{2b}x - \frac{1}{b}$$

이 접선의 기울기가 1이므로

$$\frac{a}{2b} = 1 \quad \therefore a = 2b \quad \cdots \cdots \blacksquare$$

점 (a, b) 는 쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{2} - b^2 = 1 \quad \cdots \cdots \blacksquare$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \frac{4b^2}{2} - b^2 = 1, b^2 = 1$$

$$\text{이것을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } a^2 = 4b^2 = 4$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 4 + 1 = 5$$

답 5

참고 음함수의 미분법을 이용한다.

$$\frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$x - 2y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y} \quad (y \neq 0)$$

이때 쌍곡선 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 기울기가 1이

$$\text{므로 } \frac{a}{2b} = 1 \quad \therefore a = 2b$$

053

직선 $y=2x$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y = 2(x-a), \text{ 즉 } y = 2x - 2a \quad \dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 은 포물선 $x^2 = 4y$ 에 접하고 기울기가 2인 직선이다.

포물선 $x^2 = 4y$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$x^2 \text{ 대신 } x_1x, y \text{ 대신 } \frac{y+y_1}{2} \text{ 을 대입하면}$$

$$x_1x = 4 \cdot \frac{y+y_1}{2} \quad \therefore y = \frac{x_1}{2}x - y_1$$

$$\text{이 접선의 기울기가 } 2 \text{이므로 } \frac{x_1}{2} = 2 \quad \therefore x_1 = 4$$

점 $(4, y_1)$ 은 포물선 $x^2 = 4y$ 위의 점이므로

$$4^2 = 4y_1 \quad \therefore y_1 = 4$$

따라서 접선의 방정식은 $y = 2x - 4$ 이고 이 직선이 $\textcircled{1}$ 과 일치하므로

$$-2a = -4 \quad \therefore a = 2$$

답 2

054

포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$x \text{ 대신 } \frac{x+x_1}{2}, y^2 \text{ 대신 } y_1y \text{ 를 대입하면}$$

$$y_1y = 4 \cdot \frac{x+x_1}{2} \quad \therefore y = \frac{2}{y_1}x + \frac{2x_1}{y_1}$$

이 접선의 기울기가 -1 이어야 하므로

$$\frac{2}{y_1} = -1 \quad \therefore y_1 = -2$$

점 $(x_1, -2)$ 는 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점이므로

$$(-2)^2 = 4x_1 \quad \therefore x_1 = 1$$

즉, 기울기가 -1 이고 포물선에 접하는 접선의 방정식은
 $y = -x - 1$

따라서 구하는 최솟값은 직선 $y = -x - 1$ 위의 점

$(0, -1)$ 과 직선 $x + y + 2 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-1+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \blacksquare \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$$

055

쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은 x^2 대신 ax , y^2 대신 by 를 대입하면

$$ax - by = 1$$

이 접선이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$a \cdot 0 - b \cdot 1 = 1 \quad \therefore b = -1$$

점 $(a, -1)$ 이 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$ 위의 점이므로

$$a^2 - (-1)^2 = 1, a^2 = 2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 2 + (-1)^2 = 3$$

답 3

056

$$x = t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3} \text{에서 } \frac{dx}{dt} = 2t - \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{3}t^2 + at + 1 \text{에서 } \frac{dy}{dt} = \frac{2}{3}t + a$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2}{3}t + a}{2t - \frac{1}{2}}$$

$t = 1$ 인 점에서의 접선의 기울기가 10이므로

$$\frac{\frac{2}{3} + a}{2 - \frac{1}{2}} = 10, \frac{2}{3} + a = 15 \quad \therefore a = \frac{43}{3} \quad \blacksquare \quad \frac{43}{3}$$

057

$$x = 4 \cos \theta \text{에서 } \frac{dx}{d\theta} = -4 \sin \theta$$

$$y = 3 \sin \theta \text{에서 } \frac{dy}{d\theta} = 3 \cos \theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3 \cos \theta}{-4 \sin \theta} = -\frac{3}{4} \cot \theta$$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ 인 점에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{3}{4} \cot \frac{\pi}{6} = -\frac{3}{4} \times \sqrt{3} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ 일 때, $x = 4 \cos \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}$, $y = 3 \sin \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$ 이므로

접점의 좌표는 $\left(2\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$

따라서 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 인 점에서의 접선의 방정식은

$$y - \frac{3}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}(x - 2\sqrt{3}) \quad \therefore y = -\frac{3\sqrt{3}}{4}x + 6$$

그러므로 접선의 y 절편은 6이다.

▣ 6

058

$x^2 + \frac{2x}{y} - 3 = 0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{y}\right) - \frac{d}{dx}(3) = 0$$

$$2x + \frac{2}{y} + \frac{-2x}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y^2 + \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

즉, 곡선 $x^2 + \frac{2x}{y} - 3 = 0$ 위의 점 $(3, -1)$ 에서의 접선

의 기울기는 $(-1)^2 + \frac{-1}{3} = \frac{2}{3}$ 이므로 접선의 방정식은

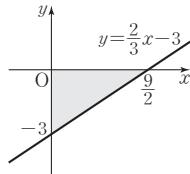
$$y - (-1) = \frac{2}{3}(x - 3) \quad \therefore y = \frac{2}{3}x - 3$$

따라서 접선은 오른쪽 그림과 같으

므로

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times 3 = \frac{27}{4}$$

$$\therefore 4S = 27$$



▣ 27

059

포물선 $y^2 = 12x$ 위의 점 $\left(\frac{a^2}{12}, a\right)$ 에서의 접선의 방정식

은 x 대신 $\frac{x+a^2}{2}$, y^2 대신 ay 를 대입하면

$$ay = 12 \cdot \frac{x+a^2}{2} \quad \therefore y = \frac{6}{a}x + \frac{a}{2}$$

따라서 접선의 기울기는 $\frac{6}{a}$ 이므로 $\frac{6}{a}$ 이 자연수가 되도록

하는 0이 아닌 정수 a 는 1, 2, 3, 6의 4개이다.

▣ 4개

다른풀이 음함수의 미분법을 이용한다.

$y^2 = 12x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(12x), 2y \frac{dy}{dx} = 12$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{6}{y} \quad (y \neq 0)$$

즉, 포물선 $y^2 = 12x$ 위의 점 $\left(\frac{a^2}{12}, a\right)$ 에서의 접선의 기

울기는 $\frac{6}{a}$ 이다.

따라서 $\frac{6}{a}$ 이 자연수가 되도록 하는 0이 아닌 정수 a 는 1, 2, 3, 6의 4개이다.

060

타원 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$ 위의

점 P(-3, 2)에서의 접선의 방

정식은 x^2 대신 $-3x$, y^2 대신 $2y$

를 대입하면

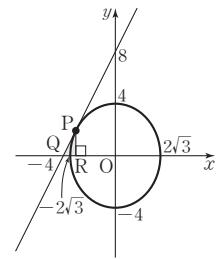
$$\frac{-3x}{12} + \frac{2y}{16} = 1$$

$$\therefore y = 2x + 8$$

이때 Q(-4, 0), R(-3, 0)이므로 위의 그림에서

$$\triangle PQR = \frac{1}{2} \times \overline{QR} \times \overline{PR}$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$$



▣ 1

061

포물선 $y^2 = 2x$ 위의 점 P(a, b)에서의 접선의 방정식은

$$by = 2 \cdot \frac{x+a}{2} \quad \therefore y = \frac{1}{b}x + \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$$

포물선 $y^2 = 2x$ 위의 점 Q(2, 2)에서의 접선의 방정식은

$$2y = 2 \cdot \frac{x+2}{2} \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + 1$$

두 점 P, Q에서의 접선이 서로 수직이므로

$$\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{2} = -1 \quad \therefore b = -\frac{1}{2}$$

점 P(a, -1/2)이 포물선 $y^2 = 2x$ 위의 점이므로

$$\frac{1}{4} = 2a \quad \therefore a = \frac{1}{8}$$

$$\therefore ab = -\frac{1}{16}$$

▣ -1/16

062

쌍곡선 $x^2 - y^2 = 4$ 위의 점 A(3, $\sqrt{5}$)에서의 접선의 방정식은 x^2 대신 $3x$, y^2 대신 $\sqrt{5}y$ 를 대입하면

$$3x - \sqrt{5}y = 4 \quad \therefore y = \frac{3}{\sqrt{5}}x - \frac{4}{\sqrt{5}} \quad \dots \dots \textcircled{①}$$

$$\therefore P\left(0, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

한편, ①과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ 이므로

점 A(3, $\sqrt{5}$)를 지나고 기울기가 $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y - \sqrt{5} = -\frac{\sqrt{5}}{3}(x - 3) \quad \therefore y = -\frac{\sqrt{5}}{3}x + 2\sqrt{5}$$

$$\therefore Q(0, 2\sqrt{5})$$

$$\therefore \overline{PQ} = 2\sqrt{5} - \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}\right) = \frac{14\sqrt{5}}{5}$$

▣ 14\sqrt{5}/5

063

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+3h) - f(3)}{h} = 3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+3h) - f(3)}{3h}$$

$$= 3f'(3) \quad \dots \textcircled{①}$$

$$x = t^2 + 2t \text{에서 } \frac{dx}{dt} = 2t + 2$$

$$y = t^3 + 1 \text{에서 } \frac{dy}{dt} = 3t^2$$

$$\therefore f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2}{2t+2} \quad \dots \textcircled{②}$$

한편, $x=3$ 일 때의 t 의 값을 구하면

$$t^2 + 2t = 3 \text{에서 } t^2 + 2t - 3 = 0, (t+3)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = 1 (\because t > 0)$$

따라서 ①, ②에 의하여

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+3h) - f(3)}{h} = 3f'(3) = 3 \cdot \frac{3 \cdot 1^2}{2 \cdot 1 + 2} = \frac{9}{4}$$

답 $\frac{9}{4}$

064

$$x = t^2 + t^4 + t^6 + \cdots + t^{2n} \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 4t^3 + 6t^5 + \cdots + 2nt^{2n-1}$$

$$y = t + t^3 + t^5 + \cdots + t^{2n-1} \text{에서}$$

$$\frac{dy}{dt} = 1 + 3t^2 + 5t^4 + \cdots + (2n-1)t^{2n-2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 + 3t^2 + 5t^4 + \cdots + (2n-1)t^{2n-2}}{2t + 4t^3 + 6t^5 + \cdots + 2nt^{2n-1}}$$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{dy}{dx} &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1 + 3t^2 + 5t^4 + \cdots + (2n-1)t^{2n-2}}{2t + 4t^3 + 6t^5 + \cdots + 2nt^{2n-1}} \\ &= \frac{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)}{2 + 4 + 6 + \cdots + 2n} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n (2k-1)}{\sum_{k=1}^n 2k} = \frac{2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n}{2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}} \\ &= \frac{n^2}{n^2 + n} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{t \rightarrow 1} \frac{dy}{dx} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

답 1

II. 평면벡터

1 벡터의 연산

065

정육각형의 한 내각의 크기는 120°

이므로 오른쪽 그림과 같이 점 F에서 \overline{AE} 에 내린 수선의 빌을 H라고 하면

$$\overline{AH} = \overline{AF} \cos 30^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

즉, $\overline{AE} = 2\overline{AH} = 2\sqrt{3}$ 이므로

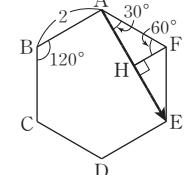
$$|\overline{AE}| = \overline{AE} = 2\sqrt{3}$$

이때 $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CA} = \overline{DB} = \overline{EC} = \overline{FD}$ 이므로 벡터

\overline{AE} 와 크기가 같은 벡터는

$\overline{EA}, \overline{BF}, \overline{FB}, \overline{CA}, \overline{AC}, \overline{DB}, \overline{BD}, \overline{EC}, \overline{CE}, \overline{FD}, \overline{DF}$ 의 11개이다.

답 ⑤



066

$$\begin{aligned} ① \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{BD} + \overline{CB} + \overline{DC} \\ = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CB} + \overline{BD} + \overline{DC} \\ = \overline{AC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ② \overline{AC} - \overline{AE} - \overline{BC} + \overline{BD} + \overline{DE} \\ = \overline{AC} + \overline{EA} + \overline{CB} + \overline{BD} + \overline{DE} \\ = \overline{AC} + \overline{CB} + \overline{BD} + \overline{DE} + \overline{EA} \\ = \overline{AA} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ③ \overline{AC} - \overline{BC} + \overline{BE} - \overline{CD} - \overline{DC} \\ = \overline{AC} + \overline{CB} + \overline{BE} + \overline{DC} + \overline{CD} \\ = \overline{AC} + \overline{CB} + \overline{BE} + \vec{0} \\ = \overline{AE} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ④ \overline{AE} + \overline{BE} - \overline{BC} - \overline{CE} + \overline{EB} \\ = \overline{AE} + \overline{BE} + \overline{CB} + \overline{EC} + \overline{EB} \\ = \overline{AE} + \overline{EB} + \overline{BE} + \overline{EC} + \overline{CB} \\ = \overline{AB} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ⑤ \overline{AD} - \overline{BC} - \overline{CD} - \overline{CE} - \overline{EB} \\ = \overline{AD} + \overline{CB} + \overline{DC} + \overline{EC} + \overline{BE} \\ = \overline{AD} + \overline{DC} + \overline{CB} + \overline{BE} + \overline{EC} \\ = \overline{AC} \end{aligned}$$

따라서 \overline{AE} 와 항상 같은 벡터는 ③이다.

답 ③

067

$$\overrightarrow{x} - 2\overrightarrow{y} = \vec{a} \quad \dots \textcircled{①}$$

$$3\overrightarrow{x} + 2\overrightarrow{y} = 2\vec{b} \quad \dots \textcircled{②}$$

$$\textcircled{①} + \textcircled{②} \text{ 을 하면 } 4\overrightarrow{x} = \vec{a} + 2\vec{b} \quad \therefore \overrightarrow{x} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\begin{aligned} \text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } & \left(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right) - 2\vec{y} = \vec{a} \\ 2\vec{y} &= -\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \quad \therefore \vec{y} = -\frac{3}{8}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} \\ \therefore \vec{x} + 2\vec{y} &= \left(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right) + 2\left(-\frac{3}{8}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} \right) \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} \end{aligned}$$

따라서 $m = -\frac{1}{2}$, $n = 1$ 이므로

$$2m + n = 0$$

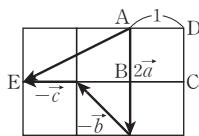
답 0

068

$$\begin{aligned} (1) \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} &= (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b} = \vec{b} + \vec{b} = 2\vec{b} \\ \therefore |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| &= |2\vec{b}| = 2|\vec{AC}| = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

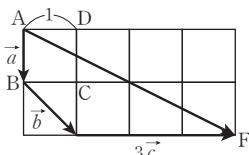
(2) 오른쪽 그림에서

$$\begin{aligned} 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} &= \vec{AE} \\ \therefore |2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}| &= |\vec{AE}| \\ &= |\vec{AE}| \\ &= \sqrt{1^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$



(3) 오른쪽 그림에서

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c} &= \vec{AF} \\ \therefore |\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c}| &= |\vec{AF}| \\ &= |\vec{AF}| \\ &= \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$



답 (1) $2\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{5}$ (3) $2\sqrt{5}$

069

$$(m^2+1)\vec{a} - (2m+3)\vec{b} = (4m-3)\vec{a} + (n-4)\vec{b} \text{에서}$$

$$m^2+1=4m-3 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$-(2m+3)=n-4 \quad \dots \textcircled{2}$$

①에서 $m^2-4m+4=0$

$$(m-2)^2=0 \quad \therefore m=2$$

$m=2$ 를 ②에 대입하면

$$-7=n-4 \quad \therefore n=-3$$

답 $m=2$, $n=-3$

070

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$$\vec{AB}=k\vec{AC} \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)}$$

$\vec{OB}-\vec{OA}=k(\vec{OC}-\vec{OA})$ 이므로

$$m\vec{a} - (\vec{a} - 2\vec{b}) = k((-\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{a} - 2\vec{b}))$$

$$(m-1)\vec{a} + 2\vec{b} = -3\vec{a} + 3\vec{b} \text{에서}$$

$$m-1 = -3, 2 = 3k$$

$$\therefore k = \frac{2}{3}, m = -1$$

답 -1

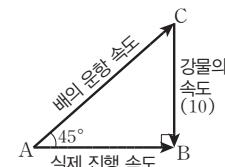
071

배가 정지된 물에서 움직인다고 가정할 때 도착하는 반대쪽 지점 을 C라고 하면

$$\vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}, \text{ 즉}$$

(배의 운항 속도) + (강물의 속도)

= (실제 진행 속도)이므로 오른쪽 그림과 같다.



