

II

방정식과 부등식

- 1 / 복소수와 이차방정식
- 2 / 이차방정식과 이차함수
- 3 / 여러 가지 방정식
- 4 / 여러 가지 부등식

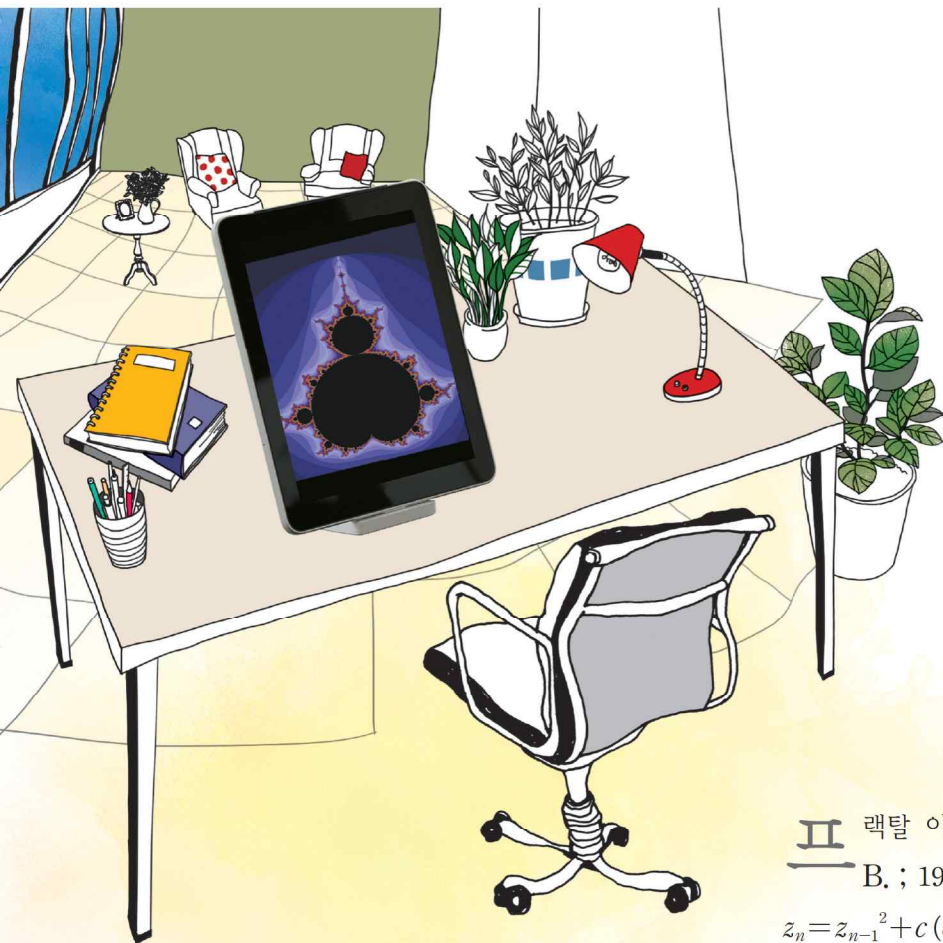
▣ 학습목표 ▣

- 복소수의 뜻과 그 성질을 이해하고, 사칙계산을 할 수 있다.
- 이차함수와 이차방정식의 관계를 이해한다.
- 여러 가지 방정식을 풀 수 있다.
- 이차함수와 이차부등식의 관계를 이해하고, 여러 가지 부등식을 풀 수 있다.



“운동하는 물체의 속도와 시간은
방정식과 부등식으로 나타내어 구할 수 있다.”





II 프랙탈 이론의 창시자 만델브로(Mandelbrot, B. ; 1924~2010)는 $z_1=c$, $z_2=z_1^2+c$, ..., $z_n=z_{n-1}^2+c$ (c 는 복소수)가 나타내는 도형을 컴퓨터를 이용하여 그렸다. 이 그림은 묘하게도 부분이 전체와 닮은 구조를 가지고 있다. 큰 몸통의 앞에 달린 머리 부분을 확대하면 그 앞의 볼 부분이 다시 머리 부분과 닮았고(자기 닮음), 이러한 닮은 구조가 무한히 반복되는데(순환성), 이와 같은 구조를 프랙탈이라고 한다.

복소수와 이차방정식

1. 복소수의 뜻과 사칙계산 2. 이차방정식의 판별식

준비 학습

1 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt{3}+2\sqrt{3}$

(2) $(\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}-3)$

(3) $\frac{3}{\sqrt{2}-1}$

(4) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

2 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2-x-12=0$

(2) $9x^2+12x+4=0$

(3) $x^2+3x+1=0$

(4) $3x^2+4x-2=0$

1

복소수의 뜻과 사칙계산

• 복소수의 뜻과 그 성질을 이해하고, 사칙계산을 할 수 있다.



이탈리아의 수학자 카르다노(Cardano, G. ; 1501~1576)는 ‘더하면 10이 되고, 곱하면 40이 되는 두 수’, 즉 $x(10-x)=40$ 을 만족하는 해가 $5+\sqrt{-15}$, $5-\sqrt{-15}$ 임을 알았다. 그리고 이 수를 ‘가공의 수’, ‘쓸모없는 수’라고 하였다. 그러나 현대에 들어와서 이와 같은 수는 양자역학, 전기공학 등에서 꼭 필요한 수가 되었다.

복소수의 뜻

개 / 념 / 열 / 기

다음 이차방정식에 대하여 물음에 답하여라.

(1) $x^2=1$

(2) $x^2=2$

(3) $x^2=-1$

- 1 유리수의 범위에서 해를 갖는 이차방정식을 말하여라.
- 2 실수의 범위에서 해를 갖는 이차방정식을 말하여라.



스위스의 수학자 오일러 (Euler, L. ; 1707~1783)는 제곱하여 -1 이 되는 수를 문자 i 로 나타내었다.

