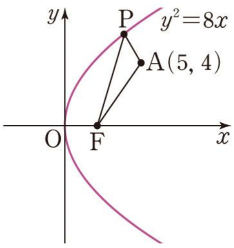
대단원 test

Ⅰ. 평면곡선

____반 ____번 이름______________

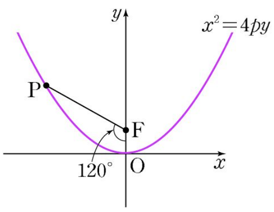
01 오른쪽 그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 임의의 점 P와 점 A(5, 4)에 대하여 삼각형 PFA의 둘레의 길이의 최솟값을 구하여라.



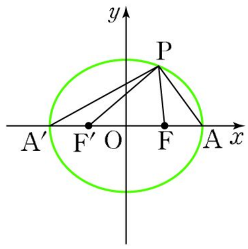
02 직선 $y=m(x-3)+1$과 포물선 $(y-1)^2=12x$가 두 점 P, Q에서 만나고, 선분 PQ의 중점의 x좌표가 5일 때, 선분 PQ의 길이는?

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 20

03 오른쪽 그림과 같이 포물선 $x^2=4py\ (p>0)$의 초점 F와 이 포물선 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}=40$, $\angle\mathrm{OFP}=120^\circ$일 때, 초점과 꼭짓점 사이의 거리를 구하여라.



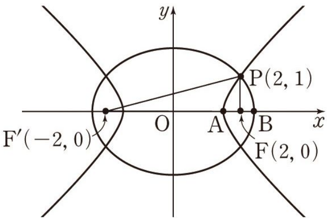
04 오른쪽 그림과 같이 중심이 원점인 타원의 두 초점을 F, F′이라 하고, 장축의 양 끝점을 A, A′이라고 하자. 이 타원 위의 점 P에 대하여 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는 12이고, 삼각형 PA′A의 넓이는 삼각형 PF′F의 넓이의 2배일 때, 이 타원의 단축의 길이를 구하여라.



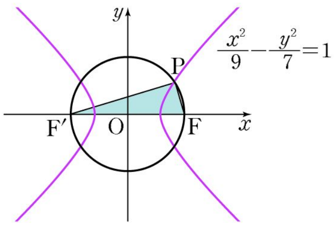
05 타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 위의 점 P와 두 초점 F, F′에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF'}}^2$의 최솟값을 구하여라.

06 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$의 두 초점 F$(c, 0)$, F′$(-c, 0)$과 이 타원 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PF'}}:\overline{\mathrm{PF}}=3:1$일 때, 삼각형 PF′F의 넓이를 구하여라. (단, $c>0$)

07 오른쪽 그림과 같이 두 초점 $\mathrm{F}(2,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-2,\ 0)$을 공유하는 타원과 쌍곡선의 교점 중에서 한 점 P의 좌표가 $\mathrm{P}(2,\ 1)$일 때, 선분 AB의 길이를 구하여라.



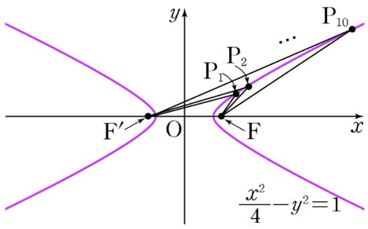
08 오른쪽 그림과 같이 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$의 두 초점을 F, F′, 이 쌍곡선과 두 초점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 교점 중에서 제1사분면 위에 있는 점을 P라고 할 때, 삼각형 PF′F의 넓이를 구하여라.



09 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{16}=1$과 이 쌍곡선의 점근선이 직선 $y=k(k>0)$와 만나는 네 점의 x좌표가 차례로 등차수열을 이룰 때, 상수 k의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

10 다음 그림과 같이 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$의 두 초점을 F, F′이라고 할 때, 점 F′으로부터의 거리가 6, 7, 8, ⋯ , 15가 되는 쌍곡선 위의 점을 차례로 P_1, P_2, P_3⋯, P_{10}이라고 하자. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\overline{\mathrm{FP}_n}$의 값을 구하여라. (단, P_1, P_2, P_3, ⋯, P_{10}은 모두 제1사분면 위에 있다.)



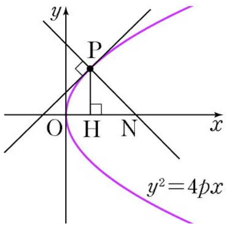
11 매개변수 t로 나타내어진 함수

$$x=2\cos t,\ y=\sin t$$

에 대하여 $t=\dfrac{\pi}{4}$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값을 구하여라.

12 곡선 $ax^2+y^2+xy=b$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$일 때, 두 실수 a, b의 곱 ab의 값을 구하여라.

13 오른쪽 그림과 같이 포물선 $y^2=4px\ (p>0)$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 점 P에서의 접선에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 N이라고 할 때, 선분 NH의 길이는? (단, $x_1 \neq 0$)



① 1 ② 2 ③ p
④ $2p$ ⑤ $4p$

14 점 $\mathrm{P}(-3,\ 1)$에서 포물선 $y^2=x$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라고 할 때, 두 점 A, B의 x좌표의 합을 구하여라.

15 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\ b>0)$ 위의 점 P에서 그은 접선과 x축, y축과의 교점을 각각 A, B라고 할 때, 원점 O에 대하여 삼각형 ABO의 넓이의 최솟값은?

(단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)

① $2a$ ② $2b$ ③ $a+b$
④ ab ⑤ $\sqrt{a^2+b^2}$

16 쌍곡선 $x^2-y^2=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(\sqrt{2},\ 1)$에서의 접선 l과 이 쌍곡선의 두 점근선과의 교점 중 제1사분면, 제4사분면에 있는 점을 각각 A, B라고 할 때, $\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}}$를 구하여라.