이때 $|\vec{CB}| = \vec{BC} = 10$, $\angle CAB = 45^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$

이므로

$$(\text{배의 운항 속력}) = |\vec{AC}| = \vec{AC} = 10\sqrt{2} \text{ (km/시)}$$

$$(\text{실제 진행 속력}) = |\vec{AB}| = \vec{AB} = 10 \text{ (km/시)}$$

답 v : 시속 $10\sqrt{2}$ km, V : 시속 10 km

072

$$\vec{PA} + \vec{PC} = \vec{PB} + \vec{PD} \text{에서}$$

$$\vec{PA} - \vec{PB} = \vec{PD} - \vec{PC} \quad \therefore \vec{BA} = \vec{CD}$$

즉, \vec{BA} , \vec{CD} 는 서로 같으므로 사각형 ABCD에서 두 변 BA, CD의 길이가 같고 평행하다.

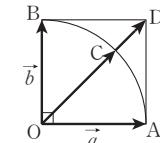
따라서 사각형 ABCD는 평행사변형이다. 답 평행사변형

073

오른쪽 그림과 같이 정사각형 OADB 를 그리면

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$$

또, 세 점 O, C, D는 한 직선 위에 있고 $|\vec{OC}| = 1$, $|\vec{OD}| = \sqrt{2}$ 이므로



$$\vec{OC} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{OD} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{a} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{b}$$

따라서 $m=n=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$$100mn=50$$

답 50

074

$$\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE}$$

$$= (\vec{OB} - \vec{OA}) + (\vec{OC} - \vec{OA}) + (\vec{OD} - \vec{OA}) + (\vec{OE} - \vec{OA})$$

$$= (\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE}) - 4\vec{OA}$$

$$= (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE}) - 5\vec{OA}$$

이때 $\vec{OA} = \vec{OB} = \vec{OC} = \vec{OD} = \vec{OE}$ 이므로

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} = \vec{0}$$

$$\therefore |\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE}| = |-5\vec{OA}|$$

$$= 5|\vec{OA}| = 100$$

따라서 $|\vec{OA}| = \vec{OA} = 20$ 이므로 원 O의 넓이는

$$\pi \times 20^2 = 400\pi$$

답 400π

075

오른쪽 그림과 같이 \vec{a}, \vec{b} 를 정

하면

$$\overrightarrow{AB} = -\vec{a} - 2\vec{b},$$

$$\overrightarrow{AC} = 3\vec{a} - 2\vec{b},$$

$$\overrightarrow{AD} = 4\vec{a} + \vec{b}$$

이때 $\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ 이므로

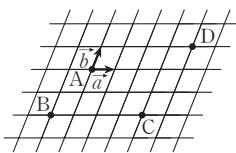
$$4\vec{a} + \vec{b} = m(-\vec{a} - 2\vec{b}) + n(3\vec{a} - 2\vec{b}) \\ = (-m + 3n)\vec{a} + (-2m - 2n)\vec{b}$$

\vec{a}, \vec{b} 는 서로 평행하지 않으므로

$$4 = -m + 3n, 1 = -2m - 2n$$

두 식을 연립하여 풀면

$$m = -\frac{11}{8}, n = \frac{7}{8} \quad \therefore m+n = -\frac{1}{2} \quad \text{답 } -\frac{1}{2}$$



076

$$\vec{x} - 3\vec{b} = -\vec{a} + \vec{b} \text{에서 } \vec{x} = -\vec{a} + 4\vec{b}$$

$\vec{x} = -\vec{a} + 4\vec{b}$ 를 $\vec{x} + \vec{y} = m(\vec{a} + 2\vec{b}) + 3\vec{b}$ 에 대입하면

$$(-\vec{a} + 4\vec{b}) + \vec{y} = m(\vec{a} + 2\vec{b}) + 3\vec{b}$$

$$\therefore \vec{y} = (m+1)\vec{a} + (2m-1)\vec{b}$$

이때 두 벡터 \vec{x}, \vec{y} 가 서로 평행하므로

$$\vec{y} = k\vec{x} \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)}$$

즉, $(m+1)\vec{a} + (2m-1)\vec{b} = -k\vec{a} + 4k\vec{b}$ 에서

$$m+1 = -k, 2m-1 = 4k$$

두 식을 연립하여 풀면

$$k = -\frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2} \quad \text{답 } -\frac{1}{2}$$

077

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$ 라고 하면

$$\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PB} = 1 : 2 \text{이므로 } \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{AQ} : \overrightarrow{QC} = 3 : 2 \text{이므로 } \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{5}\vec{b}$$

세 점 C, R, P가 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{CR} = k\overrightarrow{CP} \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)}$$

즉, $\overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AC} = k(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC})$ 이므로

$$\overrightarrow{AR} - \vec{b} = k\left(\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}\right)$$

$$\therefore \overrightarrow{AR} = \frac{k}{3}\vec{a} + (1-k)\vec{b} \quad \dots \text{⑦}$$

또, 세 점 B, R, Q가 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{BR} = l\overrightarrow{BQ} \text{ (단, } l \text{은 } 0 \text{이 아닌 실수)}$$

즉, $\overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AB} = l(\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AB})$ 이므로

$$\overrightarrow{AR} - \vec{a} = l\left(\frac{3}{5}\vec{b} - \vec{a}\right)$$

$$\therefore \overrightarrow{AR} = (1-l)\vec{a} + \frac{3l}{5}\vec{b} \quad \dots \text{⑧}$$

$$\text{⑦} = \text{⑧} \text{이므로 } \frac{k}{3} = 1-l, 1-k = \frac{3l}{5}$$

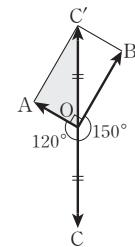
$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } k = \frac{1}{2}, l = \frac{5}{6}$$

따라서 ⑦ 또는 ⑧에서 $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ 이므로

$$m = \frac{1}{6}, n = \frac{1}{2} \quad \therefore m+n = \frac{2}{3} \quad \text{답 } \frac{2}{3}$$

078

오른쪽 그림에서 지점 O를 중심으로 세 지점 A, B, C의 방향으로 작용하는 힘의 합이 0이므로 세 벡터 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 에 대하여



$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

$$-\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC}$$

$$\angle AOC = 120^\circ, \angle BOC = 150^\circ \text{에서}$$

$$\angle AOB = 90^\circ \text{이므로 } \square AOBC' \text{은 직사각형이다.}$$

$$\angle AOC = 120^\circ \text{이므로 } \angle AOC' = 60^\circ$$

$$\therefore |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OC'}| \cos 60^\circ = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

따라서 끈 OA에 가해지는 힘은 5kg중이다. 답 5kg중

2 평면벡터의 성분과 내적

079

선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점 P의 위치벡터는

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2\vec{b} + 3\vec{a}}{2+3} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

선분 PC를 2 : 3으로 외분하는 점 Q의 위치벡터는

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{2\vec{c} - 3\overrightarrow{OP}}{2-3} = 3\overrightarrow{OP} - 2\vec{c}$$

$$= 3\left(\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\right) - 2\vec{c}$$

$$= \frac{9}{5}\vec{a} + \frac{6}{5}\vec{b} - 2\vec{c}$$

$$\quad \text{답 } \frac{9}{5}\vec{a} + \frac{6}{5}\vec{b} - 2\vec{c}$$

080

$$3\vec{a} + \vec{b} = 4\vec{p} \text{에서}$$

$$\vec{p} = \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{4} = \frac{\vec{b} + 3\vec{a}}{1+3}$$

따라서 점 P는 선분 AB를 1 : 3으로 내분하는 점이다.

답 선분 AB를 1 : 3으로 내분하는 점

081

선분 BC를 3 : 1로 내분하는 점 P의 위치벡터는

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}}{3+1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OC} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ 이므로 이를 \textcircled{1}에 대입하면

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$\therefore m = \frac{3}{4}, n = 1$$

$$\blacksquare m = \frac{3}{4}, n = 1$$

다른풀이 □OACB는 직사각형이고 $\overrightarrow{BP} : \overrightarrow{PC} = 3 : 1$ 이므로

$$\overrightarrow{BP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA}$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$\therefore m = \frac{3}{4}, n = 1$$

$$\blacksquare m = \frac{3}{4}, n = 1$$

082

두 선분 AB, AC의 중점이 각각 M, N이므로

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{2}, \overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}}{2}$$

점 G는 △ABC의 무게중심이므로

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} &= (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OG}) + (\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OG}) \\ &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} - 2\overrightarrow{OG} \\ &= \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{2} + \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}}{2} - 2 \cdot \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{3} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{a} - \frac{1}{6}\overrightarrow{b} - \frac{1}{6}\overrightarrow{c} \quad \blacksquare \frac{1}{3}\overrightarrow{a} - \frac{1}{6}\overrightarrow{b} - \frac{1}{6}\overrightarrow{c} \end{aligned}$$

083

삼각형의 내각의 이등분선의 성질에 의하여

$$\overrightarrow{BD} : \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} : \overrightarrow{AC} = 4 : 3$$

즉, 점 D는 선분 BC를 4 : 3으로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AD} = \frac{4\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB}}{4+3} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{따라서 } m = \frac{3}{7}, n = \frac{4}{7} \text{이므로 } mn = \frac{12}{49}$$

$$\blacksquare \frac{12}{49}$$

084

$$\vec{b} - \vec{c} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB} \text{이므로}$$

$$|\vec{b} - \vec{c}| = 20 \text{에서 } \overrightarrow{CB} = 20$$

$$\text{이때 } 5\vec{a} = 3\vec{b} + 2\vec{c} \text{에서 } \vec{a} = \frac{3\vec{b} + 2\vec{c}}{5} = \frac{3\vec{b} + 2\vec{c}}{3+2} \text{이므로}$$

점 A는 선분 CB를 3 : 2로 내분하는 점이다.

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CB} = \frac{2}{5} \times 20 = 8$$

$$\blacksquare 8$$

085

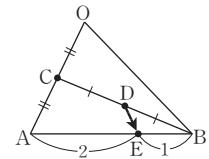
\overrightarrow{OA} 의 중점 C의 위치벡터는

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$$

\overrightarrow{BC} 의 중점 D의 위치벡터는

$$\overrightarrow{OD} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$$

$$= \frac{\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}}{2} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$



\overrightarrow{AB} 를 2 : 1로 내분하는 점 E의 위치벡터는

$$\overrightarrow{OE} = \frac{2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}}{2+1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} \right) - \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \right)$$

$$= \frac{1}{12}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} \right)$$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{OE}$$

$$\therefore m = \frac{1}{4}$$

$$\blacksquare \frac{1}{4}$$

086

$2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AB}$ 에서 좌변의 벡터가 모두 시점이 P인 벡터이므로 모든 벡터의 시점을 P로 통일하면

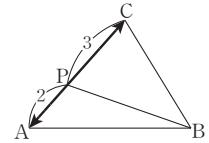
$$2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}$$

$$\therefore 3\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PC}$$

즉, 두 벡터 $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}$ 는 방향이 반대이고 크기의 비가 2 : 3이므로 점 P는 선분 AC를 2 : 3으로 내분하는 점이다.

따라서 오른쪽 그림과 같으므로

$$\begin{aligned} \triangle PAB : \triangle PBC &= \overrightarrow{PA} : \overrightarrow{PC} \\ &= 2 : 3 \end{aligned}$$



$$\blacksquare 2 : 3$$

087

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}$$

$$= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$$

$$3\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC}$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right) + \left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3} \right) = (1, 2)$$

$$\text{따라서 } x = 1, y = 2 \text{이므로 } x + y = 3$$

$$\text{다른풀이 } \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = (\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}) + (\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC})$$

$$\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PC} \quad \therefore \overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{CP}$$

즉, $(1-x, -2-y) = 2(x-1, y-4)$ 이므로
 $1-x=2x-2, -2-y=2y-8$
 $\therefore x=1, y=2 \quad \therefore x+y=3$

088

두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 서로 평행하므로
 $\vec{b}=k\vec{a}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)
 즉, $(-2, x-2)=k(x+1, -2)$ 에서
 $k(x+1)=-2 \quad \dots \textcircled{1}, x-2=-2k \quad \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{2}$ 에서 $k=-\frac{x-2}{2}$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$-\frac{(x-2)(x+1)}{2}=-2$$

$$(x-2)(x+1)=4, x^2-x-6=0$$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 x 의 값의 합은 1
이다.

■ 1

089

$\vec{a}=(k+1, 3)$ 에서 $|\vec{a}|=5$ 이므로 $\sqrt{(k+1)^2+3^2}=5$
양변을 제곱하면 $(k+1)^2+9=25$

$$(k+1)^2=16, k+1=\pm 4$$

$$\therefore k=3 \text{ 또는 } k=-5$$

(i) $k=3$ 일 때, $\vec{a}=(k+1, 3)=(4, 3)$ 이고

$$\vec{b}=(-2, k-1)=(-2, 2)$$
 이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b}=4 \times (-2)+3 \times 2=-2$$

(ii) $k=-5$ 일 때, $\vec{a}=(k+1, 3)=(-4, 3)$ 이고

$$\vec{b}=(-2, k-1)=(-2, -6)$$
 이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b}=(-4) \times (-2)+3 \times (-6)=-10$$

(i), (ii)에서 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 의 값은 -2 또는 -10이다.

■ -2 또는 -10

090

$|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=2\sqrt{3}$ 이고, 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기 $\frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b}=|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{6}=2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}=6$$

$$\begin{aligned} \therefore |3\vec{a}+2\vec{b}|^2 &= 9|\vec{a}|^2+12\vec{a} \cdot \vec{b}+4|\vec{b}|^2 \\ &= 9 \times 2^2+12 \times 6+4 \times (2\sqrt{3})^2 \\ &= 156 \end{aligned}$$

$$\therefore |3\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{39}$$

■ $2\sqrt{39}$

091

$|2\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-3\vec{b}|$ 의 양변을 제곱하면
 $4|\vec{a}|^2+4\vec{a} \cdot \vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-6\vec{a} \cdot \vec{b}+9|\vec{b}|^2$

$$3|\vec{a}|^2+10\vec{a} \cdot \vec{b}-8|\vec{b}|^2=0$$

두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)라고 하면

$$3|\vec{a}|^2+10|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta-8|\vec{b}|^2=0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$|\vec{b}|=|\vec{a}|$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$3|\vec{a}|^2+10|\vec{a}|^2 \cos \theta-8|\vec{a}|^2=0$$

$$-5|\vec{a}|^2(1-2 \cos \theta)=0$$

$$|\vec{a}| \neq 0$$
 이므로 $2 \cos \theta=1$

$$\therefore \cos \theta=\frac{1}{2} \quad \therefore \theta=\frac{\pi}{3}$$

■ $\frac{\pi}{3}$

092

두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 서로 수직이므로 $\vec{a} \cdot \vec{b}=0$ 에서

$$2x-y=0 \quad \therefore y=2x \quad \dots \textcircled{1}$$

$$|\vec{b}|=2\sqrt{5}$$
 이므로 $x^2+y^2=(2\sqrt{5})^2$

$\textcircled{1}$ 을 위의 식에 대입하면 $x^2+4x^2=20$

$$5x^2=20, x^2=4 \quad \therefore x=2 \text{ 또는 } x=-2$$

$x=2$ 일 때 $y=4, x=-2$ 일 때 $y=-4$ 이므로

$$x+y=6 \text{ 또는 } x+y=-6$$

■ 6 또는 -6

093

$\vec{a}-\vec{b}, 5\vec{a}+2\vec{b}$ 가 서로 수직이므로

$$(\vec{a}-\vec{b}) \cdot (5\vec{a}+2\vec{b})=0$$

$$5|\vec{a}|^2-3\vec{a} \cdot \vec{b}-2|\vec{b}|^2=0$$

두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)라고 하면

$$5|\vec{a}|^2-3|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta-2|\vec{b}|^2=0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$|\vec{b}|=2|\vec{a}|$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$5|\vec{a}|^2-6|\vec{a}|^2 \cos \theta-8|\vec{a}|^2=0$$

$$-3|\vec{a}|^2(1+2 \cos \theta)=0$$

$$|\vec{a}| \neq 0$$
 이므로 $2 \cos \theta=-1$

$$\therefore \cos \theta=-\frac{1}{2} \quad \therefore \theta=\frac{2}{3}\pi$$

■ $\frac{2}{3}\pi$

094

두 벡터 $\vec{b}=(4, 4-y), \vec{c}=(2, 3)$ 이 서로 평행하므로

$$\vec{b}=k\vec{c}$$
 (단, k 는 0이 아닌 실수)