Math Note

허수단위 i 는 imaginary number(허수)의 첫 글자이다.

위의 개념 열기에서 이차방정식 $x^2=1$ 은 유리수의 범위에서 해를 갖는다. 한편 이차방정식 $x^2=2$ 은 유리수의 범위에서는 해를 갖지 않지만 실수의 범위에서는 해를 갖는다.

그러나 이차방정식 $x^2=-1$ 은 실수의 범위에서도 해를 갖지 않는다. 따라서 이 방정식이 해를 갖도록 하기 위해서는 수의 범위를 확장해야 한다.

제공하여 -1 이 되는 새로운 수를 생각하여 이것을 기호

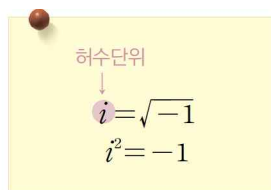
i

로 나타내기로 한다. 즉,

$$i^2 = -1 \quad (i = \sqrt{-1})$$

이다.

이때 i 를 **허수단위**라고 한다.





독일의 수학자 가우스
(Gauss, K. F.; 1777~
1855)는 복소수라는 용어
를 도입하고 새로운 수의
개념을 확립하였다.

실수와 허수단위 i 를 결합하면 새로운 수를 구성할 수 있다.

임의의 실수 a , b 에 대하여

$$a+bi$$

의 꼴로 나타내어지는 수를 **복소수**라 하고, 이때 a 를
이 복소수의 **실수부분**, b 를 이 복소수의 **허수부분**이라
고 한다.



특히 $0i=0$ 으로 정하면 임의의 실수 a 는 $a=a+0=a+0i$ 로 나타낼 수 있
으므로 실수도 복소수이다.

이때 실수가 아닌 복소수 $a+bi$ ($b \neq 0$)를 **허수**라고 한다.

$$\text{복소수 } a+bi \begin{cases} \text{실수 } (b=0) \\ \text{허수 } (b \neq 0) \end{cases} \quad (\text{단, } a, b \text{는 실수})$$

보기

- (1) 복소수 $2+3i$ 의 실수부분은 2, 허수부분은 3이다.
- (2) 세 복소수 5, $4+5i$, $-3i$ 에서 5는 실수, $4+5i$ 와 $-3i$ 는 허수이다.

문제 01

다음 복소수의 실수부분과 허수부분을 구하여라.

- (1) $-2+7i$
- (2) 5
- (3) $-3i$
- (4) $\frac{1+\sqrt{2}i}{3}$

서로 같은 두 복소수에 대하여 알아보자.

두 복소수 $a+bi$, $c+di$ (a, b, c, d 는 실수)에 대하여 실수부분과 허수부분
이 각각 같을 때, 즉 $a=c$, $b=d$ 일 때, 두 복소수는 서로 같다고 하고

$$a+bi=c+di$$

와 같이 나타낸다.

특히 $a+bi=0$ 이면 $a=0$, $b=0$ 이다.

Math Note

$$\begin{array}{l} \text{같다.} \\ a+bi=c+di \\ \text{같다.} \end{array}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

서로 같은 두 복소수

a, b, c, d 가 실수일 때,

$a+bi=c+di$ 이면 $a=c, b=d$ 이다.

거꾸로 $a=c, b=d$ 이면 $a+bi=c+di$ 이다.

서로 같은 두 복소수

예제 01

다음 등식이 성립하도록 하는 실수 x, y 의 값을 구하여라.

$$2x+i=(3-x)+(y-2)i$$

풀이

두 복소수가 서로 같으려면 실수부분과 허수부분이 각각 같아야 하므로

$$2x=3-x, 1=y-2$$

따라서 $x=1, y=3$

답 $x=1, y=3$

문제 02

다음 등식이 성립하도록 하는 실수 x, y 의 값을 구하여라.

(1) $(x+y)+2i=-1+yi$

(2) $(x-3)+(3y-2)i=0$

Math Note

복소수 $a+bi$ (a, b 는 실수)는 보통 z 로 나타내고, 그 켤레복소수를 $\bar{z}$ 로 나타낸다.

복소수 $a+bi$ (a, b 는 실수)에 대하여 복소수 $a-bi$ 를 복소수 $a+bi$ 의 **켤레복소수**라 하고, 기호로

$$\overline{a+bi}$$

와 같이 나타낸다. 즉, $\overline{a+bi}=a-bi$ 이다.

보기

$$\overline{3+2i}=3-2i, \quad \overline{2}=2, \quad \overline{-5i}=5i$$

문제 03

다음 복소수의 켤레복소수를 구하여라.

(1) $1+2i$

(2) -7

(3) $3i$

(4) $1-\sqrt{2}i$

복소수의 사칙계산

개 / 념 / 열 / 기

다음 물음에 답하여라.

- 1 두 다항식의 덧셈 $(1+5x)+(4-3x)$ 를 계산하여라.
- 2 두 복소수의 덧셈 $(1+5i)+(4-3i)$ 에서 허수단위 i 를 문자처럼 생각하고 계산하여라.

복소수의 덧셈과 뺄셈은 허수단위 i 를 문자처럼 생각하고 다항식의 덧셈과 뺄셈에서와 같은 방법으로 다음과 같이 계산한다.

Math Note

복소수의 덧셈과 뺄셈은 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 모아서 계산한다.

복소수의 덧셈, 뺄셈

a, b, c, d 가 실수일 때

$$\textcircled{1} (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

$$\textcircled{2} (a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$$

보기

$$(1) (1+2i) + (3+i) = (1+3) + (2+1)i = 4+3i$$

$$(2) (5+2i) - (3-2i) = (5-3) + \{2 - (-2)\}i = 2+4i$$

문제 04

다음을 계산하여라.

$$(1) (2-3i) + (5+4i)$$

$$(2) 3i + (2-i)$$

$$(3) (3+2i) - (7-i)$$

$$(4) -4i - (-1+5i)$$

복소수의 곱셈은 허수단위 i 를 문자처럼 생각하고 다항식의 곱셈에서와 같은 방법으로 전개한 후 $i^2 = -1$ 임을 이용하여 다음과 같이 계산한다.