17 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 좌표 $(x,\ y)$가 t를 매개변수로 하여

$$x=\sqrt{3}\,t^2+1,\ y=2t^3+3$$

으로 나타내어질 때, 점 P가 그리는 곡선에 대하여 접선의 기울기가 $\sqrt{3}$인 점의 좌표를 구하여라.

18 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=2\sec t,\ y=\sqrt{3}\tan t$$

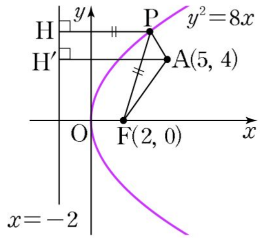
에 대하여 점 $(a,\ 0)$에서 그은 한 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\dfrac{\pi}{4}$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

$\left(\text{단, } -\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2},\ t\neq 0\right)$

Ⅰ. 평면곡선

01 주어진 포물선의 초점의 좌표는 F$(2,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, A에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라고 하면



$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$이므로 삼각형 PFA의 둘레의 길이는

$$\overline{\mathrm{FA}}+\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{FA}}+\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PH}}$$
$$\geq \overline{\mathrm{FA}}+\overline{\mathrm{AH'}}$$

따라서 삼각형 PFA의 둘레의 길이의 최솟값은

$$\overline{\mathrm{FA}}+\overline{\mathrm{AH'}}=\sqrt{(5-2)^2+4^2}+7=12$$

02 주어진 포물선의 초점을 F라고 하면 F$(3,\ 1)$이고, 준선의 방정식은 $x=-3$이다.

주어진 직선을 정리하면

$$m(x-3)+(-y+1)=0$$

이므로 이 직선은 점 F$(3, 1)$을 지난다.

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 a, b라고 하면

$$\frac{a+b}{2}=5,\ \text{즉}\quad a+b=10$$

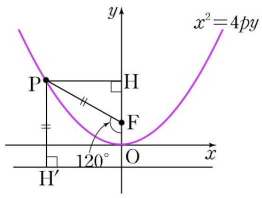
두 점 P, Q에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라고 하면

$$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}=a+3$$
$$\overline{\mathrm{FQ}}=\overline{\mathrm{QH'}}=b+3$$
$$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{FQ}}$$
$$=(a+3)+(b+3)$$
$$=(a+b)+6=16$$

따라서 ④이다.

03 주어진 포물선의 초점의 좌표는 F$(0,\ p)$이고, 준선의 방정식은 $y=-p$이다.

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H, 준선 $y=-p$에 내린 수선의 발을 H′이라고 하자.



직각삼각형 PFH에서 $\angle\mathrm{PFH}=60^\circ$이고, $\overline{\mathrm{PF}}=40$이므로

$$\overline{\mathrm{HF}}=\overline{\mathrm{PF}}\cos 60^\circ=40\times\frac{1}{2}=20$$
$$\overline{\mathrm{PH'}}=2p+20$$

포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PH'}}=\overline{\mathrm{PF}}$이므로

$$2p+20=40,\ p=10$$

따라서 초점과 꼭짓점 사이의 거리는 10이다.

04 타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{AA'}}$

삼각형 PF′F의 둘레의 길이는 12이므로

$$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{FF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=12$$
$$\overline{\mathrm{AA'}}+\overline{\mathrm{FF'}}=12 \qquad \cdots\cdots ①$$

삼각형 PA′A의 넓이는 삼각형 PF′F의 넓이의 2배이므로 $\overline{\mathrm{AA'}}=2\overline{\mathrm{FF'}}$ ……②

①, ②를 연립하여 풀면 $\overline{\mathrm{AA'}}=8$, $\overline{\mathrm{FF'}}=4$

따라서 주어진 타원의 방정식을

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$이라고 하면 $a=4$, $c=2$이므로

$$b^2=a^2-c^2=12,\ b=\pm 2\sqrt{3}$$

따라서 단축의 길이는 $4\sqrt{3}$이다.

05 타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=10$이므로

$$\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF'}}^2=(\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}})^2-2\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}$$
$$=100-2\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}$$

$\overline{\mathrm{PF}}>0$, $\overline{\mathrm{PF'}}>0$이므로

$$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}\geq 2\sqrt{\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}}$$
$$10\geq 2\sqrt{\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}},\ \overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}\leq 25$$

(단, 등호는 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PF'}}=5$일 때 성립)

따라서 $\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}=25$일 때, $\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF'}}^2$의 값은 최소가 되므로 그 최솟값은

$$\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF'}}^2=100-2\times25=50$$

06 주어진 타원의 초점의 좌표는

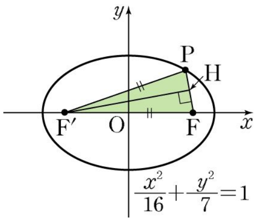
$F(3,\ 0),\ F'(-3,\ 0)$

타원의 정의에 의하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}=8$이고,

$\overline{PF'}=3\overline{PF}$이므로

$\overline{PF}=2,\ \overline{PF'}=6$

$\overline{FF'}=6$이므로 오른쪽 그림과 같이 이등변삼각형 $PF'F$의 점 F'에서 $\overline{PF}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$$\overline{HF}=\frac{1}{2}\overline{PF}=1$$

$$\overline{HF'}=\sqrt{\overline{FF'}^2-\overline{HF}^2}=\sqrt{35}$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{PF}\times\overline{HF'}=\sqrt{35}$$

07 두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b라고 하자.