즉, $(4, 4-y)=k(2, 3)$ 에서 $4=2k, 4-y=3k$

$$\therefore k=2, y=-2 \quad \therefore \vec{b}=(4, 6)$$

또, 두 벡터 $\vec{a}=(x, -2), \vec{b}=(4, 6)$ 이 서로 수직이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b}=0$$
에서 $4x-12=0 \quad \therefore x=3$

$$\therefore x^2+y^2=3^2+(-2)^2=13$$

■ 13

095

$P(x, y)$ 라고 하면 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ 에서

$\overrightarrow{OA} = (3, 4), \overrightarrow{OB} = (4, 3), \overrightarrow{OP} = (x, y)$ 이므로
 $(x, y) = m(3, 4) + n(4, 3) = (3m+4n, 4m+3n)$
 즉, $x=3m+4n, y=4m+3n$ 이므로 두 식을 연립하여
 풀면 $m = -\frac{3x-4y}{7}, n = \frac{4x-3y}{7}$

이때 $m \geq 0, n \geq 0$ 이고 $m+n \leq 1$ 이므로

$$-\frac{3x-4y}{7} \geq 0, \frac{4x-3y}{7} \geq 0,$$

$$-\frac{3x-4y}{7} + \frac{4x-3y}{7} \leq 1$$

$$\therefore y \geq \frac{3}{4}x, y \leq \frac{4}{3}x, y \leq -x+7$$

따라서 점 P가 나타내는 도형

은 오른쪽 그림의 어두운 부분

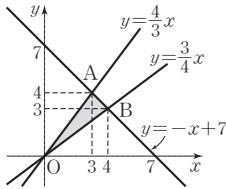
(경계선 포함)과 같이 $\triangle OAB$

의 경계 및 내부이므로 구하는

둘레의 길이는

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AB} = 5 + 5 + \sqrt{2}$$

$$= 10 + \sqrt{2}$$



$$\blacksquare 10 + \sqrt{2}$$

096

$\angle B = 90^\circ$ 이므로 $\angle ABD = \angle DBE = 30^\circ, \angle ABE = 60^\circ$

$$\text{이고 } \overrightarrow{BC} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}, \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} = 3$$

또, $\triangle ABE$ 는 한 변의 길이가 3인 정삼각형이므로

$$\overrightarrow{BD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore a = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = |\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BD}| \cos 30^\circ$$

$$= 3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{27}{4}$$

$$b = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BE} = |\overrightarrow{BD}| |\overrightarrow{BE}| \cos 30^\circ$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{27}{4}$$

$$c = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}| \cos 90^\circ = 0$$

따라서 실수 a, b, c 사이의 대소 관계는

$$c < a = b$$

$$\blacksquare c < a = b$$

097

$\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b} = (1-3t, 2+t), t\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = (t+3, 2t-1)$ 이므로

$$f(t) = (\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}) \cdot (t\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$$

$$= (1-3t)(t+3) + (2+t)(2t-1)$$

$$= -t^2 - 5t + 1$$

$$= -\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{29}{4}$$

따라서 $f(t)$ 는 $t = -\frac{5}{2}$ 일 때 최댓값 $\frac{29}{4}$ 를 가진다.

$$\blacksquare \frac{29}{4}$$

다른풀이 $\overrightarrow{a} = (1, 2), \overrightarrow{b} = (-3, 1)$ 이므로

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{5}, |\overrightarrow{b}| = \sqrt{10}, \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = -1$$

$$\therefore f(t) = (\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}) \cdot (t\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$$

$$= t|\overrightarrow{a}|^2 + (t^2 - 1)\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} - t|\overrightarrow{b}|^2$$

$$= 5t - (t^2 - 1) - 10t$$

$$= -t^2 - 5t + 1$$

$$= -\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{29}{4}$$

따라서 $f(t)$ 는 $t = -\frac{5}{2}$ 일 때 최댓값 $\frac{29}{4}$ 를 가진다.

098

$|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| = 4$ 의 양변을 제곱하면

$$|\overrightarrow{a}|^2 + 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + |\overrightarrow{b}|^2 = 16 \quad \dots \textcircled{1}$$

$|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}| = 2$ 의 양변을 제곱하면

$$|\overrightarrow{a}|^2 - 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + |\overrightarrow{b}|^2 = 4 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ 을 하면 } 2|\overrightarrow{a}|^2 + 2|\overrightarrow{b}|^2 = 20$$

$$\therefore |\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2 = 10$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 을 하면 } 4\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 12$$

$$\therefore \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 3$$

$$\therefore |\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}|^2 + |2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2$$

$$= (|\overrightarrow{a}|^2 - 4\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + 4|\overrightarrow{b}|^2) + (4|\overrightarrow{a}|^2 - 4\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + |\overrightarrow{b}|^2)$$

$$= 5(|\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2) - 8\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$$

$$= 5 \times 10 - 8 \times 3 = 26$$

■ 26

099

$|\overrightarrow{x}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|^2$ 이 최솟값을 가질 때를 구하면 된다.

주어진 도형은 한 변의 길이가 1인 정육각형이므로

$$|\overrightarrow{a}| = 1, |\overrightarrow{b}| = 2$$

또, 두 벡터 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 가 이루는 각의 크기는 60° 이므로

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| |\overrightarrow{b}| \cos 60^\circ = 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\therefore |\overrightarrow{x}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|^2 = x^2 |\overrightarrow{a}|^2 + 2x\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + |\overrightarrow{b}|^2$$

$$= x^2 + 2x + 4$$

$$= (x+1)^2 + 3$$

따라서 $|\overrightarrow{x}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|$ 는 $x = -1$ 일 때 최솟값 $\sqrt{3}$ 을 가지므로

$$p = -1, q = \sqrt{3}$$

$$\therefore p+q^2 = (-1) + (\sqrt{3})^2 = 2$$

■ 2

100

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0} \text{에서 } \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{c}$$

$$\text{이때 } |\overrightarrow{c}| = 7 \text{ 이므로 } |-\overrightarrow{c}| = 7$$

$$\therefore |\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| = 7$$

양변을 제곱하면

$$|\overrightarrow{a}|^2 + 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + |\overrightarrow{b}|^2 = 49$$

두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)라고 하면

$$|\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta + |\vec{b}|^2 = 49$$

$$9 + 30\cos\theta + 25 = 49, 30\cos\theta = 15$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{1}{2} \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

답 $\frac{\pi}{3}$

101

$\angle AOB = \theta$ 라고 하면 $\square AOBC$ 는 평행사변형이므로
 $\square AOBC = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \times \sin\theta \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 라고 하면 $|\vec{a}| = \sqrt{5}, |\vec{b}| = 5$ 이고
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 4 + 1 \times (-3) = 5$

즉, $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta = 5$ 이므로 $5\sqrt{5} \cos\theta = 5$ 에서

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

따라서 $\textcircled{1}$ 에서 평행사변형 $AOBC$ 의 넓이는

$$\sqrt{5} \times 5 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 10$$

답 10

다른풀이 좌표평면 위의 세 점 $(0, 0), (a_1, a_2), (b_1, b_2)$

를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} |a_1b_2 - a_2b_1|$ 로 구할 수 있다.

즉, 좌표평면 위의 세 점 $O(0, 0), A(2, 1), B(4, -3)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 AOB 의 넓이는

$$\triangle AOB = \frac{1}{2} |2 \times (-3) - 1 \times 4| = \frac{1}{2} |-10| = 5$$

$$\therefore \square AOBC = 2 \triangle AOB = 2 \times 5 = 10$$

102

$|\vec{a} + \vec{b}| = 4$ 의 양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16$$

이때 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$ 이므로

$$4 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 9 = 16 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3}{2}$$

$\vec{a} + m\vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$ 가 서로 수직이므로

$$(\vec{a} + m\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

$$|\vec{a}|^2 + (m-1)\vec{a} \cdot \vec{b} - m|\vec{b}|^2 = 0$$

$$4 + \frac{3}{2}(m-1) - 9m = 0$$

$$\therefore m = \frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

103

점 $(4, 3)$ 을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (-1, 2)$ 인 직선의

$$\text{방정식은 } \frac{x-4}{-1} = \frac{y-3}{2}$$

$$\therefore 4-x = \frac{y-3}{2}$$

따라서 이 직선이 점 $(-2, a)$ 를 지나므로

$$4 - (-2) = \frac{a-3}{2}, \frac{a-3}{2} = 6$$

$$\therefore a = 15$$

답 15

104

직선 $\frac{x+5}{3} = 2-y$, 즉 $\frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-1}$ 의 방향벡터가

$\vec{u} = (3, -1)$ 이므로 이 직선에 수직인 직선의 법선벡터가 $\vec{u} = (3, -1)$ 이다.

점 $(2, 3)$ 을 지나고 법선벡터가 $\vec{u} = (3, -1)$ 인 직선의 방정식은 $3(x-2) - (y-3) = 0$

$$\therefore -3x + y + 3 = 0$$

따라서 $p = -3, q = 3$ 이므로 $p+q = 0$

답 0

105

두 점 $(2, -1), (-1, 5)$ 를 지나는 직선의 방향벡터가 $\vec{u} = (-3, 6)$ 이므로 이 직선에 평행한 직선의 방향벡터도 $\vec{u} = (-3, 6)$ 이다.

점 $A(4, 1)$ 을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (-3, 6)$ 인 직선의 방정식은 $\frac{x-4}{-3} = \frac{y-1}{6}$

$$\therefore x-4 = \frac{y-1}{-2}$$

따라서 $a = 4, b = 1$ 이므로 $ab = 4$

답 4

106

직선 $\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{4}$ 의 방향벡터는

$$\vec{u} = (3, 4)$$

x 축, y 축의 방향벡터를 각각 \vec{x}, \vec{y} 라고 하면

$$\vec{x} = (1, 0), \vec{y} = (0, 1)$$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{x}|}{|\vec{u}| |\vec{x}|} = \frac{|3 \times 1 + 4 \times 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2} \sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\beta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{y}|}{|\vec{u}| |\vec{y}|} = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2} \sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \cos\alpha + \cos\beta = \frac{7}{5}$$

답 $\frac{7}{5}$

107

직선 l 의 방향벡터는

$$\vec{u} = (2, 4) - (-1, 3) = (3, 1)$$

직선 $\frac{x+1}{a} = \frac{y-3}{2}$ 의 방향벡터는

$$\vec{v} = (a, 2)$$

두 직선이 서로 수직이면 두 직선의 방향벡터가 서로 수직이므로 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ 에서

$$3a+2=0 \quad \therefore a=-\frac{2}{3}$$

답 $-\frac{2}{3}$

108

두 직선 $3x+y-5=0$, $2x-ay+1=0$ 의 법선벡터는 각각 $\vec{n}_1=(3, 1)$, $\vec{n}_2=(2, -a)$

두 직선이 서로 수직이면 두 직선의 법선벡터가 서로 수직이므로 $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ 에서

$$3 \times 2 - a = 0 \quad \therefore a = 6$$

답 6

109

$\vec{a}=(1, 2)$, $\vec{p}=(x, y)$ 이므로

$$\vec{p}-\vec{a}=(x-1, y-2)$$

(1) $\vec{p} \cdot (\vec{p}-\vec{a})=0$ 에서 $(x, y) \cdot (x-1, y-2)=0$ 이므로

$$x(x-1)+y(y-2)=0$$

$$x^2-x+y^2-2y=0$$

$$\therefore \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$$

따라서 점 P는 중심의 좌표가 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 이고 반지름의

길이가 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 인 원 위에 있다.

(2) $\vec{a} \cdot (\vec{p}-\vec{a})=0$ 에서 $(1, 2) \cdot (x-1, y-2)=0$ 이므로

$$(x-1)+2(y-2)=0 \quad \dots \textcircled{1}$$

이때 $\textcircled{1}$ 은 법선벡터가 $\vec{a}=(1, 2)$ 이고 한 점 $(1, 2)$ 을 지나는 직선의 방정식이다.

따라서 점 P는 \vec{a} 에 수직이고 점 A를 지나는 직선 위에 있다.

풀이 참조

110

P(x, y)라고 하면

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = (4-x, -3-y)$$

$$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} = (2-x, -1-y)$$

이때 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ 이므로

$$(4-x)(2-x) + (-3-y)(-1-y) = 0$$

$$(x-4)(x-2) + (y+3)(y+1) = 0$$

$$x^2 - 6x + y^2 + 4y + 11 = 0$$

$$\therefore (x-3)^2 + (y+2)^2 = 2$$

따라서 점 P의 자취는 중심의 좌표가 $(3, -2)$ 이고 반지

름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원이므로 $a=3, b=-2, r=\sqrt{2}$

$$\therefore abr = -6\sqrt{2}$$

답 $-6\sqrt{2}$

111

두 직선 $ax+y-3=0$, $x+3y+1=0$ 의 법선벡터는 각각 $\vec{n}_1=(a, 1)$, $\vec{n}_2=(1, 3)$

두 직선이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 이면 두 직선의 법선벡

터가 이루는 각의 크기도 $\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|a \times 1 + 1 \times 3|}{\sqrt{a^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 3^2}}$$

$$|a+3| = \sqrt{5a^2 + 5}$$

양변을 제곱하면

$$a^2 + 6a + 9 = 5a^2 + 5$$

$$2a^2 - 3a - 2 = 0, (2a+1)(a-2) = 0$$

$$\therefore a=2 \quad (\because a>0)$$

답 2

112

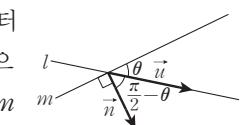
직선 $l : \frac{x+2}{3}=2-y$ 의 방향벡터는 $\vec{u}=(3, -1)$ 이고,

직선 $m : x-2y+3=0$ 의 법선벡터는 $\vec{n}=(1, -2)$ 이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 두 벡터

\vec{u}, \vec{n} 의 시점을 두 직선의 교점으로

로 잡고 생각하면 두 직선 l, m



이 이루는 각의 크기가 θ 이면 두

벡터 \vec{u}, \vec{n} 이 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2} - \theta$ 이므로

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|}$$

$$= \frac{|3 \times 1 + (-1) \times (-2)|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2} \sqrt{1^2 + (-2)^2}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{10} \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

113

직선 $l : x+2=\frac{y-1}{2}$ 의 방향벡터는 $\vec{u}=(1, 2)$

직선 $m : 6x+ay-3=0$ 의 법선벡터는 $\vec{n}=(6, a)$

(1) 직선 l, m 이 수직일 때 두 벡터 \vec{u}, \vec{n} 은 평행하므로

$$\vec{n} = k\vec{u} \quad (\text{단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수})$$

$$\therefore (6, a) = k(1, 2) \text{에서 } 6=k, a=2k$$

$$\therefore a=12$$

(2) 직선 l, m 이 평행할 때 \vec{u}, \vec{n} 은 수직이므로

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$$

즉, $(1, 2) \cdot (6, a) = 0$ 에서

$$6+2a=0$$

$$\therefore a=-3$$

■ (1) 12 (2) -3

114

두 점 A, B를 지나는 직선의 방향벡터는

$$\overrightarrow{AB}=(1, -2)$$

직선 AB에 수직인 직선의 법선벡터는 \overrightarrow{AB} 이므로

점 C(-1, 2)를 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{AB}=(1, -2)$ 인

직선의 방정식은

$$1 \times (x+1) - 2(y-2) = 0$$

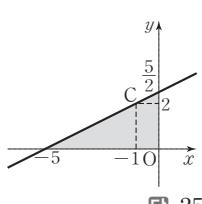
$$\therefore x-2y+5=0$$

이 직선의 x절편은 -5,

y절편은 $\frac{5}{2}$ 이므로

$$S=\frac{1}{2} \times 5 \times \frac{5}{2}=\frac{25}{4}$$

$$\therefore 4S=4 \times \frac{25}{4}=25$$

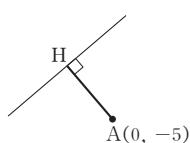


■ 25

115

점 H는 주어진 직선 위의 점이므로

$$\frac{x+1}{2}=\frac{3-y}{3}=t \quad (t \text{는 실수})$$



로 놓으면

$$x=2t-1, y=-3t+3$$

$$\therefore H(2t-1, -3t+3)$$

$$\therefore \overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}$$

$$=(2t-1, -3t+3)-(0, -5)$$

$$=(2t-1, -3t+8) \quad \dots \dots \textcircled{①}$$

직선 $\frac{x+1}{2}=\frac{3-y}{3}$ 의 방향벡터는 $\vec{u}=(2, -3)$ 이므로

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AH}=0$$
에서

$$2(2t-1)-3(-3t+8)=0$$

$$13t-26=0 \quad \therefore t=2$$

이를 ①에 대입하면 $\overrightarrow{AH}=(3, 2)$

따라서 두 점 A, H를 지나는 직선은 방향벡터가 \overrightarrow{AH} 이

고 점 A(0, 5)를 지나는 직선이므로 구하는 직선의 방정

식은

$$\frac{x}{3}=\frac{y-5}{2}$$

$$\blacksquare \quad \frac{x}{3}=\frac{y-5}{2}$$

116

$\vec{p}-\vec{c}=(x-3, y+1)$ 이므로

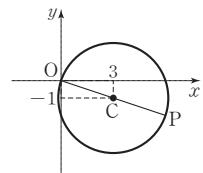
$$(\vec{p}-\vec{c}) \cdot (\vec{p}-\vec{c})=10$$
에서

$$(x-3)^2+(y+1)^2=10$$

즉, 점 P(x, y)는 중심이 C(3, -1)이고 반지름의 길이

가 $\sqrt{10}$ 인 원 위의 점이다.