Math Note

$$\begin{aligned} & (a+bi)(c+di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + (ad+bc)i - bd \\ &= (ac-bd) + (ad+bc)i \end{aligned}$$

복소수의 곱셈

a, b, c, d 가 실수일 때,

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Math Note

복소수와 그 켤레복소수의 곱은 항상 실수이다.

| 보기 |

$$\begin{aligned}(1) (3-i)(1-i) &= 3 \cdot 1 + 3 \cdot (-i) + (-i) \cdot 1 + (-i)^2 \\ &= 3 - 3i - i - 1 \\ &= 2 - 4i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) (1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i) &= 1^2 + 1 \cdot (-\sqrt{3}i) + \sqrt{3}i \cdot 1 - (\sqrt{3}i)^2 \\ &= 1 - 3 \cdot (-1) \\ &= 4\end{aligned}$$

| 문제 | **05** 다음을 계산하여라.

(1) $(2-3i)(5+4i)$

(2) $i(3-2i)$

(3) $(7-i)^2$

(4) $(-5-i)(-5+i)$

복소수의 나눗셈은 분모의 켤레복소수를 분모, 분자에 각각 곱하여 분모를 실수로 고친 후 다음과 같이 계산한다.

Math Note

$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di} &= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} \\ &= \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2} \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\end{aligned}$$

복소수의 나눗셈

a, b, c, d 가 실수이고 $c+di \neq 0$ 일 때,

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

| 보기 |

$$(1) \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2(1-i)}{1+1} = 1-i$$

$$(2) \frac{2-i}{4-i} = \frac{(2-i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} = \frac{9-2i}{16+1} = \frac{9}{17} - \frac{2}{17}i$$

| 문제 | **06** 다음을 $a+bi$ 의 꼴로 나타내어라. (단, a, b 는 실수)

(1) $\frac{1+2i}{2-i}$

(2) $\frac{i}{3-i}$

(3) $\frac{3+\sqrt{3}i}{3-\sqrt{3}i}$

(4) $\frac{1}{\sqrt{2}+2i}$

일반적으로 복소수의 덧셈과 곱셈에 대하여 다음과 같은 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립한다.

복소수의 덧셈과 곱셈에 대한 성질

세 복소수 z_1, z_2, z_3 에 대하여

- ① 교환법칙 $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, z_1 z_2 = z_2 z_1$
- ② 결합법칙 $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
- ③ 분배법칙 $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3, (z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

참고 복소수의 덧셈과 곱셈에 대한 결합법칙이 성립하므로 괄호를 생략하여 $z_1 + z_2 + z_3, z_1 z_2 z_3$ 으로 나타내기도 한다.

복소수의 덧셈과 곱셈에 대한 성질 이용하기

예제 02

복소수의 덧셈과 곱셈에 대한 성질을 이용하여 다음을 계산하여라.

- (1) $(2+3i)(1+i)(2-3i)$
- (2) $(2-\sqrt{3}i)(-3+2\sqrt{3}i) + (2-\sqrt{3}i)(5-\sqrt{3}i)$

풀이

- (1) $(2+3i)(1+i)(2-3i)$
 $= (2+3i)(2-3i)(1+i)$ ↗ 교환법칙
 $= 13(1+i)$
 $= 13+13i$
- (2) $(2-\sqrt{3}i)(-3+2\sqrt{3}i) + (2-\sqrt{3}i)(5-\sqrt{3}i)$ ↗ 분배법칙
 $= (2-\sqrt{3}i)\{(-3+2\sqrt{3}i) + (5-\sqrt{3}i)\}$
 $= (2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)$
 $= 7$

답 (1) $13+13i$ (2) 7

I 문제 07

복소수의 덧셈과 곱셈에 대한 성질을 이용하여 다음을 계산하여라.

- (1) $(3-4i) + (1+i) + (-3+4i)$
- (2) $(5-\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i) + (-2+4\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)$

음수의 제곱근

두 복소수 $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$ 에 대하여

$$(\sqrt{2}i)^2 = 2i^2 = -2, \quad (-\sqrt{2}i)^2 = 2i^2 = -2$$

이다.

따라서 $\sqrt{2}i$ 와 $-\sqrt{2}i$ 는 -2 의 제곱근이다.

-2 의 제곱근은 $\pm\sqrt{2}i$ 로 나타내기도 한다.

이때 $\sqrt{2}i = \sqrt{-2}$ 와 같이 쓴다.

㉠ 되짚어 보기

양수 a 의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}$ 이다.

$$\begin{cases} \sqrt{2}i = \sqrt{-2} \\ -\sqrt{2}i = -\sqrt{-2} \end{cases} \rightarrow -2 \text{의 제곱근}$$

일반적으로 음수의 제곱근은 다음과 같다.

음수의 제곱근

$a > 0$ 일 때

① $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$

② $-a$ 의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}i$ 이다.

[보기]

(1) $\sqrt{-7} = \sqrt{7}i$, $\sqrt{-4} = \sqrt{4}i = 2i$

(2) -36 의 제곱근은 $\pm\sqrt{-36} = \pm\sqrt{36}i = \pm 6i$

|문제| 08 다음을 허수단위 i 를 사용하여 나타내어라.

(1) $\sqrt{-5}$

(2) $-\sqrt{-16}$

|문제| 09 다음 수의 제곱근을 구하여라.