$\overline{PF}=1,\ \overline{PF'}=\sqrt{(2+2)^2+1^2}=\sqrt{17}$이므로

쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF'}-\overline{PF}=2a,\ \text{즉}\ \ a=\frac{\sqrt{17}-1}{2}$$

타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF'}+\overline{PF}=2b,\ \text{즉}\ \ b=\frac{\sqrt{17}+1}{2}$$

따라서 $\overline{AB}=b-a=1$

08 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$F(4,\ 0),\ F'(-4,\ 0)$

즉, $\overline{FF'}=8$

점 P의 좌표를 $P(a,\ b)\ (a>0,\ b>0)$라고 하면

$$\overline{OP}=\sqrt{a^2+b^2}=4$$

즉, $a^2+b^2=16$ ……①

또 점 P는 쌍곡선 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{9}-\frac{b^2}{7}=1$$

즉, $7a^2-9b^2=63$ ……②

①$\times 7-$②를 하면 $16b^2=49,\ b^2=\frac{49}{16}$

$b>0$이므로 $b=\frac{7}{4}$

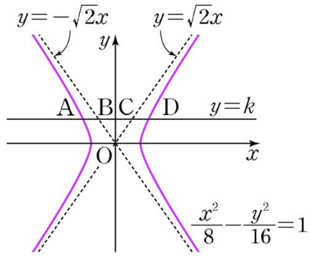
따라서 삼각형 $PF'F$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{FF'}\times b=\frac{1}{2}\times 8\times\frac{7}{4}=7$$

09 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y=\pm\frac{4}{2\sqrt{2}}x,\ \text{즉}\ \ y=\pm\sqrt{2}x$$

오른쪽 그림과 같이 쌍곡선과 이 쌍곡선의 점근선이 직선 $y=k$와 만나는 점을 차례로 A, B, C, D라 하고, 점 C의 x좌표를 $a(a>0)$라고 하자.



점 C는 직선 $y=\sqrt{2}x$ 위의 점이므로 점 C의 좌표는 $C(a,\ \sqrt{2}a)$, 즉 $k=\sqrt{2}a$

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=2a$이므로 점 D의 좌표는

$D(3a,\ \sqrt{2}a)$

점 D는 쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점이므로

$$\frac{(3a)^2}{8}-\frac{(\sqrt{2}a)^2}{16}=1,\ a^2=1$$

$a>0$이므로 $a=1$

따라서 $k=\sqrt{2}a=\sqrt{2}$

10 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{P_nF'}-\overline{P_nF}=4\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10)$$

$\overline{P_1F'}=6,\ \overline{P_2F'}=7,\ \overline{P_3F'}=8,\ \cdots,\ \overline{P_{10}F'}=15$

이므로

$$\overline{P_1F}=2,\ \overline{P_2F}=3,\ \overline{P_3F}=4,\ \cdots,\ \overline{P_{10}F}=11$$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\overline{FP_n}=\overline{FP_1}+\overline{FP_2}+\cdots+\overline{FP_{10}}$

$$=2+3+4+\cdots+11$$

$$=\frac{11\times 12}{2}-1=65$$

11 $\frac{dx}{dt}=-2\sin t$, $\frac{dy}{dt}=\cos t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos t}{-2\sin t} \quad (\text{단, } \sin t \neq 0)$$

$t=\frac{\pi}{4}$를 대입하면 $\frac{dy}{dx}$의 값은 $-\frac{1}{2}$

12 $\frac{dy}{dx}=-\frac{2ax+y}{x+2y}(x+2y\neq 0)$이고, 점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로

$$-\frac{4a+1}{2+2}=-\frac{1}{2}, \quad a=\frac{1}{4}$$

점 $(2, 1)$은 곡선 $ax^2+y^2+xy=b$ 위의 점이므로

$$4a+1+2=b, \quad b=4$$

따라서 $ab=1$

13 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2p(x+x_1), \text{ 즉 } y=\frac{2p}{y_1}x+\frac{2px_1}{y_1}$$

직선 PN은 기울기가 $-\frac{y_1}{2p}$이고, 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$을 지나므로 그 직선의 방정식은

$$y-y_1=-\frac{y_1}{2p}(x-x_1)$$

$y=0$을 대입하여 풀면 $x=x_1+2p$

즉, 점 N의 좌표는 $\mathrm{N}(x_1+2p, 0)$

이때 점 H의 좌표는 $\mathrm{H}(x_1, 0)$이므로

$$\overline{\mathrm{NH}}=x_1+2p-x_1=2p$$

따라서 ④이다.

14 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라고 하면 접선의 방정식은 $y_1y=\frac{1}{2}(x+x_1)$

이 직선은 점 $\mathrm{P}(-3, 1)$을 지나므로

$$2y_1=x_1-3 \quad \cdots\cdots①$$

점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$은 포물선 $y^2=x$ 위의 점이므로

$$y_1{}^2=x_1 \quad \cdots\cdots②$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$x_1=9, y_1=3 \text{ 또는 } x_1=1, y_1=-1$$

두 점 A, B의 좌표는 $(9, 3)$, $(1, -1)$

따라서 구하는 x좌표의 합은 10이다.

15 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x_1, y_1)(x_1>0, y_1>0)$이라고 하면 점 P에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

$\mathrm{A}\left(\frac{a^2}{x_1}, 0\right)$, $\mathrm{B}\left(0, \frac{b^2}{y_1}\right)$이므로 삼각형 ABO의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\frac{a^2}{x_1}\times\frac{b^2}{y_1}=\frac{a^2b^2}{2x_1y_1}$$

점 P는 타원 위의 점이므로 $\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2}=1$

$\frac{x_1{}^2}{a^2}>0$, $\frac{y_1{}^2}{b^2}>0$이므로

$$\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2}\geq 2\sqrt{\frac{x_1{}^2}{a^2}\times\frac{y_1{}^2}{b^2}}=\frac{2x_1y_1}{ab}$$

$$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x_1{}^2}{a^2}=\frac{y_1{}^2}{b^2}\text{일 때 성립}\right)$$

즉, $2x_1y_1\leq ab$

삼각형 ABO의 넓이는 $\frac{a^2b^2}{2x_1y_1}\geq\frac{a^2b^2}{ab}=ab$

따라서 구하는 삼각형 ABO의 넓이의 최솟값은 ab이므로 ④이다.