이때 $|\vec{p}|$ 의 값이 최대가 되는 것
은 오른쪽 그림과 같이 \overrightarrow{OP} 가 원
의 지름이 될 때이므로 원의 중심
C는 \overrightarrow{OP} 의 중점이다.



즉, $\frac{x}{2}=3, \frac{y}{2}=-1$ 이므로

$$x=6, y=-2$$

$$\therefore P(6, -2)$$

■ P(6, -2)

117

점 (-1, 2)를 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(1, -3)$ 인 직선
의 방정식은

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-3}, -3x-3=y-2$$

$$\therefore y=-3x-1 \quad \dots \dots \textcircled{①}$$

한편, C(0, 3), D(2, -1)이라 하고 이 두 점을 지름의
양 끝점으로 하는 원 위의 점을 P(x, y)라고 하면

△PCD는 $\angle CPD=90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overrightarrow{CP} \perp \overrightarrow{DP} \iff \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DP}=0$$

즉, $(x, y-3) \cdot (x-2, y+1)=0$ 에서

$$x(x-2)+(y-3)(y+1)=0$$

$$x^2-2x+y^2-2y-3=0$$

$$\therefore (x-1)^2+(y-1)^2=5 \quad \dots \dots \textcircled{②}$$

①을 ②에 대입하면

$$(x-1)^2+(-3x-2)^2=5$$

$$10x^2+10x=0, x(x+1)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=-1$$

$x=0$ 을 ①에 대입하면 $y=-1$

$x=-1$ 을 ①에 대입하면 $y=2$

따라서 A(0, -1), B(-1, 2) 또는

A(-1, 2), B(0, -1)이므로

$$\overrightarrow{AB}^2=(-1)^2+[2-(-1)]^2=10$$

■ 10

3 평면 운동

118

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t}}, \frac{dy}{dt}=\frac{2}{t} \text{이므로 속도 } \vec{v} \text{는}$$

$$\vec{v}=\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, \frac{2}{t}\right)$$

$$\text{즉, } t=4 \text{에서의 속도 } \vec{v} \text{는 } \vec{v}=\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

따라서 $t=4$ 에서의 속력 $|\vec{v}|$ 는

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

답 $\frac{\sqrt{5}}{4}$

119

$$\frac{dx}{dt} = 2, \frac{dy}{dt} = t - \frac{1}{t} \text{이므로 속도 } \vec{v} \text{는}$$

$$\vec{v} = \left(2, t - \frac{1}{t}\right)$$

즉, 속력 $|\vec{v}|$ 는

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{2^2 + \left(t - \frac{1}{t}\right)^2} = \sqrt{t^2 + 2 + \frac{1}{t^2}} \\ &= \sqrt{\left(t + \frac{1}{t}\right)^2} = t + \frac{1}{t} (\because t > 0) \end{aligned}$$

$t > 0, \frac{1}{t} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의

하여

$$t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 2$$

이때 등호는 $t = \frac{1}{t}$ 일 때 성립하므로

$$t^2 = 1 \quad \therefore t = 1 (\because t > 0)$$

따라서 점 P의 속력이 최소가 되는 순간의 속도는 $t = 1$ 일 때의 속도이므로 $\vec{v} = (2, 0)$

답 $(2, 0)$

120

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}, \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2} \text{이므로 구하는 곡선의 길이는}$$

$$\begin{aligned} \int_1^e \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt &= \int_1^e \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2}\right)^2} dt \\ &= \int_1^e \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{4t^4}} dt \\ &= \int_1^e \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2t^2}\right)^2} dt \\ &= \int_1^e \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2t^2}\right) dt \\ &= \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{2t} \right]_1^e \\ &= \frac{e}{2} - \frac{1}{2e} \end{aligned}$$

답 $\frac{e}{2} - \frac{1}{2e}$

121

점 P의 x좌표가 0이 되는 것은 $\frac{1}{2}t^2 - t = 0$ 에서

$$t^2 - 2t = 0, t(t-2) = 0$$

$$\therefore t = 2 (\because t > 1)$$

이때 $\frac{dx}{dt} = t - 1, \frac{dy}{dt} = 2\sqrt{t}$ 이므로 $t = 1$ 에서 $t = 2$ 까

지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt &= \int_1^2 \sqrt{(t-1)^2 + (2\sqrt{t})^2} dt \\ &= \int_1^2 \sqrt{t^2 + 2t + 1} dt \\ &= \int_1^2 \sqrt{(t+1)^2} dt \\ &= \int_1^2 (t+1) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2 + t \right]_1^2 \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{5}{2}$

122

$$\frac{dx}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t, \frac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t \text{이므로}$$

속도 \vec{v} 는 $\vec{v} = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t)$

즉, 속력 $|\vec{v}|$ 는

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2} \\ &= \sqrt{2e^{2t}(\sin^2 t + \cos^2 t)} \\ &= \sqrt{2e^{2t}} \end{aligned}$$

점 P의 속력이 $\sqrt{2e}$ 일 때의 시각 t_1 이므로

$$\sqrt{2e^{t_1}} = \sqrt{2e} \quad \therefore t_1 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= (e^t \cos t - e^t \sin t) - (e^t \sin t + e^t \cos t) \\ &= -2e^t \sin t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &= (e^t \sin t + e^t \cos t) + (e^t \cos t - e^t \sin t) \\ &= 2e^t \cos t \end{aligned}$$

이므로 가속도 \vec{a} 는 $\vec{a} = (-2e^t \sin t, 2e^t \cos t)$

즉, 가속도의 크기 $|\vec{a}|$ 는

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{(-2e^t \sin t)^2 + (2e^t \cos t)^2} \\ &= \sqrt{4e^{2t}(\sin^2 t + \cos^2 t)} \\ &= \sqrt{4e^{2t}} = 2e^t \end{aligned}$$

점 P의 가속도의 크기가 $2e\sqrt{e}$ 일 때의 시각 t_2 이므로

$$2e^{t_2} = 2e\sqrt{e} \quad \therefore t_2 = \frac{3}{2}$$

$$\therefore t_1 + t_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

답 2

123

물로켓이 땅에 떨어지는 것은 높이가 0 m 일 때이므로

$$y = 0 \text{에서 } 10\sqrt{3}t - 10t^2 = 0$$

$$t(t - \sqrt{3}) = 0 \quad \therefore t = \sqrt{3} (\because t > 0)$$

이때 $\frac{dx}{dt} = 10$, $\frac{dy}{dt} = 10\sqrt{3} - 20t$ 이므로 속도 \vec{v} 는
 $\vec{v} = (10, 10\sqrt{3} - 20t)$
 따라서 $t = \sqrt{3}$ 일 때의 속도 \vec{v} 는 $\vec{v} = (10, -10\sqrt{3})$ 이므로
 속력 $|\vec{v}|$ 는
 $|\vec{v}| = \sqrt{10^2 + (-10\sqrt{3})^2} = \sqrt{400} = 20(\text{m}/\text{s})$

■ 초속 20 m

124

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -12 \cos^2 t \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 12 \sin^2 t \cos t \text{ 이므로} \\ \text{속도 } \vec{v} &= \vec{v} = (-12 \cos^2 t \sin t, 12 \sin^2 t \cos t) \\ \text{즉, 속력 } |\vec{v}| &\text{는} \\ |\vec{v}| &= \sqrt{(-12 \cos^2 t \sin t)^2 + (12 \sin^2 t \cos t)^2} \\ &= \sqrt{12^2 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} \\ &= |12 \sin t \cos t| \\ &= 12 \sin t \cos t \left(\because 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 6 \sin 2t \quad (\because 2 \sin t \cos t = \sin 2t)\end{aligned}$$

속력이 6 일 때는 $6 \sin 2t = 6$ 에서 $\sin 2t = 1$
 $\therefore t = \frac{\pi}{4} \quad (\because 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$
 따라서 시각 $t = 0$ 에서 속력이 6이 될 때까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} |\vec{v}| dt &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 6 \sin 2t dt \\ &= \left[-3 \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 3\end{aligned}$$

■ 3

125

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{x} \quad (\text{이} \leq x \leq a) \text{에서의 곡선의 길이가} \\ &1 + \ln 3 \text{ 이므로} \\ \int_1^a \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{x} \right)^2} dx &= \int_1^a \sqrt{\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2}} dx \\ &= \int_1^a \sqrt{\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{x} \right)^2} dx \\ &= \int_1^a \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{8}x^2 + \ln x \right]_1^a \\ &= \frac{1}{8}a^2 + \ln a - \frac{1}{8} \\ &= 1 + \ln 3 \\ \therefore a &= 3\end{aligned}$$

■ 3

III. 공간도형과 공간벡터

1 공간도형

126

평면의 결정조건에 따라 만들어지는 평면을 찾으면 다음과 같다.

- (i) 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점 세 점 D, F, G로 만들어지는 평면은 평면 DFG의 1개
- (ii) 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점 한 직선 AB와 이 직선 위에 있지 않은 한 점으로 만들어지는 평면은 평면 ABD, 평면 ABF, 평면 ABG 한 직선 BC와 이 직선 위에 있지 않은 한 점으로 만들어지는 평면은
- 평면 BCD, 평면 BCF, 평면 BCG
- 이 중 평면 BCD는 평면 ABD와 같고, 평면 BCF와 평면 BCG는 같은 평면이다.
- 한 직선 EH와 이 직선 위에 있지 않은 한 점으로 만들어지는 평면은
- 평면 DEH, 평면 EFH, 평면 EGH
- 이 중 평면 EFH와 평면 EGH는 같은 평면이다.
- 즉, 이 경우의 서로 다른 평면의 개수는 $3+1+2=6$

(iii) 만나는 두 직선 : 직선 AB와 직선 BC로 만들어지는 평면은 평면 ABC이지만 이 평면은 평면 ABD와 같을 평면이므로 이 경우의 서로 다른 평면은 없다.

(iv) 평행한 두 직선 : 직선 BC와 직선 EH로 만들어지는 평면은 평면 BCHE의 1개

(i)~(iv)에서 구하는 서로 다른 평면의 개수는

$1+6+1=8$ ■ 8

127

모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 직선은

직선 CF, 직선 DF, 직선 EF의 3개

$$\therefore a = 3$$

모서리 AD와 수직으로 만나는 직선은

직선 AB, 직선 AC, 직선 DE, 직선 DF의 4개

$$\therefore b = 4$$

모서리 BC와 한 점에서 만나는 평면은

평면 ABED, 평면 ADFC의 2개

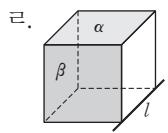
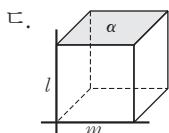
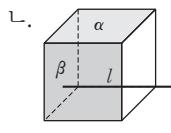
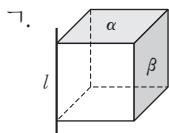
$$\therefore c = 2$$

$$\therefore a+b+c=9$$

■ 9

128

정육면체의 모서리를 직선으로, 면을 평면으로 생각하면 다음 그림과 같다.



⊓. $l \parallel \alpha$ 이고 $l \parallel \beta$ 이면 $\alpha \perp \beta$ 일 수도 있다. (거짓)

⊔. $l \parallel \alpha$ 이고 $\alpha \perp \beta$ 이면 $l \perp \beta$ 일 수도 있다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ⊓, ⊔이다. 답 128

129

직각삼각형 ACD에서

$$\overline{AC} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3}$$

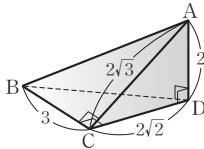
이때 $\overline{AD} \perp \overline{BD}$, $\overline{AD} \perp \overline{CD}$ 이

므로 $\overline{AD} \perp$ (평면 BCD)

또, $\overline{CD} \perp \overline{BC}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AC} \perp \overline{BC}$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$



답 129

130

오른쪽 그림과 같이 모서리 BC의

중점을 M이라고 하면

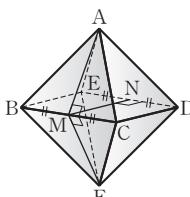
$\overline{AM} \perp \overline{BC}$, $\overline{FM} \perp \overline{BC}$ 이므로

$\angle AMF = \theta$

정팔면체의 한 모서리의 길이를

$2a$ 라고 하면

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a = \sqrt{3}a$$



\overline{ED} 의 중점을 N이라고 하면 $\angle AMN = \frac{\theta}{2}$ 이므로

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{\frac{1}{2} \overline{MN}}{\overline{AM}} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 1$$

$$= -\frac{1}{3}$$

답 -\frac{1}{3}

131

잘린 단면의 넓이를 S , 단면의 밑면 위로의 정사영인 반원의 넓이를 S' 이라고 하면

$$S' = \frac{1}{2} \times \pi \times 3^2 = \frac{9}{2}\pi \text{이므로}$$

$$S' = S \cos 60^\circ \text{에서 } \frac{9}{2}\pi = \frac{1}{2}S \quad \therefore S = 9\pi \quad \text{답 } 9\pi$$

132

두 선분 PQ, SR는 모두 모서리 AC와 평행하고,

두 선분 PS, QR는 모두 모서리 BD와 평행하므로

사각형 PQRS는 평행사변형이다.

$\triangle ABD$ 와 $\triangle APS$ 에서 $\overline{BD} \parallel \overline{PS}$ 이므로

$\triangle ABD \sim \triangle APS$ (AA 닮음)

이때 정사면체의 모든 면은 정삼각형이므로 $\triangle APS$ 도 정삼각형이다. $\therefore \overline{AP} = \overline{PS}$

같은 방법으로 $\triangle ABC \sim \triangle PBQ$ 에서 $\overline{BP} = \overline{PQ}$

\therefore (평행사변형 PQRS의 둘레의 길이)

$$= \overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RS} + \overline{PS} = 2(\overline{PS} + \overline{PQ})$$

$$= 2(\overline{AP} + \overline{BP}) = 2\overline{AB} = 2 \times 10 = 20$$

답 20

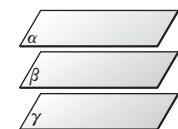
133

(가) 서로 다른 세 평면 α , β , γ 에 대하여

여 $\alpha // \beta$ 이고 $\beta // \gamma$ 이면 $\alpha // \gamma$ 이

므로 세 평면의 위치 관계는 오른

쪽 그림과 같다. 즉, 이 세 평면 α ,

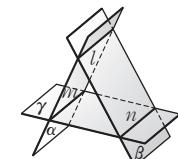


β , γ 에 의해 공간은 4개로 분할되므로 $a=4$

(나) 서로 다른 세 평면 α , β , γ 에 대하여

여 두 평면 α , β 의 교선을 l 이라

하고 교선 l 에 평행한 평면 γ 가 두 평면 α , β 와 만나 생기는 교선을 각각 m , n 이라고 하면 $l // m // n$ 이므로 세 평면의 위치 관계는 위의 그림과 같다. 즉, 이 세 평면 α , β , γ 에 의해 공간은 최대 7개로 분할되므로 $b=7$



$$\therefore a^2 + b^2 = 4^2 + 7^2 = 65$$

답 65

134

오른쪽 그림과 같이 \overline{BC} , \overline{AD} 의

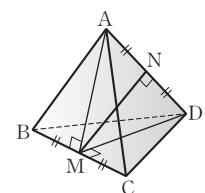
중점을 각각 M, N이라고 하자.