(1) -3

(2) $-\frac{4}{25}$



소통과
나눔

오류 찾기

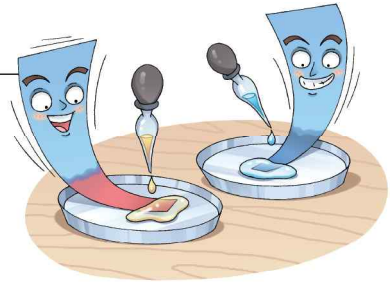
다음 계산 과정에서 잘못된 부분을 찾아 바르게 고쳐라.

$$\sqrt{-9}\sqrt{-9} = \sqrt{(-9)(-9)} = \sqrt{81} = 9$$

2

이차방정식의 판별식

- 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 안다.
- 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다.
- 이차방정식에서 근과 계수의 관계를 이해한다.



리트머스 종이는 산성과 염기성을 띠는 물질을 판별할 수 있는 도구이다. 푸른색 리트머스 종이는 산성을 띠는 식초가 묻으면 붉은색으로 변하고, 염기성을 띠는 암모니아수가 묻으면 변하지 않는다. 이와 같이 이차방정식의 경우에도 판별식이라는 도구를 이용하여 그 근이 실수인지 허수인지를 판별할 수 있다.

이차방정식의 실근과 허근

개 / 념 / 열 / 기

다음 이차방정식 중에서 실수의 범위에서 근을 갖지 않는 것을 말하여라.

$$(1) (x+1)^2=0$$

$$(2) x^2-2=0$$

$$(3) x^2+3=0$$

위의 개념 열기에서 이차방정식 $(x+1)^2=0$ 과 이차방정식 $x^2-2=0$ 은 실수의 범위에서 근을 갖는다.

한편 이차방정식 $x^2+3=0$ 은 실수의 범위에서는 근을 갖지 않지만 복소수의 범위에서는 두 근 $x=\sqrt{3}i$ 또는 $x=-\sqrt{3}i$ 를 갖는다.

중학교에서는 이차방정식의 근을 실수의 범위에서 구하였지만 이제부터는 복소수의 범위에서 구하여 보자.

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 의 근은

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Math Note

중근은 두 개의 근이 중복된 것이므로 이차방정식은 복소수의 범위에서 항상 두 개의 근을 갖는다.

이고, 여기서 $\sqrt{b^2-4ac}$ 는 실수이거나 허수이므로 이 이차방정식은 복소수의 범위에서 반드시 근을 갖는다.

이때 실수인 근을 **실근**이라 하고, 허수인 근을 **허근**이라고 한다.

예제 01

다음 이차방정식을 풀고, 그 근이 실근인지 허근인지를 말하여라.

(1) $x^2 - x - 3 = 0$

(2) $2x^2 + 3x + 2 = 0$

풀이 ○ (1) 근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 실근이다.

(2) 근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{7}i}{4}$$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 허근이다.

답 (1) $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$, 실근 (2) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{7}i}{4}$, 허근

문제 01

다음 이차방정식을 풀고, 그 근이 실근인지 허근인지를 말하여라.

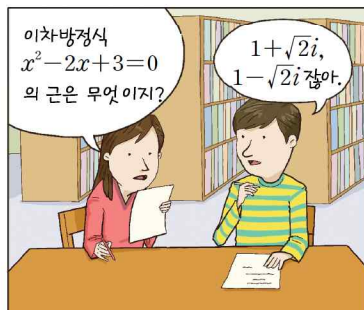
(1) $3x^2 - 6x - 2 = 0$

(2) $x^2 - 5x + 7 = 0$

소통과
나눔

설명하기

다음 대화에서 남학생의 마지막 질문에 답을 하고, 그 이유를 설명하여라.



이차방정식의 판별식

개 / 념 / 열 / 기

다음 표의 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 에서 b^2-4ac 의 값을 구하여 부호를 판단하고, 그 근이 실근인지 허근인지를 조사하여라.

$ax^2+bx+c=0$	b^2-4ac 의 값의 부호	실근, 허근
$x^2-3x+2=0$	$(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2=1>0$	실근
$x^2-2x+1=0$		
$x^2+x+1=0$		

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 근

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

에서 근호 안의 식 b^2-4ac 의 부호에 따라 그 근은

$b^2-4ac > 0$ 이면 서로 다른 두 실근

$b^2-4ac = 0$ 이면 중근 (서로 같은 두 실근)

$b^2-4ac < 0$ 이면 서로 다른 두 허근

이 된다.

거꾸로 근이 서로 다른 두 실근, 중근, 서로 다른 두 허근이면 b^2-4ac 의 값이 각각 양수, 0, 음수이다.

Math Note

- 기호 D 는 Discriminant (판별식)의 첫 글자이다.
- 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$ 의 근은 $\frac{D}{4}=b'^2-ac$ 의 부호로 판별할 수 있다.

이와 같이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 근을 b^2-4ac 의 부호에 따라 판별할 수 있으므로 b^2-4ac 를 **판별식**이라 하고, 기호 D 로 나타낸다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 에서 $D=b^2-4ac$ 라고 할 때

① $D > 0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.

② $D = 0$ 이면 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.

③ $D < 0$ 이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

거꾸로 근이 서로 다른 두 실근, 중근, 서로 다른 두 허근이면 각각 $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$ 이다.

| 보기 |

이차방정식 $x^2+x+2=0$ 에서 판별식 D 는 $D=1^2-4\cdot 1\cdot 2=-7<0$ 이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

| 문제 | **02** 다음 이차방정식의 근을 판별하여라.

- (1) $x^2-6x+9=0$ (2) $3x^2-2x-1=0$ (3) $x^2-3x+5=0$

이차방정식의 판별식 응용하기

예제 02 x 에 대한 이차방정식 $x^2+(2a+1)x+(a^2-1)=0$ 이 다음과 같은 근을 가질 때, 실수 a 의 값 또는 범위를 구하여라.