16 점 $\mathrm{P}(\sqrt{2}, 1)$에서의 접선 l의 방정식은

$$\sqrt{2}x-y=1, \text{ 즉 } y=\sqrt{2}x-1$$

주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y=x, \; y=-x$$

접선 l과 직선 $y=x$의 교점의 좌표는

$$\mathrm{A}(\sqrt{2}+1, \sqrt{2}+1)$$

접선 l과 직선 $y=-x$의 교점의 좌표는

$$\mathrm{B}(\sqrt{2}-1, -\sqrt{2}+1)$$

따라서 $\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{PB}}=\sqrt{3}$이므로

$$\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}}=1:1$$

17 $\frac{dx}{dt}=2\sqrt{3}\,t$, $\frac{dy}{dt}=6t^2$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6t^2}{2\sqrt{3}\,t}=\sqrt{3}\,t$$

접선의 기울기가 $\sqrt{3}$이므로

$$\sqrt{3}\,t=\sqrt{3},\ t=1$$

따라서 접점의 좌표는 $(\sqrt{3}+1,\ 5)$이다.

18 $\frac{dx}{dt}=2\sec t\tan t$, $\frac{dy}{dt}=\sqrt{3}\sec^2 t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{3}\sec^2 t}{2\sec t\tan t}=\frac{\sqrt{3}\sec t}{2\tan t}=\frac{\sqrt{3}}{2\sin t}$$

(단, $\sin t\neq 0$)

접선의 기울기가 $\tan\frac{\pi}{4}=1$이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sin t}=1,\ \sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$, $t\neq 0$이므로 $t=\frac{\pi}{3}$

접점의 좌표는 $2\sec\frac{\pi}{3}=4$, $\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{3}=3$이므로 $(4, 3)$

접선의 방정식은

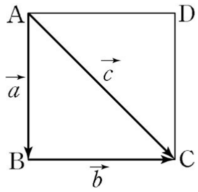
$$y-3=x-4,\ \text{즉}\ \ y=x-1$$

이 직선은 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$$a=1$$

____반 ____번 이름______________

01 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$라고 할 때, $\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$의 크기를 구하여라.



02 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$$\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a}-3\vec{b},\ 3\vec{x}+\vec{y}=-2\vec{a}+\vec{b}$$

일 때, $\vec{x}+\vec{y}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.

03 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않을 때, 두 벡터 $2\vec{a}-k\vec{b}$, $\vec{a}+4\vec{b}$는 서로 평행하다. 이때 실수 k의 값을 구하여라.

04 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 할 때, 선분 AB를 3:1로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q, 선분 PQ의 중점을 M이라고 하자. 점 M의 위치벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.

05 $\vec{a}=(-4, 2)$, $\vec{b}=(0, -1)$, $\vec{c}=(-5, -3)$일 때, $(3\vec{a}+2\vec{b})-2(\vec{c}-2\vec{b})$의 크기를 구하여라.

06 세 점 A$(-5, 2)$, B$(-1, 1)$, C$(3, 3)$에 대하여 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=3\sqrt{2}$를 만족하는 점 P가 그리는 도형을 말하여라.

07 $|\vec{a}+\vec{b}|=2$, $|\vec{a}-\vec{b}|=3$일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값을 구하여라.

08 세 점 $\mathrm{A}(3,\ -1)$, $\mathrm{B}(4,\ 2)$, $\mathrm{C}(1,\ 3)$에 대하여 $\angle\mathrm{BAC}$의 크기를 구하여라.

09 두 벡터 $\vec{a}=(x,\ -2)$, $\vec{b}=(1,\ 2)$에 대하여 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$, $3\vec{a}+\vec{b}$가 서로 수직일 때, 양수 x의 값을 구하여라.

10 삼각형 OAB에서 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2$, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=3\sqrt{3}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=6$일 때, 삼각형 OAB의 넓이를 구하여라.

11 곡선 $y=\dfrac{3}{x}\,(x>0)$ 위의 두 점 P, Q에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$의 최솟값을 구하여라.

(단, O는 원점)

12 두 점 A, B의 위치벡터가 각각 $\vec{a}=(-5,\ 2)$, $\vec{b}=(-3,\ -8)$일 때, 두 점 A, B를 지나는 직선 l과 평행하고 점 $(2,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

13 점 $A(3, 2)$에서 직선 $l : \frac{x-1}{2} = -y$에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, 두 점 A, H를 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

14 두 직선 $l : 3x - y = 0$, $m : x - 2y - 5 = 0$이 이루는 각의 크기를 구하여라.

15 $\overrightarrow{OA} = (-4, 3)$, $\overrightarrow{OB} = (2, -7)$일 때, 선분 AB를 지름으로 하는 원의 방정식을 구하여라.

16 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서 위치벡터의 성분이 (x, y)이고,

$$x = \frac{3}{2}t^2 - t,\ y = 3t$$

로 나타내어진다. 점 P의 속력이 $3\sqrt{2}$일 때, 점 P의 속도를 구하여라.

17 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서 위치벡터의 성분이 (x, y)이고,

$$x = 2\sin t,\ y = 2\cos t$$

로 나타내어진다. 시각 t에서의 점 P의 속도와 가속도가 이루는 각의 크기를 구하여라.