$\triangle ABC$ 는 정삼각형이므로

$\overline{BC} \perp \overline{AM}$

$\triangle BCD$ 는 정삼각형이므로

$\overline{BC} \perp \overline{DM}$



'직 \perp 평의 정리'에 의하여 $\overline{BC} \perp$ (평면 AMD)

$$\therefore \overline{BC} \perp \overline{MN}$$

또, \overline{MN} 은 이등변삼각형 MDA의 중선이므로

$$\overline{AD} \perp \overline{MN}$$

따라서 구하는 최단 거리는 \overline{MN} 의 길이이므로 직각삼각형 AMN에서

$$MN = \sqrt{AM^2 - AN^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

135

$\overline{DH} \perp$ (평면 EFGH), $\overline{DI} \perp \overline{EG}$

이므로 두 점 H, I를 이으면 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{HI} \perp \overline{EG}$$

이때 $\overline{EG} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ 이므로 $\triangle HEG$ 의 넓이를 두 방향에서 생각하면

$$\frac{1}{2} \times \overline{HE} \times \overline{HG} = \frac{1}{2} \times \overline{EG} \times \overline{HI}$$

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \overline{HI} \quad \therefore \overline{HI} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

따라서 직각삼각형 DHI에서

$$\overline{DI} = \sqrt{\overline{DH}^2 + \overline{HI}^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$



136

평면 OAB와 평면 ABCD가 이루는 각의 크기를 θ 라고 하면 $\triangle OAB$ 의 평면 ABCD 위로의 정사영은 $\triangle MAB$ 이므로

$$\triangle MAB = \triangle OAB \times \cos \theta \quad \dots \textcircled{①}$$

$$\text{이때 } \triangle MAB = \frac{1}{4} \square ABCD = \frac{1}{4} \times 1 \times 1 = \frac{1}{4},$$

$$\triangle OAB = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

이므로 ①에 의해

$$\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 $\triangle MAB$ 의 평면 OAB 위로의 정사영의 넓이는

$$\triangle MAB \times \cos \theta = \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{12}$

137

(가) 태양열 집열판의 지면 위로의 정사영이 그림자이고 태양열 집열판과 지면이 이루는 각의 크기가 30° 이므로

$$S_1 = 120 \times \cos 30^\circ = 60\sqrt{3} (\text{m}^2)$$

(나) 그림자의 태양열 집열판 위로의 정사영이 태양열 집열판이고 태양열 집열판과 지면이 이루는 각의 크기가 30° 이므로

$$120 = S_2 \times \cos 30^\circ \quad \therefore S_2 = \frac{120}{\cos 30^\circ} = 80\sqrt{3} (\text{m}^2)$$

$$\therefore \frac{S_2}{S_1} = \frac{80\sqrt{3}}{60\sqrt{3}} = \frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

2 공간좌표

138

$B(a, b, 3)$ 이므로

$$A(a, 0, 3), C(0, b, 3)$$

이때 점 $A(a, 0, 3)$ 과 점

$(-5, c, -3)$ 이 y 축에

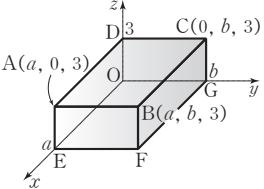
대하여 대칭이므로

$$a=5, c=0$$

또, 점 $C(0, b, 3)$ 과 점 $(d, 4, -3)$ 이 xy 평면에 대하여 대칭이므로

$$b=4, d=0$$

$$\therefore a+b+c+d=5+4+0+0=9$$



139

$2\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서 $4\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 이므로

$$4[(1-2)^2 + (2-3)^2 + \{2-(-1)\}^2]$$

$$=(a-1)^2 + (-4-2)^2 + (0-2)^2$$

$$44=a^2-2a+41, a^2-2a-3=0, (a-3)(a+1)=0$$

$$\therefore a=3 (\because a>0)$$

답 3

140

삼각형 ABC가 \overline{AB} 를 빗변으로 하는 직각삼각형이므로 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$

$$A(5, -2, -1), B(2, 1, -2), C(a, 0, 0) \text{이므로}$$

$$(2-5)^2 + \{1-(-2)\}^2 + \{-2-(-1)\}^2$$

$$=[(a-2)^2 + (0-1)^2 + \{0-(-2)\}^2]$$

$$+[(a-5)^2 + \{0-(-2)\}^2 + \{0-(-1)\}^2]$$

$$19=2a^2-14a+39, a^2-7a+10=0$$

$$(a-2)(a-5)=0 \quad \therefore a=2 \text{ 또는 } a=5$$

답 2 또는 5

141

두 점 A, B의 z 좌표의 부호가

같으므로 두 점은 xy 평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 B와 xy 평면에 대하여 대칭

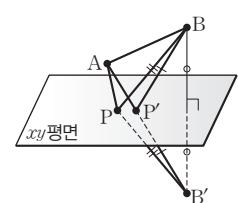
인 점을 B' 이라고 하면 xy 평

면 위의 점 P에 대하여 $\overline{BP} = \overline{B'P}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AP} + \overline{B'P} \geq \overline{AB'}$$

즉, 직선 AB' 이 xy 평면과 만나는 점을 P' 이라고 하면 점

P가 점 P' 의 위치에 있을 때, $\triangle ABP$ 의 둘레의 길이는 최소이다.



$$\begin{aligned}\therefore (\triangle ABP \text{의 둘레의 길이}) &= \overline{AB} + \overline{AP} + \overline{BP} \\ &= \overline{AB} + \overline{AP} + \overline{B'P} \\ &\geq \overline{AB} + \overline{AB'}\end{aligned}$$

이때 점 $B(3, 1, 2)$ 와 xy 평면에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $B'(3, 1, -2)$ 이므로 구하는 최솟값은

$$\begin{aligned}\overline{AB} + \overline{AB'} &= \sqrt{(3-(-2))^2 + (1-(-1))^2 + (2-3)^2} \\ &+ \sqrt{(3-(-2))^2 + (1-(-1))^2 + (-2-3)^2} \\ &= \sqrt{30} + 3\sqrt{6} \quad \blacksquare \sqrt{30} + 3\sqrt{6}\end{aligned}$$

142

선분 AB 를 $1 : 2$ 로 내분하는 점이 P 이므로

$$P\left(\frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2)}{1+2}, \frac{1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2}{1+2}, \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 1}{1+2}\right)$$

$$\therefore P(-1, 1, 2)$$

선분 BC 를 $2 : 1$ 로 외분하는 점이 Q 이므로

$$Q\left(\frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot 1}{2-1}, \frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)}{2-1}, \frac{2 \cdot 2 - 1 \cdot 4}{2-1}\right)$$

$$\therefore Q(1, 3, 0)$$

따라서 두 점 P, Q 의 yz 평면 위로의 정사영은

$$P'(0, 1, 2), Q'(0, 3, 0)$$

$$\therefore \overline{P'Q'} = \sqrt{(0-0)^2 + (3-1)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\blacksquare 2\sqrt{2}$$

143

선분 AB 가 xy 평면에 의해 $2 : 1$ 로 내분되므로 내분점은 xy 평면 위의 점이다. 즉, 내분점의 z 좌표는 0이므로

$$\frac{2c+1 \cdot 4}{2+1} = 0 \quad \therefore c = -2$$

또, 선분 AB 가 z 축에 의해 $3 : 1$ 로 외분되므로 외분점은 z 축 위의 점이다. 즉, 외분점의 x 좌표와 y 좌표는 모두 0이므로

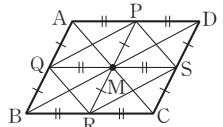
$$\frac{3a-1 \cdot 3}{3-1} = 0, \frac{3b-1 \cdot 6}{3-1} = 0 \quad \therefore a=1, b=2$$

$$\blacksquare a=1, b=2, c=-2$$

144

평행사변형의 각 변의 중점을 연결하여 만든 사각형은 평행사변형이고, 새로 만든 평행사변형의 두 대각선의 교점과 처음 평행사변형의 두 대각선의 교점은 일치한다.

즉, $\square ABCD$ 의 각 변의 중점을 연결하여 만든 $\square PQRS$ 도 평행사변형이고, $\square PQRS$ 의 두 대각선의 교점은 $\square ABCD$ 의 두 대각선의 교점과 같다.



이때 평행사변형의 두 대각선은 서로 이등분하므로

$\square ABCD$ 의 두 대각선의 교점은 \overline{AC} 의 중점과 일치한다. 따라서 구하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3+(-5)}{2}, \frac{(-2)+4}{2}, \frac{5+1}{2}\right) \quad \therefore (-1, 1, 3)$$

$$\blacksquare (-1, 1, 3)$$

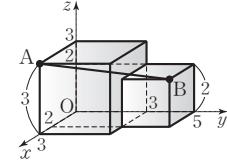
145

주어진 두 정육면체를 오른쪽 그림과 같이 좌표공간에 놓으면 두 점 A, B의 좌표는 각각

$$A(3, 0, 3), B(2, 5, 2)$$

따라서 두 점 A, B 사이의 거리는

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-3)^2 + (5-0)^2 + (2-3)^2} = 3\sqrt{3} \quad \blacksquare 3\sqrt{3}$$



146

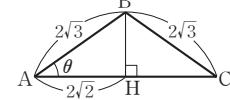
$$\overline{AB} = \sqrt{(1-3)^2 + (0-2)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{3}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-1-1)^2 + (-2-0)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{3}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{[3-(-1)]^2 + [2-(-2)]^2 + (1-1)^2} = 4\sqrt{2}$$

즉, $\triangle ABC$ 는 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 인 이등변삼각형이다.

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 B에서 \overline{AC} 에 내린 수선의 발을 H라 고 하면



$$\overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AC} = 2\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \blacksquare \frac{\sqrt{6}}{3}$$

147

점 A에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 H, 선분 CH와 원의 교점을 P라고 하면 거리의 최솟값은 선분 AP의 길이와 같다.

$$H(-1, 1, 0), C(-3, 1, 0)$$

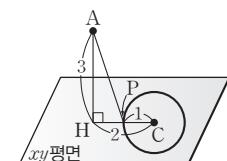
이므로

$$\overline{CH} = \sqrt{(-1-(-3))^2 + (1-1)^2 + (0-0)^2} = 2$$

$$\therefore \overline{PH} = \overline{CH} - 1 = 1$$

이때 $\overline{AH} = 3$ 이므로 직각삼각형 AHP에서

$$\overline{AP} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \quad \blacksquare \sqrt{10}$$



148

점 C는 zx 평면 위의 점이므로 $C(x, 0, z)$ 로 놓을 수 있다.

$$\triangle ABC \text{가 정삼각형이므로 } \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$$

$$\begin{aligned}\overline{AB} = \overline{BC} \text{에서 } \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \text{이므로} \\ (3-0)^2 + (3-0)^2 + (3-3)^2 \\ = (x-3)^2 + (0-3)^2 + (z-3)^2 \\ \therefore x^2 + z^2 - 6x - 6z + 9 = 0 \quad \dots \textcircled{\text{1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AB} = \overline{CA} \text{에서 } \overline{AB}^2 = \overline{CA}^2 \text{이므로} \\ (3-0)^2 + (3-0)^2 + (3-3)^2 \\ = (0-x)^2 + (0-0)^2 + (3-z)^2 \\ \therefore x^2 + z^2 - 6z - 9 = 0 \quad \dots \textcircled{\text{2}}\end{aligned}$$

$\textcircled{\text{1}} - \textcircled{\text{2}}$ 을 하면

$$-6x + 18 = 0 \quad \therefore x = 3$$

$x = 3$ 을 $\textcircled{\text{1}}$ 에 대입하면

$$z^2 - 6z = 0, z(z-6) = 0$$

$$\therefore z = 0 \text{ 또는 } z = 6$$

$$\therefore C(3, 0, 0) \text{ 또는 } C(3, 0, 6)$$

▣ $C(3, 0, 0)$ 또는 $C(3, 0, 6)$

149

두 점 A, B의 x 좌표끼리, y 좌표끼리 부호가 같으므로 두 점은 yz 평면을 기준으로, zx 평면을 기준으로 모두 같은 쪽에 있다.

점 A와 yz 평면에 대하여 대칭인 점을 A'이라고 하면 yz 평면 위의 점 Q에 대하여 $\overline{AQ} = \overline{A'Q}$

점 B와 zx 평면에 대하여 대칭인 점을 B'이라고 하면 zx 평면 위의 점 P에 대하여 $\overline{BP} = \overline{B'P}$

$$\therefore \overline{AQ} + \overline{PQ} + \overline{PB} = \overline{A'Q} + \overline{PQ} + \overline{B'P} \geq \overline{A'B'}$$

따라서 A'(-1, 2, 3), B'(3, -2, 1)이므로 구하는 최솟값은

$$\sqrt{(3-(-1))^2 + (-2-2)^2 + (1-3)^2} = 6 \quad \blacksquare 6$$

150

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(0-1)^2 + (0-0)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{2}, \\ \overline{BC} &= \sqrt{2}, \overline{CA} = \sqrt{(1-0)^2 + (0-\sqrt{2})^2 + (3-2)^2} = 2\end{aligned}$$

이므로 $\triangle ABC$ 는 $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\angle B = 90^\circ$ 인 직각이등변 삼각형이다.

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1$$

세 점 A, B, C의 xy 평면 위로의 정사영을 각각 A', B', C'이라고 하면

$$A'(1, 0, 0), B'(0, 0, 0), C'(0, \sqrt{2}, 0)$$

$$\overline{A'B'} = 1, \overline{B'C'} = \sqrt{2},$$

$$\overline{C'A'} = \sqrt{(1-0)^2 + (0-\sqrt{2})^2 + (0-0)^2} = \sqrt{3}$$

이므로 $\triangle A'B'C'$ 은 $\angle B' = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$$\therefore \triangle A'B'C' = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned}\text{이때 } \triangle ABC \text{의 } xy \text{평면 위로의 정사영이 } \triangle A'B'C' \text{이므로 } \triangle ABC \text{와 } xy \text{평면이 이루는 각의 크기를 } \theta \text{라고 하면} \\ \triangle A'B'C' = \triangle ABC \cos \theta \\ \therefore \cos \theta = \frac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \therefore \theta = \frac{\pi}{4} \quad \blacksquare \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

151

점 A(2, -3, 4)를 점 P(3, 1, -2)에 대하여 대칭이 동한 점을 A'이라고 하면 점 P는 선분 AA'의 중점이다. 즉, A'(a, b, c)이므로

$$3 = \frac{2+a}{2}, 1 = \frac{-3+b}{2}, -2 = \frac{4+c}{2}$$

$$\therefore a = 4, b = 5, c = -8$$

$$\therefore a+b+c = 1$$

■ 1

152

사면체 A-BCD가 정사면체이므로 모든 모서리의 길이는 서로 같다.

$$\text{즉, } \overline{AB} = \overline{AC} \text{에서 } \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 \text{이므로}$$

$$(a-4)^2 + (-2-1)^2 + \{2-(-1)\}^2$$

$$= (1-4)^2 + (1-1)^2 + \{2-(-1)\}^2$$

$$(a-4)^2 = 0 \quad \therefore a = 4$$

$$\text{또, } \overline{AD} = \overline{AC} \text{에서 } \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 \text{이므로}$$

$$(b-4)^2 + (2-1)^2 + \{3-(-1)\}^2$$

$$= (1-4)^2 + (1-1)^2 + \{2-(-1)\}^2$$

$$b^2 - 8b + 15 = 0, (b-3)(b-5) = 0$$

$$\therefore b = 5 (\because b > 4)$$

따라서 B(4, -2, 2), C(1, 1, 2), D(5, 2, 3)이므로

$\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{4+1+5}{3}, \frac{(-2)+1+2}{3}, \frac{2+2+3}{3} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{10}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3} \right) \quad \blacksquare \left(\frac{10}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3} \right)$$

153

$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 에서

$$\overline{AP} = 2\overline{BP} \quad \therefore \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$$

점 P의 좌표를 (x, y, z) 라고 하면

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4((x-3)^2 + y^2 + z^2)$$

$$\text{전개하여 정리하면 } (x-4)^2 + y^2 + z^2 = 4$$

따라서 점 P의 자취는 중심의 좌표가 (4, 0, 0), 반지름의 길이가 2인 구이다.