- (1) 서로 다른 두 실근 (2) 중근 (3) 서로 다른 두 허근

풀이 ○ 주어진 이차방정식의 판별식 D 는

$$D=(2a+1)^2-4\cdot 1\cdot (a^2-1)=4a+5$$

- (1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$ 이어야 하므로 $4a+5>0$

$$\text{따라서 } a>-\frac{5}{4}$$

- (2) 중근을 가지려면 $D=0$ 이어야 하므로 $4a+5=0$

$$\text{따라서 } a=-\frac{5}{4}$$

- (3) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$ 이어야 하므로 $4a+5<0$

$$\text{따라서 } a<-\frac{5}{4}$$

● (1) $a>-\frac{5}{4}$ (2) $a=-\frac{5}{4}$ (3) $a<-\frac{5}{4}$

| 문제 | **03** 이차방정식 $x^2+2x+a-1=0$ 이 서로 다른 두 허근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구하여라.

| 문제 | **04** 이차방정식 $x^2+kx+k-1=0$ 이 중근을 갖도록 하는 실수 k 의 값을 구하고, 이때의 근을 구하여라.

이차방정식의 근과 계수의 관계

개 / 념 / 열 / 기

다음 표에서 이차방정식의 두 근의 합과 곱을 구하여 빈칸을 알맞게 채우고 물음에 답하여라.

이차방정식	두 근	두 근의 합	두 근의 곱
$x^2 - 5x + 6 = 0$	2, 3	5	6
$x^2 - 6x + 9 = 0$	3, 3		
$x^2 + 4x + 13 = 0$	$-2 + 3i, -2 - 3i$		

- 위의 표에서 두 근의 합과 x 의 계수 사이의 관계를 말하여라.
- 위의 표에서 두 근의 곱과 상수항 사이의 관계를 말하여라.

이차방정식의 두 근의 합과 곱은 두 근을 직접 구하지 않고도 이차방정식의 계수로부터 알 수 있다.

위의 개념 열기에서 두 근의 합은 x 의 계수에 $-$ 부호를 붙인 것과 같고, 두 근의 곱은 상수항과 같다.

일반적으로 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하고

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

로 놓으면 두 근의 합과 곱은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

즉, 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근 α, β 와 계수의 관계는

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

Math Note

두 근의 합: $-\frac{b}{a}$
 $ax^2+bx+c=0$
 두 근의 곱: $\frac{c}{a}$

이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 의 두 근을 α, β 라고 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

[보기]

이차방정식 $3x^2-x-2=0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-1}{3} = \frac{1}{3}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

|문제| **05** 다음 이차방정식의 두 근의 합과 곱을 구하여라.

(1) $x^2-x+5=0$

(2) $2x^2+x-6=0$

근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값 구하기

예제 03 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\alpha^2 + \beta^2$

(2) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

실마리 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 의 값을 대입할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$$\alpha + \beta = -1, \quad \alpha\beta = 1$$

(1) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-1)^2 - 2 \cdot 1 = -1$

(2) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-1}{1} = -1$

답 (1) -1 (2) -1

|문제| **06** 이차방정식 $x^2-4x-1=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $(\alpha+1)(\beta+1)$

(2) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$

주어진 두 수를 근으로 하는 이차방정식을 구하여 보자.

두 수 α, β 를 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

이므로 좌변을 전개하여 정리하면 다음과 같다.

두 수를 근으로 하는 이차방정식

두 수 α, β 를 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

보기

두 근이 $-2, 3$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은 $\alpha+\beta=1, \alpha\beta=-6$ 이므로

$$x^2-x-6=0$$

문제 07 다음 두 수를 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식을 구하여라.

(1) $2, 5$

(2) $-1+2i, -1-2i$

두 수를 근으로 하는 이차방정식 구하기

예제 04 이차방정식 $x^2-2x-5=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\alpha+\beta, \alpha\beta$ 를 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식을 구하여라.

풀이 $\alpha+\beta=2, \alpha\beta=-5$ 이므로 구하는 이차방정식의 두 근의 합과 곱은 각각

$$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=2+(-5)=-3$$

$$(\alpha+\beta)\cdot\alpha\beta=2\cdot(-5)=-10$$

따라서 구하는 이차방정식은

$$x^2+3x-10=0$$

답 $x^2+3x-10=0$

문제 08 이차방정식 $x^2+2x+3=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, 다음 두 수를 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식을 구하여라.

(1) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

(2) α^2, β^2

계수가 실수인 이차식 ax^2+bx+c 의 인수분해는 지금까지 실수의 범위에서 생각하였지만 이차방정식의 근을 이용하면 복소수의 범위에서 할 수 있다.

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면 근과 계수의 관계에서

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

이므로 이차식 ax^2+bx+c 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\} \\ &= a(x-\alpha)(x-\beta) \end{aligned}$$

따라서 계수가 실수인 이차식은 복소수의 범위에서 두 일차식의 곱으로 항상 인수분해된다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

이차식의 인수분해

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

이차방정식의 두 근을 이용하여 이차식 인수분해하기

예제 05

이차식 x^2-2x+5 를 복소수의 범위에서 인수분해하여라.

풀이

실마리 근의 공식을 이용하여 이차방정식의 두 근을 구한다.

이차방정식 $x^2-2x+5=0$ 의 근은 $x=1\pm 2i$ 이므로

$$\begin{aligned} x^2-2x+5 &= \{x-(1+2i)\}\{x-(1-2i)\} \\ &= (x-1-2i)(x-1+2i) \end{aligned}$$

답 $(x-1-2i)(x-1+2i)$

문제 09

다음 이차식을 복소수의 범위에서 인수분해하여라.