18 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서 위치벡터의 성분이 (x, y)이고,

$$x = t^3,\ y = 1 - \frac{3}{2}t^2$$

으로 나타내어질 때, $t = 0$에서 $t = 1$까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

Ⅱ. 평면벡터

01 $\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}$

$=\overrightarrow{BC}$

따라서 $|\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}|=|\overrightarrow{BC}|=1$

02 $\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a}-3\vec{b}$ ……①

$3\vec{x}+\vec{y}=-2\vec{a}+\vec{b}$ ……②

$3\times$①$-$②를 하면

$-10\vec{y}=5\vec{a}-10\vec{b}$, $\vec{y}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$

이것을 ②에 대입하여 풀면 $\vec{x}=-\frac{1}{2}\vec{a}$

따라서 $\vec{x}+\vec{y}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}\right)=-\vec{a}+\vec{b}$

03 $2\vec{a}-k\vec{b}=t(\vec{a}+4\vec{b})$를 만족하는 0이 아닌 실수 t가 존재하므로

$(2-t)\vec{a}=(k+4t)\vec{b}$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 평행하지 않으므로

$2-t=0$, $k+4t=0$

이 식을 풀면 $t=2$, $k=-8$

따라서 $k=-8$

04 선분 AB를 3:1로 내분하는 점 P와 외분하는 점 Q의 위치벡터를 각각 $\vec{p}$, $\vec{q}$라고 하면

$\vec{p}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$, $\vec{q}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$

점 M의 위치벡터를 $\vec{m}$이라고 하면

$$\vec{m}=\frac{\vec{p}+\vec{q}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}\right)+\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}\right)\right\}$$

$$=-\frac{1}{8}\vec{a}+\frac{9}{8}\vec{b}$$

05 $(3\vec{a}+2\vec{b})-2(\vec{c}-2\vec{b})=3\vec{a}+2\vec{b}-2\vec{c}+4\vec{b}$

$=3\vec{a}+6\vec{b}-2\vec{c}$

$=(-2, 6)$

따라서 $|(3\vec{a}+2\vec{b})-2(\vec{c}-2\vec{b})|=\sqrt{(-2)^2+6^2}$

$=2\sqrt{10}$

06 점 P의 좌표를 P(x, y)라고 하자.

$\overrightarrow{OA}=(-5, 2)$, $\overrightarrow{OB}=(-1, 1)$, $\overrightarrow{OC}=(3, 3)$이므로

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$

$=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})$

$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OP}$

$=(-3-3x, 6-3y)$

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=3\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{(-3-3x)^2+(6-3y)^2}=3\sqrt{2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$(x+1)^2+(y-2)^2=2$

따라서 점 P가 그리는 도형은 중심이 점 $(-1, 2)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원이다.

07 $|\vec{a}+\vec{b}|=2$의 양변을 제곱하면

$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4$ ……①

$|\vec{a}-\vec{b}|=3$의 양변을 제곱하면

$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=9$ ……②

①$-$②를 하면 $4\vec{a}\cdot\vec{b}=-5$

따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{5}{4}$

08 $\overrightarrow{AB}=(1, 3)$, $\overrightarrow{AC}=(-2, 4)$이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=10$

$\angle BAC=\theta$라고 하면

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta$

$=\sqrt{10}\times2\sqrt{5}\times\cos\theta=10$

$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{4}$

09 $\vec{a}+2\vec{b}=(x+2,\ 2)$, $3\vec{a}+\vec{b}=(3x+1,\ -4)$이고

$(\vec{a}+2\vec{b})\perp(3\vec{a}+\vec{b})$이므로

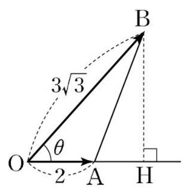
$$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}+\vec{b})=0$$

$$(x+2)(3x+1)-8=0,\ 3x^2+7x-6=0$$

$$x=-3 \text{ 또는 } x=\frac{2}{3}$$

이때 $x>0$이므로 $x=\frac{2}{3}$

10 오른쪽 그림과 같이 삼각형 OAB에서 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기를 θ, 점 B에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$$
$$=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OH}|$$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=6$이므로

$$6=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OH}|=2\times|\overrightarrow{OH}|,\ |\overrightarrow{OH}|=3$$

$\triangle$OHB에서 $\overline{BH}=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{OH}^2}=3\sqrt{2}$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{BH}=3\sqrt{2}$$

11 두 점 P, Q의 좌표를 각각 $P\left(a,\ \frac{3}{a}\right)$, $Q\left(b,\ \frac{3}{b}\right)$ $(a>0,\ b>0)$이라고 하면

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=ab+\frac{9}{ab}\geq 2\sqrt{ab\times\frac{9}{ab}}=6$$

$$\left(\text{단, 등호는 } ab=\frac{9}{ab}\text{, 즉 } ab=3\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 최솟값은 6

12 직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$라고 하면

$$\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}=(-2,\ 10)$$

구하는 직선은 직선 l과 평행하므로 점 $(2,\ 1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(-2,\ 10)$인 직선이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$\frac{x-2}{-2}=\frac{y-1}{10}$$

13 직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$라고 하면

$$\vec{u}=(2,\ -1)$$

구하는 직선은 직선 l과 수직이므로 점 $A(3,\ 2)$를 지나고 벡터 $\vec{u}=(2,\ -1)$에 수직인 직선이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$2x-y-4=0$$

14 두 직선 l, m의 법선벡터를 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라고 하면

$$\overrightarrow{n_1}=(3,\ -1),\ \overrightarrow{n_2}=(1,\ -2)$$

두 직선이 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$$\cos\theta=\frac{|3\times1+(-1)\times(-2)|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{4}$

15 원 위의 한 점을 $P(x,\ y)$라고 하면

$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$이므로

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$$

$\overrightarrow{AP}=(x+4,\ y-3)$, $\overrightarrow{BP}=(x-2,\ y+7)$이므로

$$(x+4)(x-2)+(y-3)(y+7)=0$$

따라서 $(x+1)^2+(y+2)^2=34$

16 $\frac{dx}{dt}=3t-1$, $\frac{dy}{dt}=3$이므로 시각 t에서 점 P의 속도를 $\vec{v}$라고 하면

$$\vec{v}=(3t-1,\ 3)$$

점 P의 속력이 $3\sqrt{2}$이므로

$$|\vec{v}|=\sqrt{(3t-1)^2+3^2}=3\sqrt{2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$9t^2-6t-8=0,\ t=-\frac{2}{3} \text{ 또는 } t=\frac{4}{3}$$