■ 중심 : (4, 0, 0), 반지름의 길이 : 2

154

[1단계] 중심의 좌표를 구한다.

$$\begin{aligned} \text{구 } x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 2z + 2 = 0 \text{에서} \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9 \text{이므로 구의 중심의} \\ \text{좌표는 } (3, 1, 1) \text{이고 반지름의 길이는 } 3 \text{이다.} \end{aligned}$$

[2단계] 점 B의 좌표를 구한다.

지름의 한 끝점이 A(1, 2, 3), 다른 끝점이 B이면

\overline{AB} 의 중점이 구의 중심이다.

따라서 B(a, b, c)라고 하면

$$\begin{aligned} \frac{1+a}{2} = 3, \frac{2+b}{2} = 1, \frac{3+c}{2} = 1 \\ \therefore a=5, b=0, c=-1 \quad \therefore B(5, 0, -1) \end{aligned}$$

답 B(5, 0, -1)

155

$$\begin{aligned} \text{구 } x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 2kz + 10 = 0, \text{ 즉} \\ (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-k)^2 = k^2 \text{이 } zx\text{-평면에 접하므로} \\ (\text{반지름의 길이}) = |\text{중심의 } y\text{-좌표}| = 3 \\ \therefore k=3 (\because k>0) \end{aligned}$$

답 3

156

[1단계] yz -평면과 만나서 생기는 원의 넓이를 구한다.

구 $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2kz + 14 = 0$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} y^2 + z^2 - 6y - 2kz + 14 = 0 \\ \therefore (y-3)^2 + (z-k)^2 = k^2 - 5 \end{aligned}$$

이 원의 넓이는 $\pi(k^2 - 5)$ ⑦

[2단계] zx -평면과 만나서 생기는 원의 넓이를 구한다.

구 $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2kz + 14 = 0$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 - 4x - 2kz + 14 = 0 \\ \therefore (x-2)^2 + (z-k)^2 = k^2 - 10 \end{aligned}$$

이 원의 넓이는 $\pi(k^2 - 10)$ ⑧

[3단계] 양수 k 의 값을 구한다.

⑦ : ⑧ = 3 : 2 이므로

$$\begin{aligned} \pi(k^2 - 5) : \pi(k^2 - 10) &= 3 : 2 \\ 2\pi(k^2 - 5) &= 3\pi(k^2 - 10), k^2 = 20 \\ \therefore k &= 2\sqrt{5} (\because k>0) \end{aligned}$$

답 $2\sqrt{5}$

157

구가 yz -평면에 접하면 구의 중심의 x -좌표의 절댓값이 반지름의 길이와 같다. 또, 이 구가 zx -평면에 접하면 구의 중심의 y -좌표의 절댓값도 반지름의 길이와 같다.

구가 x -좌표, y -좌표가 모두 양수인 두 점 (1, 1, 1),

(1, 1, 3)을 지나므로 구의 중심의 x -좌표, y -좌표도 모두 양수이다.

구하는 구의 반지름의 길이를 r 라고 하면 구의 방정식을 $(x-r)^2 + (y-r)^2 + (z-r)^2 = r^2$ 이라고 할 수 있다.

이 구가 점 (1, 1, 1)을 지나므로

$$(1-r)^2 + (1-r)^2 + (1-r)^2 = r^2$$

$$\therefore r^2 + c^2 - 4r - 2c + 3 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

또, 점 (1, 1, 3)을 지나므로

$$(1-r)^2 + (1-r)^2 + (3-r)^2 = r^2$$

$$\therefore r^2 + c^2 - 4r - 6c + 11 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{을 하면 } 4c - 8 = 0 \quad \therefore c = 2$$

$c=2$ 를 ①에 대입하면

$$r^2 - 4r + 3 = 0, (r-1)(r-3) = 0$$

$$\therefore r=1 \text{ 또는 } r=3$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 1 \text{ 또는}$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 9$$

$$\text{답 } (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 1 \text{ 또는}$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 9$$

158

구 $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 9-a$ 의 중심을 C, 반지름의 길이를 r_1 이라고 하면

$$C(1, -2, 2), r_1 = \sqrt{9-a}$$

구 $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$ 의 중심을 C', 반지름의 길이를 r_2 라고 하면

$$C'(-1, 0, 1), r_2 = 2$$

두 구의 중심 사이의 거리를 d 라고 하면

$$d = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-(-2))^2 + (1-2)^2} = 3$$

ㄱ. 두 구가 외접하면 $d = r_1 + r_2$ 이므로

$$\sqrt{9-a} + 2 = 3, \sqrt{9-a} = 1, 9-a = 1$$

$$\therefore a = 8 \text{ (거짓)}$$

ㄴ. 두 구가 내접하면 $d = |r_1 - r_2|$ 이므로

$$|\sqrt{9-a} - 2| = 3, \sqrt{9-a} - 2 = \pm 3$$

$$\sqrt{9-a} = 5 \text{ 또는 } \sqrt{9-a} = -1$$

$$\sqrt{9-a} > 0 \text{ 이므로 } \sqrt{9-a} = 5, 9-a = 25$$

$$\therefore a = -16 \text{ (참)}$$

ㄷ. 두 구가 한 원에서 만나면 ㄱ과 ㄴ의 사이에 있으므로

$$-16 < a < 8 \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ㄴ

159

구 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 는 중심이 O(0, 0, 0)이고 반지름의 길이가 3인 구이다.

점 A에서 구에 접선을 무수히 많이 그으면 접점은 오른쪽 그림과 같이 원을 그린다.

오른쪽 그림과 같이 구와 접선의 한 접점을 B라 하고, 점 B에서 \overline{OA} 에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 H는 접점이 그리는 원의 중심이다.

$$\text{이때 } \overline{OB} = 3, \overline{OA} = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = 5$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

직각삼각형 OAB의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{BH} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OB} \text{ 이므로}$$

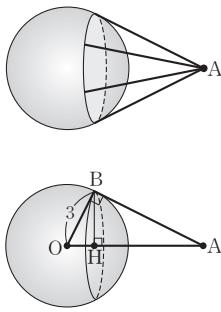
$$\frac{1}{2} \times 5 \times \overline{BH} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3$$

$$5\overline{BH} = 12 \quad \therefore \overline{BH} = \frac{12}{5}$$

따라서 접점이 그리는 도형의 둘레의 길이는 반지름의 길이가 $\frac{12}{5}$ 인 원의 둘레의 길이이므로

$$2\pi \times \frac{12}{5} = \frac{24}{5}\pi$$

$$\boxed{\frac{24}{5}\pi}$$



160

$$\text{구 } x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6z + 6 = 0 \quad \dots \textcircled{①}$$

에서 $(x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 4$ 이므로 구 $\textcircled{①}$ 은 중심이 A(-1, 0, 3)이고 반지름의 길이가 2이다.

$$\text{구 } x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 2z + 5 = 0 \quad \dots \textcircled{②}$$

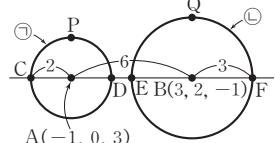
에서 $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ 이므로 구 $\textcircled{②}$ 은 중심이 B(3, 2, -1)이고 반지름의 길이가 3이다.

이때 두 구의 중심 사이의 거리는

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-(-1))^2 + (2-0)^2 + (-1-3)^2} = 6$$

즉, 두 구 $\textcircled{①}, \textcircled{②}$ 은 오른쪽 그림과 같으므로 직선

AB가 두 구와 만나는 점을 순서대로 C, D, E, F라고 하자.



각 구 위의 두 점 P, Q가 각각 두 점 D, E일 때 두 점 P, Q 사이의 거리는 최소이고, 최댓값은

$$\overline{DE} = \overline{AB} - \overline{AD} - \overline{BE}$$

$$= 6 - 2 - 3 = 1$$

또, 각 구 위의 두 점 P, Q가 각각 두 점 C, F일 때 두 점 P, Q 사이의 거리는 최대이고, 최댓값은

$$\overline{CF} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BF}$$

$$= 6 + 2 + 3 = 11$$

$$\boxed{\text{최댓값 : } 11, \text{ 최솟값 : } 1}$$

3 공간벡터

161

$$\neg \cdot \overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AD} = -\overline{AB} + \overline{AD} = -\vec{a} + \vec{b} \text{ (합)}$$

$$\neg \cdot \overline{DG} = \overline{DC} + \overline{CG} = \overline{AB} + \overline{AE} = \vec{a} + \vec{c} \text{ (합)}$$

$$\neg \cdot \overline{BH} = \overline{BA} + \overline{AD} + \overline{DH} = -\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AE} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \text{ (거짓)}$$

$$\neg \cdot \overline{EG} = \overline{EF} + \overline{FG} = \overline{AB} + \overline{AD} = \vec{a} + \vec{b} \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 \neg, \neg 이다.

$$\boxed{\neg, \neg}$$

162

점 G가 $\triangle ABC$ 의 무게중심이므로

$$\overline{OG} = \frac{\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}}{3}$$

이때 점 H는 선분 OG를 3:1로 내분하는 점이므로

$$\overline{OH} = \frac{3}{4}\overline{OG} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}}{3} = \frac{\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}}{4}$$

$$\therefore \overline{BH} = \overline{OH} - \overline{OB} = \frac{\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}}{4} - \overline{b} = \frac{\overline{a} - 3\overline{b} + \overline{c}}{4}$$

$$\boxed{\frac{\overline{a} - 3\overline{b} + \overline{c}}{4}}$$

163

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \overline{OC} - \overline{OA} = (-1, 2, 1) - (-2, 1, 3) \\ &= (1, 1, -2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{BD} &= \overline{OD} - \overline{OB} = (a, b, c) - (1, 0, -1) \\ &= (a-1, b, c+1) \end{aligned}$$

이때 $\overline{AC} = 3\overline{BD}$ 이므로

$$(1, 1, -2) = 3(a-1, b, c+1)$$

즉, $3a-3=1, 3b=1, 3c+3=-2$ 에서

$$a = \frac{4}{3}, b = \frac{1}{3}, c = -\frac{5}{3}$$

$$\therefore a+b+c = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} + \left(-\frac{5}{3}\right) = 0$$

$$\boxed{0}$$

164

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (2, 1, 1) - (1, 3, -1)$$

$$= (1, -2, 2)$$

$\vec{p} = (l, m, n)$ 의 크기가 9이므로

$$\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = 9 \quad \therefore l^2 + m^2 + n^2 = 81 \quad \dots \textcircled{①}$$

두 벡터 \overline{AB}, \vec{p} 의 방향이 반대이므로 음수 k 에 대하여

$$(l, m, n) = k(1, -2, 2)$$

$$\therefore l = k, m = -2k, n = 2k \quad \dots \textcircled{②}$$

$\textcircled{②}$ 을 $\textcircled{①}$ 에 대입하면

$$k^2 + 4k^2 + 4k^2 = 81, k^2 = 9 \quad \therefore k = -3 \quad (\because k < 0)$$

$k = -3$ 을 $\textcircled{②}$ 에 대입하면

$$l = -3, m = 6, n = -6$$

$$\therefore l + m - n = -3 + 6 - (-6) = 9$$

답 9

165

ㄱ. $\angle CAD = 45^\circ$ 이므로 두 벡터 \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AD} 가 이루는 각의 크기는 45° 이다.

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} &= |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AD}| \cos 45^\circ \\ &= \sqrt{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \text{ (참)} \end{aligned}$$

ㄴ. \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{FG} 는 평행하면서 방향이 같으므로 두 벡터 \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{FG} 가 이루는 각의 크기는 0° 이다.

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FG} &= |\overrightarrow{AD}| |\overrightarrow{FG}| \cos 0^\circ \\ &= 1 \times 1 \times 1 = 1 \text{ (참)} \end{aligned}$$

ㄷ. $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$ 이고 두 벡터 \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AE} 가 이루는 각의 크기는 90° 이므로 두 벡터 \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{CG} 가 이루는 각의 크기도 90° 이다.

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CG} &= |\overrightarrow{AD}| |\overrightarrow{CG}| \cos 90^\circ \\ &= 1 \times 1 \times 0 = 0 \text{ (거짓)} \end{aligned}$$

ㄹ. $\triangle AFC$ 가 정삼각형이므로 두 벡터 \overrightarrow{AF} , \overrightarrow{AC} 가 이루는 각의 크기는 60° 이다.

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AF}| |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 1 \text{ (참)} \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

166

$$|\vec{a}| = \sqrt{3} \text{이므로 } |\vec{a}|^2 = 3$$

$$\text{즉, } k^2 + (k-2)^2 + 1^2 = 3 \text{이므로}$$

$$2k^2 - 4k + 2 = 0, 2(k-1)^2 = 0 \quad \therefore k = 1$$

따라서 $\vec{a} = (1, -1, 1)$, $\vec{b} = (2, 1, 5)$ 이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, -1, 1) \cdot (2, 1, 5) = 6$$

답 6

167

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2, -1, -1) - (1, 2, 1) \\ &= (1, -3, -2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (4, 0, 2) - (1, 2, 1) \\ &= (3, -2, 1) \end{aligned}$$

\overrightarrow{AB} 와 \overrightarrow{AC} 가 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)라고 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} \\ &= \frac{1 \times 3 + (-3) \times (-2) + (-2) \times 1}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2} \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}} \\ &= \frac{7}{\sqrt{14} \sqrt{14}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

답 $\frac{\pi}{3}$

168

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \text{이므로 } 2x + y + 2z = 0 \quad \dots \text{①}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \text{이므로 } 2x - 4y - 3z = 0 \quad \dots \text{②}$$

$$\text{①, ②에서 } x = -\frac{z}{2}, y = -z \quad \dots \text{③}$$

이때 $|\vec{c}| = 3$ 이므로

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 3 \quad \therefore x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

③을 위의 식에 대입하면

$$\frac{z^2}{4} + z^2 + z^2 = 9, \frac{9}{4}z^2 = 9 \quad \therefore z = \pm 2$$

$$\therefore x = \mp 1, y = \mp 2, z = \pm 2 (\because \text{복부호 동순})$$

$$\therefore x + y + z = -1 \text{ 또는 } x + y + z = 1 \quad \text{답 } -1 \text{ 또는 } 1$$

169

주어진 등식의 우변이 \overrightarrow{AE} 로 표현되어 있으므로 좌변의 네 벡터 \overrightarrow{AG} , \overrightarrow{BH} , \overrightarrow{CE} , \overrightarrow{DF} 를 \overrightarrow{AE} 또는 \overrightarrow{AE} 와 서로 같은 벡터 \overrightarrow{BF} , \overrightarrow{CG} , \overrightarrow{DH} 를 이용하여 분해하면

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DF}$$

$$= (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG}) + (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FH}) + (\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GE}) + (\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HF})$$

$$= (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DH}) + (\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GE}) + (\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HF})$$

$$= (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{EG}) + (\overrightarrow{FH} - \overrightarrow{FH})$$

$$= 4\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AE}$$

$$\therefore k = 4$$

답 4

170

$$\vec{a} + k\vec{b} = (1, -3, 3) + k(-1, 0, 1)$$

$$= (-k+1, -3, k+3)$$

$$\therefore |\vec{a} + k\vec{b}| = \sqrt{(-k+1)^2 + (-3)^2 + (k+3)^2} = \sqrt{2k^2 + 4k + 19} = \sqrt{2(k+1)^2 + 17}$$

따라서 $|\vec{a} + k\vec{b}|$ 가 최소가 되는 것은 근호 안의 식

$$2(k+1)^2 + 17 = 0 \text{이 최소가 될 때이므로 구하는 } k \text{의 값은}$$

$$k = -1$$

답 -1

171

점 P는 선분 AB 위의 점이고

두 벡터 \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OP} 가 이루는

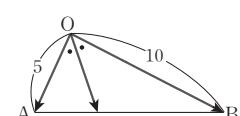
각의 크기와 두 벡터 \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OP}

가 이루는 각의 크기가 같으므

로 오른쪽 그림과 같이 선분 OP는 $\angle AOB$ 의 이등분선이다.

$$\text{이때 } |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5,$$

$$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{0^2 + (-8)^2 + (-6)^2} = 10 \text{이므로}$$



$$\overline{AP} : \overline{BP} = 5 : 10 = 1 : 2$$

따라서 점 P는 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점이고 \overrightarrow{OP} 는 점 P의 위치벡터이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{1 \cdot \overrightarrow{OB} + 2 \cdot \overrightarrow{OA}}{1+2} = \frac{(0, -8, -6) + 2(3, 4, 0)}{3} \\ &= (2, 0, -2)\end{aligned}$$

따라서 $a=2, b=0, c=-2$ 이므로

$$a+b+c=0$$

답 0

172

$0 \leq t \leq 1$ 이면 $0 \leq 1-t \leq 1$ 이고

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = \frac{(1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}}{(1-t)+t}$$

이므로 점 P는 선분 AB를 $t : (1-t)$ 로 내분하는 점이다. 이때 $t=0$ 이면 점 P는 점 A, $t=1$ 이면 점 P는 점 B 이므로 점 P의 자취는 선분 AB가 된다.