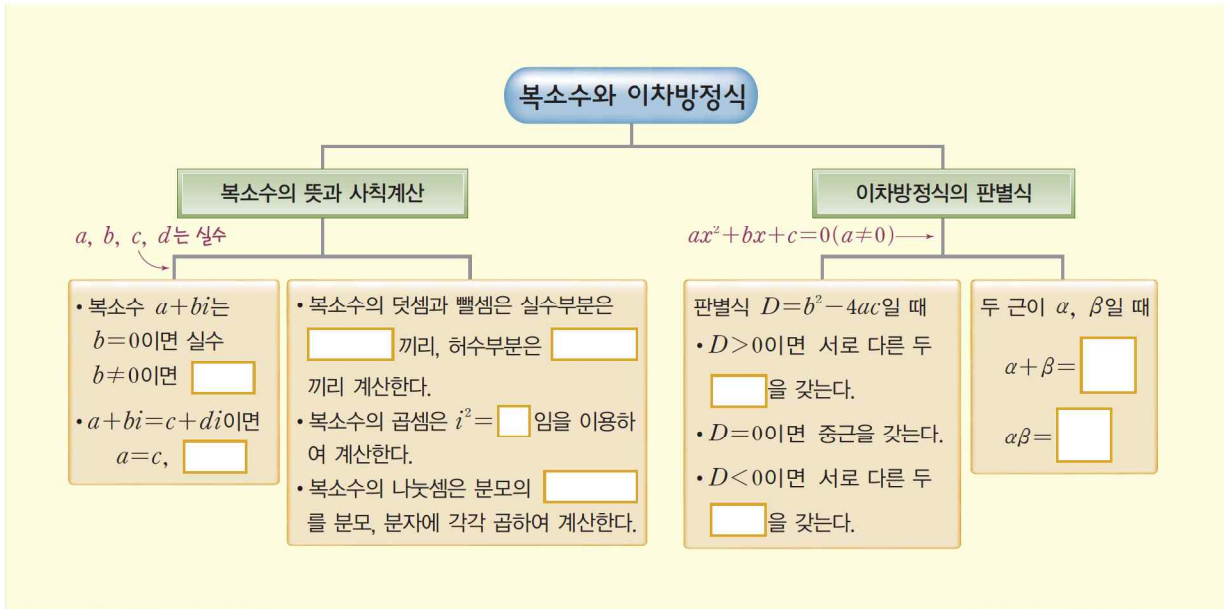
(1) x^2-8x+5

(2) $3x^2-2x+3$



개념 정리

다음 빈칸을 알맞게 채워 보자.



확인문제

다음 문제를 풀어 보자.

[㉠ 보충 · 심화 학습 226쪽]

복소수의 사칙계산
>> 50쪽

1 다음을 계산하여라.

(1) $(-3+4i) + (4+2i)$

(2) $(1-2i) - (-2+i)$

(3) $(1+3i)(2-i)$

(4) $\frac{3-i}{1+i}$

이차방정식의 판별식
>> 56쪽

2 다음 이차방정식의 근을 판별식을 이용하여 판별하여라.

(1) $x^2-3x-1=0$

(2) $4x^2-12x+9=0$

(3) $x^2+2x+3=0$

(4) $2x^2-5x+4=0$

이차방정식의 근과 계수의
관계 >> 58쪽

3 이차방정식 $2x^2-3x+10=0$ 의 두 근의 합과 곱을 구하여라.

복소수의 뜻 >> 47쪽

**4** 다음 등식이 성립하도록 하는 실수 x, y 의 값을 구하여라.

$$2x(3-i) + (1-5i)y = -8+12i$$

복소수의 사칙계산
>> 50쪽**5** 다음을 계산하여라.

$$(1) i+i^2+i^3+i^4$$

$$(2) \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{102}$$

이차방정식의 판별식
>> 56쪽**6** x 에 대한 이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k^2+ak-b+1=0$ 이 실수 k 의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 a, b 의 값을 구하여라.이차방정식의 근과 계수의
관계 >> 58쪽**7** 이차방정식 $x^2-x+3=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\alpha^3+\beta^3-3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.이차방정식의 근과 계수의
관계 >> 58쪽**8** 이차방정식 $x^2-2x+3=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때,

$$\frac{1}{\alpha^2-\alpha+1} + \frac{1}{\beta^2-\beta+1} \text{의 값을 구하여라.}$$

이차방정식의 근과 계수의
관계 >> 58쪽**9** 이차방정식 $x^2+ax-2b=0$ 의 서로 다른 두 실근 α, β 의 부호가 다를 때, 이차방정식 $x^2-(3a+2b)x+12b=0$ 의 두 근은 $|\alpha|+|\beta|, |\alpha\beta|$ 라고 한다. 이때 실수 a, b 의 값을 구하여라.

문제 해결력
기르기

이차방정식 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 두 근을 α , β 라고 할 때, $P(\alpha) = \beta$, $P(\beta) = \alpha$, $P(1) = 1$ 을 만족하는 이차식 $P(x)$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

1 $P(\alpha) = 1 - \alpha$, $P(\beta) = 1 - \beta$ 임을 보이고, 이차방정식 $P(x) + x - 1 = 0$ 의 두 근을 말하여라.

2 이차식 $P(x)$ 를 구하여라.

문제
만들기

위의 문제에서 다음을 모두 바꾸어 문제를 만들고, 그 문제를 풀어라.

$$x^2 - x + 1 = 0, P(1) = 1$$

.....

.....

.....

.....



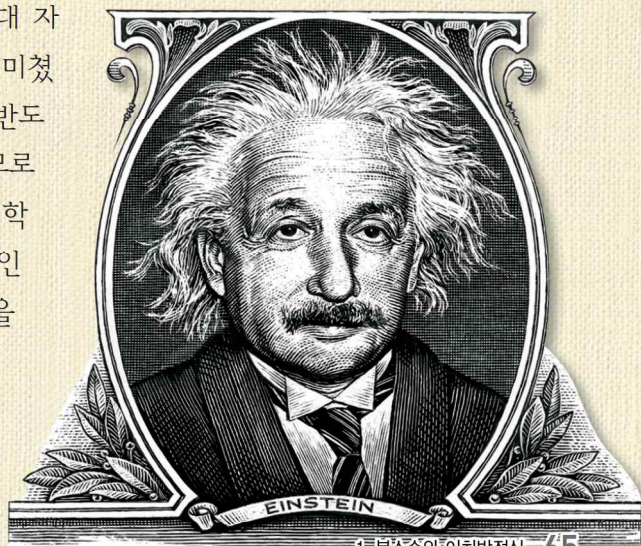
현대전화의 원리에는 허수가 숨어 있다.