이때 $t\geq0$이므로 $t=\frac{4}{3}$

따라서 $t=\frac{4}{3}$일 때, 점 P의 속도는

$$\vec{v}=(3,\ 3)$$

17 $\dfrac{dx}{dt}=2\cos t$, $\dfrac{dy}{dt}=-2\sin t$이고,

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-2\sin t$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-2\cos t$이므로 시각 t에서 점 P의 속도를 $\vec{v}$, 가속도를 $\vec{a}$라고 하면

$$\vec{v}=(2\cos t,\ -2\sin t),\ |\vec{v}|=2$$

$$\vec{a}=(-2\sin t,\ -2\cos t),\ |\vec{a}|=2$$

두 벡터 $\vec{v}$, $\vec{a}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$$\cos\theta=\frac{-4\sin t\cos t+4\sin t\cos t}{2\times 2}=0$$

따라서 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

18 $\dfrac{dx}{dt}=3t^2$, $\dfrac{dy}{dt}=-3t$이므로 구하는 점 P가 움직인 거리를 s라고 하면

$$s=\int_0^1\sqrt{(3t^2)^2+(-3t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^1 3t\sqrt{t^2+1}\,dt$$

$t^2+1=u$로 놓으면 $2t\,dt=du$이고, $t=0$일 때 $u=1$, $t=1$일 때 $u=2$이므로

$$s=\int_0^1 3t\sqrt{t^2+1}\,dt$$

$$=\int_1^2\frac{3}{2}\sqrt{u}\,du$$

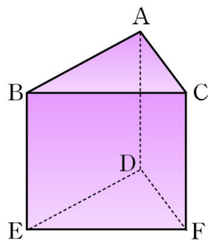
$$=\Big[\ u\sqrt{u}\ \Big]_1^2$$

$$=2\sqrt{2}-1$$

대단원 test Ⅲ. 공간도형과 공간벡터

____반 ____번 이름______________

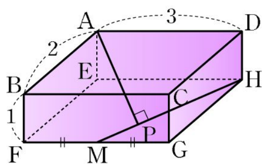
01 오른쪽 그림의 삼각기둥에서 직선 AB와 네 꼭짓점 A, C, D, F로 만들 수 있는 서로 다른 평면의 개수를 구하여라.



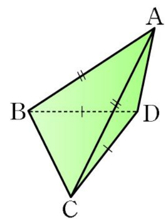
02 다음 중 공간에서 서로 다른 세 평면에 의하여 분할되는 공간의 개수가 될 수 <u>없는</u> 것은?

① 4개　② 5개　③ 6개
④ 7개　⑤ 8개

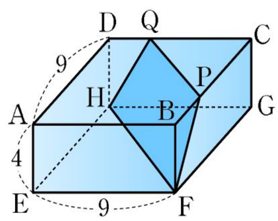
03 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=3$, $\overline{BF}=1$인 직육면체에서 $\overline{FG}$의 중점을 M, 점 A에서 $\overline{MH}$에 내린 수선의 발을 P라고 할 때, 선분 AP의 길이를 구하여라.



04 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=7$, $\overline{BD}=\overline{CD}=5$, $\overline{BC}=6$, $\overline{AD}=4$인 사면체에서 평면 ABC와 평면 BCD가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.



05 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}=\overline{EF}=9$, $\overline{AE}=4$인 직육면체에서 두 모서리 BC, DC를 각각 $1:2$로 내분하는 점을 P, Q라고 하자. 평면 ABCD와 평면 QHFP가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.



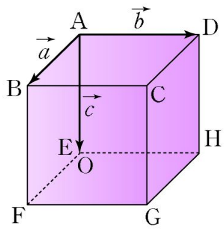
06 두 점 A$(0, 0, -1)$, B$(1, 2, 3)$과 y축 위의 점 C를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 선분 AB를 빗변으로 하는 직각삼각형일 때, 점 C의 좌표를 모두 구하여라.

07 두 점 A$(1, \sqrt{2}, a)$, B$(4, 0, 2)$에 대하여 직선 AB와 yz평면이 이루는 각의 크기가 $30°$일 때, 상수 a의 값을 모두 구하여라.

08 두 점 A$(2, -4, 5)$, B$(-1, -1, 2)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 P와 외분하는 점 Q를 지름의 양 끝점으로 하는 구의 방정식을 구하여라.

09 좌표공간 위의 점 A$(2, 0, -2)$에서 구 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$에 접선을 그었을 때, 접점이 그리는 도형의 넓이를 구하여라.

10 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$라고 할 때, $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$를 나타내는 벡터는?



① $\overrightarrow{AG}$ ② $\overrightarrow{EC}$ ③ $\overrightarrow{CE}$
④ $\overrightarrow{BH}$ ⑤ $\overrightarrow{HB}$

11 점 A$(1, 0, 2)$의 점 $(-1, 2, 1)$에 대한 대칭점을 A$'$, 점 B$(-2, 1, 3)$의 y축에 대한 대칭점을 B$'$이라고 할 때, $\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'}$의 값을 구하여라.

12 두 직선

$$l_1:\ \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+2}{3}$$

$$l_2:\ \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{2}=z-2$$

에 각각 수직인 직선 m이 두 점 $\mathrm{A}(2,\,1,\,-1)$, $\mathrm{B}(-1,\,a,\,b)$를 지날 때, 두 실수 a, b의 곱 ab의 값을 구하여라.

13 점 $\mathrm{A}(1,\,3,\,2)$에서 직선 $l: \frac{x+2}{2}=y-1=\frac{z}{3}$ 에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, 선분 AH의 길이를 구하여라.

14 좌표공간의 원점 O에서 두 평면

$$\alpha:\ x+2y-z-6=0$$

$$\beta:\ 2x-y+3z+14=0$$

에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라고 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{OH_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH_2}}$의 값을 구하여라.

15 직선 $1-x=y-3=\frac{z-2}{-2}$를 두 평면

$$\alpha:\ 2x-y+3z-5=0$$

$$\beta:\ x+2y+3z+2=0$$

으로 잘랐을 때 생기는 선분의 길이를 구하여라.