따라서 점 P의 자취의 길이는

$$\overline{AB} = \sqrt{(1-0)^2 + (-2-(-3))^2 + (1-(-1))^2}$$

$$= \sqrt{6}$$

답 $\sqrt{6}$

173

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ 이고 두 벡터 $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}$ 가 이루는 각의 크기는 45° 이다. 즉, 두 벡터 $\overrightarrow{AF}, -\overrightarrow{CD}$ 가 이루는 각의 크기도 45° 이므로 $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{CD}$ 가 이루는 각의 크기는 135° 이다.

이때 정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라고 하면

$$|\overrightarrow{AF}| = \sqrt{2}a, |\overrightarrow{CD}| = a$$
 이므로

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{AF}| |\overrightarrow{CD}| \cos 135^\circ$$

$$= \sqrt{2}a \cdot a \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -a^2 = -9$$

$$a^2 = 9 \quad \therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

따라서 구하는 정육면체의 부피는

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

답 27

174

$$\vec{a} + t\vec{b} = (1-3t, 2+t, -1-2t)$$

$$t\vec{a} - \vec{b} = (t+3, 2t-1, -t+2)$$

$$\therefore f(t) = (\vec{a} + t\vec{b}) \cdot (t\vec{a} - \vec{b})$$

$$= (1-3t)(t+3) + (2+t)(2t-1)$$

$$+ (-1-2t)(-t+2)$$

$$= t^2 - 8t - 1 = (t-4)^2 - 17$$

따라서 $f(t)$ 는 $t=4$ 일 때 최솟값 -17 을 가진다.

답 -17

다른풀이 $\vec{a} = (1, 2, -1), \vec{b} = (-3, 1, -2)$ 이므로

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6},$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14},$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times (-3) + 2 \times 1 + (-1) \times (-2) = 1$$

$$\therefore f(t) = (\vec{a} + t\vec{b}) \cdot (t\vec{a} - \vec{b})$$

$$= t|\vec{a}|^2 + (t^2 - 1)\vec{a} \cdot \vec{b} - t|\vec{b}|^2$$

$$= 6t + (t^2 - 1) - 14t = t^2 - 8t - 1$$

$$= (t-4)^2 - 17$$

따라서 $f(t)$ 는 $t=4$ 일 때 최솟값 -17 을 가진다.

175

$$\vec{a} - \vec{c} = (3, 1, 1) - (x, 0, 0) = (3-x, 1, 1)$$

$$\vec{b} - \vec{c} = (1, 0, 1) - (x, 0, 0) = (1-x, 0, 1)$$

두 벡터 $\vec{a} - \vec{c}, \vec{b} - \vec{c}$ 가 서로 수직이므로

$$(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$$

$$\therefore (3-x, 1, 1) \cdot (1-x, 0, 1) = 0$$

$$(3-x)(1-x) + 1 = 0, x^2 - 4x + 4 = 0, (x-2)^2 = 0$$

$$\therefore x = 2$$

답 2

176

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 H

가 원점, 모서리 HE, 모서리

HG, 모서리 HD가 각각 x

축, y축, z축에 놓이도록 좌

표공간에 직육면체를 놓으면 네 점 A, G, F, C의 좌표는

$$A(4, 0, 3), G(0, 5, 0), F(4, 5, 0), C(0, 5, 3)$$

$$\therefore \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA}$$

$$= (0, 5, 0) - (4, 0, 3) = (-4, 5, -3)$$

$$\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OF}$$

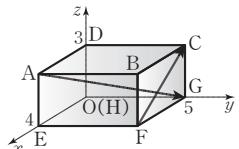
$$= (0, 5, 3) - (4, 5, 0) = (-4, 0, 3)$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{FC}}{|\overrightarrow{AG}| |\overrightarrow{FC}|}$$

$$= \frac{-4 \times (-4) + 5 \times 0 + (-3) \times 3}{\sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-3)^2} \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 3^2}}$$

$$= \frac{7}{5\sqrt{2} \times 5} = \frac{7\sqrt{2}}{50}$$

답 $\frac{7\sqrt{2}}{50}$



177

$$\text{직선 } \frac{x-1}{6} = -\frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{2} \text{에서}$$

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-2}$$

이므로 이 직선의 방향벡터는 $\vec{u} = (6, -3, -2)$ 이다.

이때 점 A(-1, 2, -3)을 지나고 방향벡터가

$\vec{u} = (6, -3, -2)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x+1}{6} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{-2} \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 (5, a, b)를 지나므로 $\textcircled{1}$ 에 $x=5, y=a,$

$z=b$ 를 대입하면

$$\frac{5+1}{6} = \frac{a-2}{-3} = \frac{b+3}{-2} \quad \therefore a=-1, b=-5$$

답 $a=-1, b=-5$

178

두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-4}{2-4} = \frac{z-(-1)}{0-(-1)}$$

$$\therefore \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-2} = z+1$$

이 직선이 zx 평면과 만나는 점의 y 좌표는 0이므로 직선의 방정식에 $y=0$ 을 대입하면

$$\frac{x-1}{2} = \frac{0-4}{-2} = z+1 \quad \therefore x=5, z=1$$

$$\therefore a=5, b=0, c=1 \quad \therefore a+b+c=6$$

답 6

179

[1단계] 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-(-2)}{0-(-2)} = \frac{z-(-1)}{-2-(-1)}$$

$$\therefore \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

이때 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1} = t$ (t 는 실수)로 놓으면

면

$$x=2t+1, y=2t-2, z=-t-1 \quad \text{.....} \odot$$

$$[2\text{단계}] \quad \frac{x-7}{2} = \frac{y-6}{3} = z=s \quad (s\text{는 실수})\text{로 놓으면}$$

$$x=2s+7, y=3s+6, z=s \quad \text{.....} \odot$$

[3단계] \odot, \odot 에서 x, y, z 를 소거하면

$$2t+1=2s+7, 2t-2=3s+6, -t-1=s$$

세 식을 연립하여 풀면 $t=1, s=-2$

따라서 \odot 또는 \odot 에서 교점의 좌표는 $(3, 0, -2)$

$$\therefore a+b-c=3+0-(-2)=5$$

답 5

180

두 직선 l_1, l_2 의 방향벡터는 각각

$$\vec{u}=(2, 1, 1), \vec{v}=(-1, -2, 1)$$

이때 두 직선이 이루는 각의 크기가 θ 이므로

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \\ &= \frac{|2 \times (-1) + 1 \times (-2) + 1 \times 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore 100 \cos \theta = 100 \times \frac{1}{2} = 50$$

답 50

181

세 직선 l_1, l_2, l_3 의 방향벡터는 각각

$$\vec{u}_1=(1, -3, 2), \vec{u}_2=(2, a, b), \vec{u}_3=(2, 3, c)$$

직선 l_1 이 직선 l_2 에 평행하므로 $\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$

즉, $\vec{u}_2=k\vec{u}_1$ (k 는 0이 아닌 실수)이므로

$$(2, a, b)=k(1, -3, 2)$$

$$2=k, a=-3k, b=2k \quad \therefore k=2, a=-6, b=4$$

또, 직선 l_1 이 직선 l_3 에 수직이므로 $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_3$

$$\text{즉, } \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3=0 \text{이므로 } (1, -3, 2) \cdot (2, 3, c)=0$$

$$2-9+2c=0 \quad \therefore c=\frac{7}{2}$$

$$\therefore a+b+2c=(-6)+4+2 \times \frac{7}{2}=5$$

답 5

182

두 직선 l_1, l_2 의 방향벡터는 각각

$$\vec{u}_1=(-2, 3, 1), \vec{u}_2=(3, -2, 1)$$

구하는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}=(a, b, c)$ 라고 하면

$$\vec{u} \cdot \vec{u}_1=0 \text{에서 } (a, b, c) \cdot (-2, 3, 1)=0$$

$$\therefore -2a+3b+c=0 \quad \text{.....} \odot$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u}_2=0 \text{에서 } (a, b, c) \cdot (3, -2, 1)=0$$

$$\therefore 3a-2b+c=0 \quad \text{.....} \odot$$

\odot, \odot 을 연립하여 a, c 를 b 로 나타내면 $a=b, c=-b$

$$\therefore \vec{u}=(b, b, -b)$$

따라서 원점을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(b, b, -b)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{b} = \frac{z}{-b} \quad \therefore x=y=-z \quad \text{답 } x=y=-z$$

183

$$[1\text{단계}] \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = -z=t \quad (t\text{는 실수})\text{로 놓으면}$$

$$x=2t-1, y=3t+1, z=-t$$

점 H는 직선 위의 점이므로

$$H(2t-1, 3t+1, -t)$$

$$[2\text{단계}] \quad \text{직선의 방향벡터는 } \vec{u}=(2, 3, -1)$$

즉, $\vec{AH} \perp \vec{u}$ 에서 $\vec{AH} \cdot \vec{u}=0$ 이고

$$\vec{AH}=\vec{OH}-\vec{OA}$$

$$=(2t-1, 3t+1, -t)-(2, -1, 7)$$

$$=(2t-3, 3t+2, -t-7)$$

이므로

$$(2t-3, 3t+2, -t-7) \cdot (2, 3, -1)=0$$

$$2(2t-3)+3(3t+2)-(-t-7)=0 \quad \therefore t=-\frac{1}{2}$$

따라서 수선의 밸 H 의 좌표는 $H\left(-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\therefore a+b+c=(-2)+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=-2 \quad \blacksquare -2$$

184

[1단계] $x-1=\frac{y-5}{2}=-z=t$ (t 는 실수)로 놓으면

$$x=t+1, y=2t+5, z=-t$$

점 A에서 직선 $x-1=\frac{y-5}{2}=-z$ 에 내린 수선의

발을 H라고 하면 점 H는 직선 위의 점이므로

$$H(t+1, 2t+5, -t)$$

[2단계] 직선의 방향벡터는 $\vec{u}=(1, 2, -1)$

즉, $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$ 에서 $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}=0$ 이고

$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}$$

$$=(t+1, 2t+5, -t)-(1, 2, 0)$$

$$=(t, 2t+3, -t)$$

이므로

$$(t, 2t+3, -t) \cdot (1, 2, -1)=0$$

$$t+2(2t+3)+t=0 \quad \therefore t=-1$$

따라서 수선의 밸 H 의 좌표는 $H(0, 3, 1)$

[3단계] 점 A(1, 2, 0)과 직선 $x-1=\frac{y-5}{2}=-z$ 사

이의 거리 d 는

$$d=\overline{AH}=\sqrt{(0-1)^2+(3-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{3}$$

$$\therefore d^2=3$$

$\blacksquare 3$

185

선분 AB의 중점을 M이라고 하면

$$M\left(\frac{2+4}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{-5-1}{2}\right) \quad \therefore M(3, 2, -3)$$

직선 $\frac{x+1}{3}=y-1=\frac{z+1}{5}$ 의 방향벡터는

$$\vec{u}=(3, 1, 5)$$

따라서 점 M(3, 2, -3)을 지나고 방향벡터가

$\vec{u}=(3, 1, 5)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-3}{3}=y-2=\frac{z+3}{5} \quad \blacksquare \quad \frac{x-3}{3}=y-2=\frac{z+3}{5}$$

186

두 점 A, G의 좌표는 A(2, 0, 4), G(0, 3, 0)

따라서 두 점 A, G를 지나는 직선 AG의 방정식은

$$\frac{x-2}{0-2}=\frac{y-0}{3-0}=\frac{z-4}{0-4} \quad \therefore \frac{x-2}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z-4}{-4}$$

$$\blacksquare \quad \frac{x-2}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z-4}{-4}$$

187

[1단계] 수직 조건을 이용한다.

두 직선 l_1, l_2 의 방향벡터는 각각

$$\vec{u}=(1, 2, a), \vec{v}=(3, 1, 5)$$

$\vec{u} \perp \vec{v}$ 에서 $\vec{u} \cdot \vec{v}=0$ 이므로

$$(1, 2, a) \cdot (3, 1, 5)=0$$

$$3+2+5a=0 \quad \therefore a=-1$$

[2단계] 두 직선이 만날 조건을 이용한다.

$$l_1: x-1=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-1}=t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=t+1, y=2t+2, z=-t+3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$l_2: \frac{x+3}{3}=y+1=\frac{z+b}{5}=s \quad (s \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=3s-3, y=s-1, z=5s-b \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 x, y, z 를 소거하면

$$t+1=3s-3, 2t+2=s-1, -t+3=5s-b$$

앞의 두 식을 연립하여 풀면 $t=-1, s=1$

이것을 $-t+3=5s-b$ 에 대입하면

$$4=5-b \quad \therefore b=1 \quad \blacksquare a=-1, b=1$$

188

[1단계] 두 직선의 교점을 찾는다.

$$l_1: \frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-2}{6}=t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=4t+1, y=5t-2, z=6t+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$l_2: \frac{x-3}{2}=\frac{y}{2}=-z+1=s \quad (s \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=2s+3, y=2s, z=-s+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 x, y, z 를 소거하면

$$4t+1=2s+3, 5t-2=2s, 6t+2=-s+1$$

세 식을 연립하여 풀면 $t=0, s=-1$

즉, $\textcircled{1}$ 또는 $\textcircled{2}$ 에서 교점의 좌표는 $(1, -2, 2)$

[2단계] 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구한다.

따라서 두 점 $(1, -2, 2), (2, 1, -3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-(-2)}{1-(-2)}=\frac{z-2}{-3-2}$$

$$\therefore x-1=\frac{y+2}{3}=\frac{z-2}{-5}$$

$$\blacksquare x-1=\frac{y+2}{3}=\frac{z-2}{-5}$$

189

$$x-1=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}=t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=t+1, y=2t+2, z=3t+3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

즉, 구와 직선의 교점의 좌표를 $(t+1, 2t+2, 3t+3)$ 으로 놓을 수 있으므로 ⑦을 구의 방정식에 대입하면

$$(t+1-1)^2 + (2t+2-2)^2 + (3t+3-3)^2 = 14$$

$$14t^2 = 14, t^2 = 1 \quad \therefore t = \pm 1$$

따라서 교점 A, B의 좌표는 $(2, 4, 6), (0, 0, 0)$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2} = 2\sqrt{14}$$

답 $2\sqrt{14}$

190

두 직선 l_1, l_2 의 방향벡터는 각각

$$\vec{u} = (2a, a+1, 1), \vec{v} = (1, 4, -1)$$

이때 두 직선 l_1, l_2 가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{4} &= \frac{|2a \times 1 + (a+1) \times 4 + 1 \times (-1)|}{\sqrt{(2a)^2 + (a+1)^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 4^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{|6a+3|}{\sqrt{5a^2 + 2a + 2} \times 3\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\text{즉}, \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|2a+1|}{\sqrt{2}\sqrt{5a^2 + 2a + 2}} \text{ 이므로}$$

$$|2a+1| = \sqrt{5a^2 + 2a + 2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 2a + 1 = 0, (a-1)^2 = 0 \quad \therefore a = 1$$

답 1

191

구 $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z + a = 0$ 에서

$$x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 5-a$$

이므로 구의 중심은 C(0, 1, 2)이고 반지름의 길이는 $\sqrt{5-a}$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 구와 직선이 접하는 접점을 H라고 하면 점 H는 구의 중심 C에서 직선에 내린 수선의 발이다.

$$\frac{x-2}{-1} = y+1 = \frac{z-1}{2} = t \quad (t \text{는 실수})$$

로 놓으면

$$x = -t+2, y = t-1, z = 2t+1$$

점 H는 직선 위의 점이므로 $H(-t+2, t-1, 2t+1)$

한편, 직선의 방향벡터는 $\vec{u} = (-1, 1, 2)$

즉, $\overrightarrow{CH} \perp \vec{u}$ 에서 $\overrightarrow{CH} \cdot \vec{u} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CH} &= \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} = (-t+2, t-1, 2t+1) - (0, 1, 2) \\ &= (-t+2, t-2, 2t-1) \end{aligned}$$