17세기 영국의 과학자 뉴턴(Newton, I. ; 1642~1727)이 발견한 ‘제2운동 법칙’은 물체에 작용하는 힘과 그 물체의 운동 상태 사이의 관계를 나타낸 것으로 모든 물리적 현상에 적용되는 가장 기본적인 법칙이다. 이를 식으로 나타내면 $F=ma$ (F 는 힘, m 은 질량, a 는 가속도)와 같이 실수 범위의 등식이다.

그러나 20세기에 들어서면서 뉴턴의 운동 법칙으로 설명할 수 없는 물리적 현상들이 조금씩 관찰되기 시작하였다. 이와 같은 현상들을 독일의 과학자 아인슈타인(Einstein, A. ; 1879~1955)은 시간과 공간이 항구 불변의 절대적인 것이 아니라 관찰자의 운동 상태에 따라 다르게 관측된다는 ‘상대성 이론’으로 설명하였다. 상대성 이론에서의 식 $E=mc^2$ 도 실수 범위의 등식이다.

한편 아인슈타인의 상대성 이론도 원자나 전자의 운동과 같이 눈에 보이지 않는 미시 세계에서의 운동이 확률모형에 따라 움직인다는 사실을 설명할 수는 없다. 아인슈타인은 이와 같은 확률모형을 부정하면서 “신은 주사위 놀이를 하지 않는다.”는 유명한 말을 남겼다.

미시 세계의 물리적 현상은 오스트리아의 물리학자 슈뢰딩거(Schrödinger, E. ; 1887~1961)가 만든 ‘슈뢰딩거방정식’으로 설명될 수 있다. 이 방정식은 복소수 범위의 방정식으로서 양자역학의 기초를 마련해 주었고 현대 자연과학 전반에 지대한 영향을 미쳤다. 양자역학은 레이저 기술, 반도체 이론 등의 기본적 토대이므로 만일 허수가 없었더라면 양자역학도 없었을 것이고, 반도체 산업인 컴퓨터나 휴대전화도 불가능했을 것이다.





달의 중력가속도는 지구의 중력가속도의 $\frac{1}{6}$ 이므로 달과 지구에서 같은 물체를 같은 힘으로 위로 던져 올리면 지구에서 던진 물체가 먼저 바닥에 닿는다. 지구와 달 표면으로부터 a m 높이에서 초속 v m로 쏘아 올린 물체가 표면에 떨어질 때까지 걸리는 시간 x 초는 각각 이차방정식 $-\frac{1}{2}gx^2 + vx + a = 0$, $-\frac{1}{12}gx^2 + vx + a = 0$ (g 는 지구의 중력가속도)을 풀면 알 수 있다.

2

이차방정식과 이차함수

1. 이차함수와 이차방정식의 관계
2. 이차함수의 최대, 최소

준비 학습

1 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프를 이용하여 다음 이차함수의 그래프를 그려라.

(1) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$

(2) $y = \frac{1}{2}(x-3)^2$

2 다음 이차방정식의 근을 판별하여라.

(1) $2x^2 - 3x - 1 = 0$

(2) $x^2 - 3x + 9 = 0$

(3) $x^2 - 2x + 1 = 0$

(4) $3x^2 - 5x - 2 = 0$

1

이차함수와 이차방정식의 관계

- 이차함수와 이차방정식의 관계를 이해한다.
- 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다.

기하학은 고대 그리스에서, 대수학은 고대 인도와 아라비아에서 독립적으로 발전해 오다가 프랑스의 수학자 데카르트(Descartes, R. ; 1596~1650)가 좌표 개념을 도입한 후 기하학적 도형인 직선, 곡선 등을 대수 방정식으로 나타낼 수 있게 되었다. 그는 기하학과 대수학을 하나로 통합하여 해석기하학이라는 수학의 새로운 분야를 열었는데, 이로부터 이차방정식의 해와 이차함수의 그래프 사이의 관계를 알 수 있게 되었다.

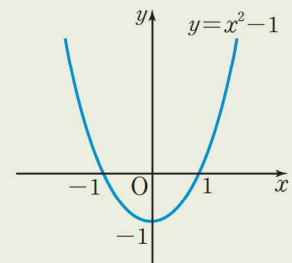


이차함수와 이차방정식의 관계

개 / 념 / 열 / 기

오른쪽 그림은 이차함수 $y=x^2-1$ 의 그래프를 그린 것이다.

- 1 이차함수 $y=x^2-1$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표를 말하여라.
- 2 이차방정식 $x^2-1=0$ 의 근을 구하고, 1의 결과와 비교하여라.



위의 개념 열기에서 이차함수 $y=x^2-1$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2-1=0$ 의 실근인 $-1, 1$ 과 같다.

일반적으로 이차함수 $y=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표는 이차방정식

$$ax^2+bx+c=0$$

의 실근과 같다.

그러므로 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프와 x 축의 교점의 개수는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 실근의 개수와 같다.

따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프와 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 관계는 이차방정식의 판별식 $D=b^2-4ac$ 의 부호에 따라 다음과 같다.



계곡이나 해협을 가로지르는 다리에서 이차함수의 그래프와 x 축의 위치 관계를 생각할 수 있다.