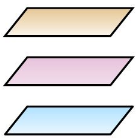
16 구 $(x+1)^2+y^2+(z-3)^2=14$에 접하고 직선 $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{3}=5-z$에 수직인 평면의 방정식을 모두 구하여라.

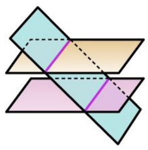
17 좌표공간에서 평면 $2x-y+z-4=0$과 구 $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=16$이 만나서 생기는 원의 중심의 좌표를 구하여라.

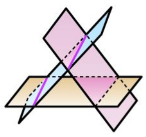
Ⅲ. 공간도형과 공간벡터

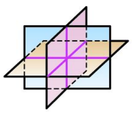
01 네 점 A, C, D, F는 한 평면 위에 있으므로
네 점으로 만들 수 있는 평면의 개수는 1
직선 AB와 세 점 C, D, F로 만들 수 있는 평면의 개수는 3
따라서 구하는 평면의 개수는 $1+3=4$

02 서로 다른 세 평면에 의하여 분할되는 공간의 개수는 다음과 같다.


4개


6개


7개


8개

따라서 ②이다.

03 $\overline{AE}\perp$(평면 EFGH), $\overline{AP}\perp\overline{MH}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{EP}\perp\overline{MH}$$

직각삼각형 MGH에서

$$\overline{MH}=\sqrt{\overline{MG}^2+\overline{GH}^2}=\frac{5}{2}$$

$\triangle EMH=\frac{1}{2}\times\overline{MH}\times\overline{EP}=\frac{1}{2}\times\overline{EH}\times\overline{GH}$이므로

$$\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\overline{EP}=\frac{1}{2}\times3\times2$$

$$\overline{EP}=\frac{12}{5}$$

따라서 직각삼각형 AEP에서

$$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{EP}^2}=\frac{13}{5}$$

04 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 M이라고 하면

$$\overline{AM}\perp\overline{BC},\ \overline{MD}\perp\overline{BC}$$

따라서 두 평면 ABC, BCD가 이루는 각의 크기는 두 선분 AM, MD가 이루는 각의 크기와 같다.
직각삼각형 ABM에서

$$\overline{AM}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BM}^2}=2\sqrt{10}$$

직각삼각형 DBM에서

$$\overline{MD}=\sqrt{\overline{DB}^2-\overline{BM}^2}=4$$

삼각형 AMD는 $\overline{MD}=\overline{AD}$인 이등변삼각형이므로 점 D에서 $\overline{AM}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

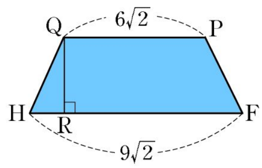
$$\overline{MH}=\frac{1}{2}\overline{AM}=\sqrt{10}$$

따라서 $\cos\theta=\dfrac{\overline{MH}}{\overline{MD}}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

05 평면 QHFP의 평면 ABCD 위로의 정사영은 평면 QDBP이다.

$$\square QDBP=\triangle DBC-\triangle QPC$$
$$=\frac{1}{2}\times9\times9-\frac{1}{2}\times6\times6=\frac{45}{2}$$

□QHFP에 대하여 점 Q에서 $\overline{HF}$에 내린 수선의 발을 R라고 하면



$$\overline{QH}=5,\ \overline{HR}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

직각삼각형 QHR에서

$$\overline{QR}=\sqrt{\overline{QH}^2-\overline{HR}^2}=\frac{\sqrt{82}}{2}$$

$$\square QHFP=\frac{1}{2}\times(\overline{QP}+\overline{HF})\times\overline{QR}$$
$$=\frac{1}{2}\times(6\sqrt{2}+9\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{82}}{2}$$
$$=\frac{15\sqrt{41}}{2}$$

따라서 $\cos\theta=\dfrac{\square QDBP}{\square QHFP}=\dfrac{3\sqrt{41}}{41}$

06 점 C의 좌표를 $C(0, a, 0)$이라고 하면

$\overline{AB}=\sqrt{21}$, $\overline{AC}=\sqrt{a^2+1}$

$\overline{BC}=\sqrt{(a-2)^2+10}$

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$이므로

$21=a^2+1+(a-2)^2+10$

$a^2-2a-3=0$, $(a+1)(a-3)=0$

$a=-1$ 또는 $a=3$

따라서 점 C의 좌표는

$(0, -1, 0)$ 또는 $(0, 3, 0)$

07 두 점 A, B의 yz평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라고 하면

$A'(0, \sqrt{2}, a)$, $B'(0, 0, 2)$

$\overline{A'B'}=\sqrt{(a-2)^2+2}$, $\overline{AB}=\sqrt{(a-2)^2+11}$

이고 $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos 30^\circ$ 이므로

$$\sqrt{(a-2)^2+2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(a-2)^2+11}$$

양변을 제곱하면

$$(a-2)^2+2=\frac{3}{4}\{(a-2)^2+11\}$$

$a^2-4a-21=0$, $(a+3)(a-7)=0$

따라서 $a=-3$ 또는 $a=7$

08 두 점 P, Q의 좌표는

$P(1, -3, 4)$, $Q(5, -7, 8)$

구하는 구의 중심을 C라고 하면 점 C는 $\overline{PQ}$의 중점과 같으므로

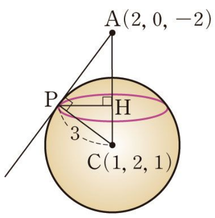
$C(3, -5, 6)$

$\overline{PC}=\sqrt{2^2+(-2)^2+2^2}=2\sqrt{3}$

따라서 구하는 구의 방정식은

$(x-3)^2+(y+5)^2+(z-6)^2=12$

09 오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 C, 접점을 P라고 하면 $\overline{CA}=\sqrt{14}$



$\overline{PA}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CP}^2}$

$=\sqrt{5}$

점 P에서 $\overline{CA}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 접점이 그리는 도형은 반지름의 길이가 $\overline{PH}$인 원이다.