이므로

$$(-t+2, t-2, 2t-1) \cdot (-1, 1, 2) = 0$$

$$-(-t+2) + (t-2) + 2(2t-1) = 0$$

$$6t-6=0 \quad \therefore t=1 \quad \therefore H(1, 0, 3)$$

따라서 구의 반지름의 길이는

$$\overline{CH} = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{3}$$

$$\text{이므로 } \sqrt{5-a} = \sqrt{3} \quad \therefore a=2$$

답 2

192

직선 AB와 직선 $x-2 = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}$ 의 교점을 H라

고 하면 점 H는 점 A에서 직선 $x-2 = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}$

에 내린 수선의 발임을 이용한다.

$$[1\text{단계}] \quad x-2 = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2} = t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=t+2, y=2t-1, z=2t-3$$

점 H는 직선 위의 점이므로

$$H(t+2, 2t-1, 2t-3)$$

[2단계] 직선의 방향벡터는 $\vec{u} = (1, 2, 2)$

$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$ 에서 $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$ 이고

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}$$

$$= (t+2, 2t-1, 2t-3) - (1, -2, 3)$$

$$= (t+1, 2t+1, 2t-6)$$

이므로

$$(t+1, 2t+1, 2t-6) \cdot (1, 2, 2) = 0$$

$$(t+1) + 2(2t+1) + 2(2t-6) = 0$$

$$9t-9=0 \quad \therefore t=1$$

따라서 수선의 발 H의 좌표는 H(3, 1, -1)

[3단계] 점 A(1, -2, 3)과 점 B(a, b, c)를 잇는 선분

AB의 중점이 점 H(3, 1, -1)이므로

$$3 = \frac{1+a}{2}, 1 = \frac{-2+b}{2}, -1 = \frac{3+c}{2}$$

$$\therefore a=5, b=4, c=-5$$

$$\therefore a+b+c=4$$

답 4

193

선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점이 P이므로

$$P\left(\frac{1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2}{1+2}, \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot (-3)}{1+2}, \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 1}{1+2}\right)$$

$$\therefore P(1, -2, 2)$$

이때 구하는 평면의 법선벡터는

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-1, 0, 4) - (2, -3, 1)$$

$$= (-3, 3, 3)$$

따라서 점 P를 지나고 직선 AB에 수직인 평면의 방정식은 $-3(x-1) + 3(y+2) + 3(z-2) = 0$

$$\therefore x-y-z-1=0$$

답 $x-y-z-1=0$

194

점 (2, -1, 3)을 지나고 법선벡터가 $\vec{n} = (1, -2, 3)$

인 평면 α 의 방정식은

$$1 \cdot (x-2) - 2(y+1) + 3(z-3) = 0$$

$$\therefore x-2y+3z-13=0 \quad \dots \textcircled{1}$$

점 $(1, k, k-2)$ 가 평면 α 위의 점이므로

$$x=1, y=k, z=k-2$$
 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$1-2k+3(k-2)-13=0$$

$$\therefore k=18$$

답 18

195

세 점 A, B, C를 지나는 평면 α 의 방정식을

$$ax+by+cz+d=0$$
 으로 놓으면

$$-a-b+c+d=0, a+b+2c+d=0,$$

$$3a+b+4c+d=0$$

세 식을 연립하여 a, c, d 를 b 로 나타내면

$$a=-2b, c=2b, d=-3b$$

즉, 평면 α 의 방정식은

$$-2bx+by+2bz-3b=0$$

$$\therefore 2x-y-2z+3=0$$

따라서 원점과 평면 α 사이의 거리는

$$\frac{|2 \times 0 - 0 - 2 \times 0 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{9}} = 1$$

답 1

196

[1단계] 직선 AA'은 평면 $2x-y+z+3=0$ 에 수직이므로 평면의 법선벡터 $\vec{n}=(2, -1, 1)$ 과 직선 AA'의 방향벡터는 평행하다.

즉, 직선 AA'의 방향벡터도 $\vec{n}=(2, -1, 1)$ 이므로 직선 AA'의 방정식은

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = z-3 \quad \dots \textcircled{1}$$

[2단계] $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = z-3=t$ (t 는 실수)로 놓으면

$$x=2t+1, y=-t+2, z=t+3$$

직선 $\textcircled{1}$ 과 평면 $2x-y+z+3=0$ 의 교점을 H라고 하면 $H(2t+1, -t+2, t+3)$

이때 점 H는 평면 $2x-y+z+3=0$ 위의 점이므로

$$2(2t+1) - (-t+2) + (t+3) + 3 = 0$$

$$\therefore t = -1$$

$$\therefore H(-1, 3, 2)$$

[3단계] 두 점 A(1, 2, 3), A'(a, b, c)를 잇는 선분 AA'의 중점이 점 H이므로

$$\frac{1+a}{2} = -1, \frac{2+b}{2} = 3, \frac{3+c}{2} = 2$$

$$\therefore a = -3, b = 4, c = 1$$

$$\therefore a+b+c = 2$$

답 2

197

두 평면 $2x+y+z=1, ax+2y-z=5$ 의 법선벡터는 각각 $\vec{n}_1=(2, 1, 1), \vec{n}_2=(a, 2, -1)$

이때 두 평면이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{|2 \times a + 1 \times 2 + 1 \times (-1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{a^2 + 2^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{|2a+1|}{\sqrt{6} \sqrt{a^2+5}} \end{aligned}$$

$2|2a+1| = \sqrt{6} \sqrt{a^2+5}$ 에서 양변을 제곱하여 정리하면

$$5a^2 + 8a - 13 = 0, (a-1)(5a+13) = 0$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=-\frac{13}{5}$$

그런데 a 는 정수이므로 $a=1$

답 1

198

세 평면 α, β, γ 의 법선벡터는 각각

$$\vec{n}_1=(1, -2, a-3), \vec{n}_2=(3, a, -1), \vec{n}_3=(2, 2b, b)$$

이때 두 평면 α, β 는 수직이므로 \vec{n}_1, \vec{n}_2 도 수직이다.

즉, $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ 이므로

$$(1, -2, a-3) \cdot (3, a, -1) = 0$$

$$3-2a-(a-3)=0, 3a=6 \quad \therefore a=2$$

$$\therefore \vec{n}_1=(1, -2, -1)$$

또, 두 평면 α, γ 가 평행하므로 \vec{n}_1, \vec{n}_3 도 평행하다.

즉, $\vec{n}_3=k\vec{n}_1$ (k 는 0이 아닌 실수)이므로

$$(2, 2b, b)=k(1, -2, -1)$$

$$2=k, 2b=-2k, b=-k$$

$$\therefore k=2, b=-2$$

답 $a=2, b=-2$

199

구 $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 11$ 의 중심을 C라고 하면 $C(2, -1, 4)$

점 A(1, 2, 3)은 구 위의 점이고 구하는 평면은 구에 접하므로 구의 반지름 AC는 구하는 평면에 수직이다.

즉, 구하는 평면의 법선벡터는 \overrightarrow{CA} 와 평행하다.

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$$

$$= (1, 2, 3) - (2, -1, 4)$$

$$= (-1, 3, -1)$$

따라서 법선벡터가 $\overrightarrow{CA} = (-1, 3, -1)$ 이고 점

A(1, 2, 3)을 지나는 평면의 방정식은

$$-(x-1) + 3(y-2) - (z-3) = 0$$

$$\therefore x-3y+z+2=0$$

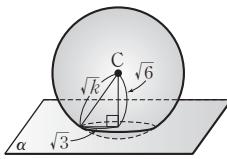
답 $x-3y+z+2=0$

200

구의 중심을 C라고 하면 $C(2, 1, -2)$

구의 중심 C와 평면 α 사이의
거리는

$$\frac{|2 \times 2 - 1 - (-2) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$



구와 평면이 만나서 생기는 원의 넓이가 3π 이므로 이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$ 이다.

또, 구의 반지름의 길이는 \sqrt{k} 이므로

$$(\sqrt{k})^2 = (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{3})^2 \quad \therefore k=9$$

답 9

201

평면 $x+2y-3z=12$ 가 x 축과 만나는 점이 P이므로
 $y=0, z=0$ 을 평면의 방정식에 대입하면

$$x=12 \quad \therefore P(12, 0, 0)$$

같은 방법으로 주어진 평면이 y 축, z 축과 만나는 점 Q, R의 좌표를 각각 구하면 $Q(0, 6, 0), R(0, 0, -4)$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (-12, 6, 0)$$

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (-12, 0, -4)$$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = (-12, 6, 0) \cdot (-12, 0, -4) = 144$$

답 144

202

구하는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$ 으로 놓으면 평면의 법선벡터 $\vec{n}=(a, b, c)$ 와 직선의 방향벡터 $\vec{u}=(2, 3, 4)$ 는 서로 수직이므로

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \text{에서 } (a, b, c) \cdot (2, 3, 4) = 0$$

$$\therefore 2a+3b+4c=0 \quad \dots \dots \textcircled{①}$$

점 A(0, 1, 2)는 구하는 평면 위의 점이므로

$$b+2c+d=0 \quad \dots \dots \textcircled{②}$$

직선이 지나는 한 점 (1, 2, 3)도 평면 위의 점이므로

$$a+2b+3c+d=0 \quad \dots \dots \textcircled{③}$$

①, ②, ③을 연립하여 풀면

$$a=c, b=-2c, d=0$$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$cx-2cy+cz=0$$

$$\therefore x-2y+z=0$$

답 $x-2y+z=0$

다른풀이 점 A(0, 1, 2)를 지나고 법선벡터가

$\vec{n}=(a, b, c)$ 인 평면의 방정식은

$$ax+b(y-1)+c(z-2)=0 \quad \dots \dots \textcircled{④}$$

직선 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ 위의 두 점을 찾으면

$$(i) \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}=0 \text{에서 } (1, 2, 3)$$

$$(ii) \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}=1 \text{에서 } (3, 5, 7)$$

두 점 (1, 2, 3)과 (3, 5, 7)은 모두 평면 ④ 위의 점이므로 $a+b+c=0, 3a+4b+5c=0$

두 식을 연립하여 a, b 를 c 로 나타내면

$$a=c, b=-2c$$

따라서 이를 ④에 대입하면 구하는 평면의 방정식은

$$cx-2c(y-1)+c(z-2)=0$$

$$\therefore x-2y+z=0$$

203

[1단계] $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}$ 가 최소가 되는 경우를 파악한다.

두 점 A, B가 평면 α 에 대하여

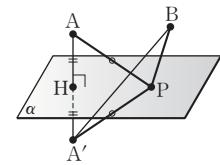
여 같은 쪽에 있으므로 점 A

의 평면 α 에 대한 대칭점을

$A'(a, b, c)$ 라고 하면

$$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{A'P}+\overrightarrow{BP}$$

$$\geq \overline{A'B}$$



[2단계] 점 A의 평면 α 에 대한 대칭점을 구한다.

직선 AA'은 평면 α : $3x+2y+z=6$ 에 수직이므로 평면의 법선벡터 $\vec{n}=(3, 2, 1)$ 과 직선 AA'의 방향벡터는 평행하다.

즉, 직선 AA'의 방향벡터도 $\vec{n}=(3, 2, 1)$ 이므로 직선 AA'의 방정식은

$$\frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{1}=t \quad \dots \dots \textcircled{⑤}$$

$$\frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{1}=t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=3t+4, y=2t+3, z=t+2$$

직선 ⑤과 평면 α 의 교점을 H라고 하면

$$H(3t+4, 2t+3, t+2)$$

이때 점 H는 평면 α 위의 점이므로

$$3(3t+4)+2(2t+3)+(t+2)=6$$

$$\therefore t=-1$$

$$\therefore H(1, 1, 1)$$

두 점 A(4, 3, 2), A'(a, b, c)를 잇는 선분 AA'의 중점이 점 H이므로

$$\frac{4+a}{2}=1, \frac{3+b}{2}=1, \frac{2+c}{2}=1$$

$$\therefore a=-2, b=-1, c=0$$

$$\therefore A'(-2, -1, 0)$$

[3단계] $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}$ 의 최솟값을 구한다.

따라서 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은

$$\overline{AB} = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (1 - (-1))^2 + (4 - 0)^2} = 6$$

답 6

204

두 평면 $x + 2y + 2z = 3$, $2x - 2y - z = 1$ 의 법선벡터는 각각 $\vec{n}_1 = (1, 2, 2)$, $\vec{n}_2 = (2, -2, -1)$

두 평면이 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)라고 하면

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|1 \times 2 + 2 \times (-2) + 2 \times (-1)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{4}{9}\end{aligned}$$

정삼각형 F , 삼각형 F' 의 넓이를 각각 S, S' 이라고 하면

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = 9\sqrt{3} \text{이므로}$$

$$S' = S \cos \theta = 9\sqrt{3} \times \frac{4}{9} = 4\sqrt{3}$$

답 4 $\sqrt{3}$

205

직선 $\frac{x-1}{a-1} = \frac{y+a}{a+1} = \frac{z}{10}$ 의 방향벡터는

$$\vec{u} = (a-1, a+1, 10)$$

또, 평면 $(a-1)x + (a+1)y - z = 2$ 의 법선벡터는

$$\vec{n} = (a-1, a+1, -1)$$

이때 직선과 평면이 평행하면 직선의 방향벡터와 평면의 법선벡터는 서로 수직이므로

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$$

즉, $(a-1, a+1, 10) \cdot (a-1, a+1, -1) = 0$ 이므로

$$(a-1)^2 + (a+1)^2 - 10 = 0$$

$$2a^2 - 8 = 0, a^2 = 4$$

$$\therefore a = \pm 2$$

답 ±2

206

평면 $x - 2y + 2z - 3 = 0$ 에 평행한 평면 α 의 방정식을 $x - 2y + 2z + d = 0$ 으로 놓을 수 있다.

원점과 평면 $x - 2y + 2z + d = 0$ 사이의 거리가 3이므로

$$\frac{|0 - 2 \times 0 + 2 \times 0 + d|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 3, |d| = 9$$

$$\therefore d = \pm 9$$

따라서 구하는 평면 α 의 방정식은

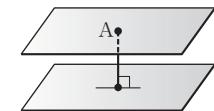
$$x - 2y + 2z + 9 = 0 \text{ 또는 } x - 2y + 2z - 9 = 0$$

답 $x - 2y + 2z + 9 = 0$ 또는 $x - 2y + 2z - 9 = 0$

207

두 평면 $2x - 2y + z = 1$, $2x - 2y + z = 10$ 의 법선벡터는 각각 $\vec{n}_1 = \vec{n}_2 = (2, -2, 1)$

즉, 두 평면의 법선벡터가 서로 같으므로 두 평면은 평행하고 평행한 두 평면 사이의 거리는 한 평면 위의 한 점에서 다른 평면까지의 거리로 구할 수 있다.



따라서 구하는 거리는 평면 $2x - 2y + z = 1$ 위의 한 점 $(0, 0, 1)$ 에서 평면 $2x - 2y + z - 10 = 0$ 까지의 거리이므로

$$\frac{|2 \times 0 - 2 \times 0 + 1 - 10|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{9}{3} = 3$$

답 3

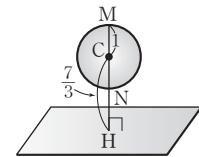
208

구 $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 1$ 의 중심을 C라고 하면 $C(1, -2, -1)$ 이고 반지름의 길이는 1이다.

구의 중심 C에서 평면 $2x - y + 2z + 5 = 0$ 에 내린 수선의 발을 H라고 하면 구의 중심과 평면 사이의 거리는

$$\overline{CH} = \frac{|2 \times 1 - (-2) + 2 \times (-1) + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{7}{3}$$

따라서 구 위의 점과 평면 사이의 최대 거리는 오른쪽 그림에서 \overline{MH} 의 길이와 같으므로 구하는 최댓값은



$$\overline{CM} + \overline{CH} = 1 + \frac{7}{3} = \frac{10}{3}$$

답 $\frac{10}{3}$

209

구 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$ 에서

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$$

이므로 구의 중심을 C라고 하면 $C(1, 2, 3)$ 이고 반지름의 길이는 $\sqrt{14}$ 이다.

이 구와 평면 $3x + 2y + z = k$, 즉 $3x + 2y + z - k = 0$ 이 접하면 구의 중심 $C(1, 2, 3)$ 에서 평면까지의 거리가 구의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|3 \times 1 + 2 \times 2 + 3 - k|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \sqrt{14}$$

$$|10 - k| = 14, 10 - k = \pm 14$$

$$\therefore k = -4 \text{ 또는 } k = 24$$

따라서 구하는 합은

$$(-4) + 24 = 20$$

답 20