$\triangle APC=\frac{1}{2}\times\overline{CP}\times\overline{PA}=\frac{1}{2}\times\overline{CA}\times\overline{PH}$이므로

$\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{5}=\frac{1}{2}\times\sqrt{14}\times\overline{PH}$

$\overline{PH}=\frac{3\sqrt{70}}{14}$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\pi\left(\frac{3\sqrt{70}}{14}\right)^2=\frac{45}{14}\pi$$

10 $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AE}$

$=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{HB}$

따라서 ⑤이다.

11 점 A′의 좌표를 (a, b, c)라고 하면 $\overline{AA'}$의 중점의 좌표는 점 $(-1, 2, 1)$과 같으므로

$\frac{1+a}{2}=-1$, $\frac{0+b}{2}=2$, $\frac{2+c}{2}=1$

$a=-3$, $b=4$, $c=0$

즉, $A'(-3, 4, 0)$

점 B의 y축에 대하여 대칭인 점 B′의 좌표는

$B'(2, 1, -3)$

따라서 $\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'}=-6+4+0=-2$

12 직선 m의 방향벡터를 $\vec{u}$라고 하면

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-3, a-1, b+1)$

두 직선 l_1, l_2의 방향벡터를 $\overrightarrow{u_1}=(3, 4, 3)$, $\overrightarrow{u_2}=(2, 2, 1)$이라고 하면 $\vec{u}\perp\overrightarrow{u_1}$, $\vec{u}\perp\overrightarrow{u_2}$이므로

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{u_1}=-9+4(a-1)+3(b+1)=0$

$4a+3b=10$ ……①

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{u_2}=-6+2(a-1)+b+1=0$

$2a+b=7$ ……②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=\frac{11}{2}$, $b=-4$

따라서 $ab=-22$

13 $\dfrac{x+2}{2}=y-1=\dfrac{z}{3}=t$로 놓으면

$x=2t-2,\ y=t+1,\ z=3t$

점 H의 좌표를 $\mathrm{H}(2t-2, t+1, 3t)$로 놓으면

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(2t-3, t-2, 3t-2)$

직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$라고 하면

$\vec{u}=(2, 1, 3)$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\vec{u}$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\vec{u}=0$이므로

$2(2t-3)+t-2+3(3t-2)=0$

$14t-14=0,\ t=1$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(-1, -1, 1)$이므로

$\overline{\mathrm{AH}}=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}$

$=\sqrt{3}$

14 두 평면 α, β의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라고 하면

$\overrightarrow{n_1}=(1, 2, -1),\ \overrightarrow{n_2}=(2, -1, 3)$

직선 $\mathrm{OH_1}$은 원점을 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{n_1}$이므로 직선 $\mathrm{OH_1}$의 방정식은 $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-1}$

$x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-1}=t$로 놓으면

$x=t,\ y=2t,\ z=-t$

평면 α와 직선 $\mathrm{OH_1}$이 만나는 점 $\mathrm{H_1}$의 좌표를 $\mathrm{H_1}(t, 2t, -t)$라고 하면

$t+2(2t)-(-t)-6=0,\ t=1$

즉, $\mathrm{H_1}(1, 2, -1)$

직선 $\mathrm{OH_2}$는 원점을 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{n_2}$이므로 직선 $\mathrm{OH_2}$의 방정식은 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{3}$

$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{3}=s$로 놓으면

$x=2s,\ y=-s,\ z=3s$

평면 β와 직선 $\mathrm{OH_2}$가 만나는 점 $\mathrm{H_2}$의 좌표를 $\mathrm{H_2}(2s, -s, 3s)$라고 하면

$2(2s)-(-s)+3(3s)+14=0,\ s=-1$

즉, $\mathrm{H_2}(-2, 1, -3)$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OH_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH_2}}=-2+2+3=3$

15 $1-x=y-3=\dfrac{z-2}{-2}=t$로 놓으면

$x=-t+1,\ y=t+3,\ z=-2t+2$

직선이 두 평면과 만나는 점의 좌표를 $(-t+1, t+3, -2t+2)$라고 하면

$2(-t+1)-(t+3)+3(-2t+2)-5=0$에서

$t=0$

즉, $(1, 3, 2)$

$-t+1+2(t+3)+3(-2t+2)+2=0$에서

$t=3$

즉, $(-2, 6, -4)$

따라서 구하는 선분의 길이는

$\sqrt{3^2+(-3)^2+6^2}=3\sqrt{6}$

16 주어진 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라고 하면

$\vec{u}=(2, 3, -1)$

구하는 평면은 $\vec{u}$에 수직이므로 구하는 평면의 방정식을 $2x+3y-z+d=0$이라고 하자.

구의 중심 $(-1, 0, 3)$과 평면 사이의 거리는 구의 반지름의 길이와 같으므로

$\dfrac{|-2+0-3+d|}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}}=\sqrt{14},\ |d-5|=14$

$d=-9$ 또는 $d=19$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$2x+3y-z-9=0,\ 2x+3y-z+19=0$

17 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$, 구의 중심을 C, 구하는 원의 중심을 $\mathrm{M}(a, b, c)$라고 하면

$\vec{n}=(2, -1, 1),\ \overrightarrow{\mathrm{CM}}=(a-1, b+1, c)$

$\overrightarrow{\mathrm{CM}}/\!/\vec{n}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{CM}}=k\vec{n}$인 0이 아닌 실수 k가 존재한다.

$(a-1, b+1, c)=k(2, -1, 1)$

$a=2k+1,\ b=-k-1,\ c=k$

점 $\mathrm{M}(2k+1, -k-1, k)$는 주어진 평면 위의 점이므로

$2(2k+1)-(-k-1)+k-4=0,\ k=\dfrac{1}{6}$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는

$\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{7}{6}, \dfrac{1}{6}\right)$