이차함수와 이차방정식의 관계

	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$ax^2+bx+c=0$ 의 근	서로 다른 두 실근 α, β ($\alpha<\beta$)	중근 α	서로 다른 두 허근
$y=ax^2+bx+c$ 의 그래프와 x 축의 위치 관계	서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다 (접한다).	만나지 않는다.
$y=ax^2+bx+c$ ($a>0$)의 그래프			
$y=ax^2+bx+c$ ($a<0$)의 그래프			

보기

- (1) 이차함수 $y=x^2-4x+3$ 의 그래프와 x 축의 위치 관계는 이차방정식 $x^2-4x+3=0$ 의 판별식 D 에서

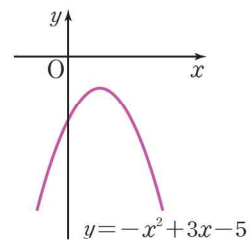
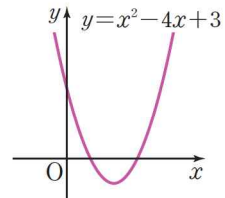
$$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot 3=1>0$$

이므로 서로 다른 두 점에서 만난다.

- (2) 이차함수 $y=-x^2+3x-5$ 의 그래프와 x 축의 위치 관계는 이차방정식 $-x^2+3x-5=0$ 의 판별식 D 에서

$$D=3^2-4\cdot (-1)\cdot (-5)=-11<0$$

이므로 만나지 않는다.



문제 01

다음 이차함수의 그래프와 x 축의 위치 관계를 말하여라.

(1) $y=2x^2-4x+1$

(2) $y=x^2-6x+9$

(3) $y=x^2-2x-3$

(4) $y=-3x^2+2x-1$

예제 01

이차함수 $y = -x^2 + x + k$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 k 의 값의 범위를 구하여라.

풀이

이차함수 $y = -x^2 + x + k$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $-x^2 + x + k = 0$ 의 판별식 D 는 $D > 0$ 이어야 하므로

$$D = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot k > 0$$

따라서 $k > -\frac{1}{4}$

답 $k > -\frac{1}{4}$

문제 02

이차함수 $y = kx^2 - x + 2$ ($k \neq 0$)의 그래프와 x 축의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k 의 값 또는 범위를 구하여라.

- (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
- (2) 한 점에서 만난다.
- (3) 만나지 않는다.

예제 02

이차방정식 $x^2 - 5x + k = 0$ 의 한 근은 2보다 크고, 다른 한 근은 2보다 작도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하여라.

풀이

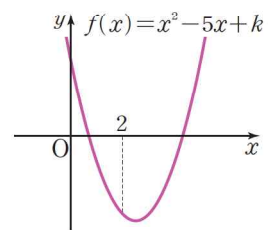
주어진 이차방정식의 한 근이 2보다 크고, 다른 한 근이 2보다 작으려면 이차함수 $f(x) = x^2 - 5x + k$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다. 이때 $D > 0$, $f(2) < 0$ 이므로

(i) $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k > 0$

$$25 - 4k > 0 \text{ 이므로 } k < \frac{25}{4}$$

(ii) $f(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + k < 0$ 이므로 $k < 6$

(i), (ii)에 의하여 $k < 6$



답 $k < 6$

문제 03

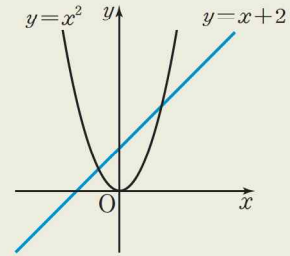
이차방정식 $x^2 + 2x - k = 0$ 의 두 근 사이에 -3 이 있도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하여라.

이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

개 / 념 / 열 / 기

오른쪽 그림은 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프와 직선 $y=x+2$ 를 그린 것이다.

- 1 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프와 직선 $y=x+2$ 의 교점의 개수를 말하여라.
- 2 이차방정식 $x^2=x+2$ 의 실근의 개수를 구하고, 1의 결과와 비교하여라.



위의 개념 열기에서 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프와 직선 $y=x+2$ 의 교점의 개수는 두 개이다. 이것은 이차방정식 $x^2=x+2$ 의 실근의 개수와 같다.

일반적으로 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프와 직선 $y=mx+n$ 의 교점의 x 좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$, 즉

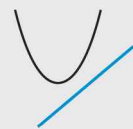
$$ax^2+(b-m)x+c-n=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

의 실근과 같다.

그러므로 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 이차방정식 ①의 실근의 개수와 같다.

따라서 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계는 이차방정식 ①의 판별식 D 의 부호에 따라 다음과 같다.

이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$y=ax^2+bx+c(a>0)$ 의 그래프와 직선 $y=mx+n(m>0)$ 의 위치 관계	서로 다른 두 점에서 만난다. 	한 점에서 만난다 (접한다). 	만나지 않는다. 

보기

- (1) 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프와 직선 $y=x+1$ 의 위치 관계는 이차방정식 $x^2-x-1=0$ 의 판별식 D 에서

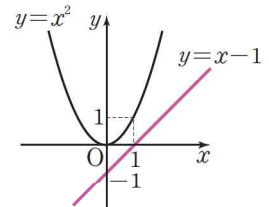
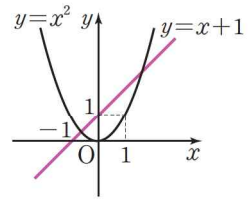
$$D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot (-1)=5>0$$

이므로 서로 다른 두 점에서 만난다.

- (2) 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프와 직선 $y=x-1$ 의 위치 관계는 이차방정식 $x^2-x+1=0$ 의 판별식 D 에서

$$D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 1=-3<0$$

이므로 만나지 않는다.



문제 04 이차함수 $y=2x^2-1$ 의 그래프와 다음 직선의 위치 관계를 말하여라.

- (1) $y=x+1$ (2) $y=-4x-3$
(3) $y=2x-5$ (4) $y=-3x+1$

이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

예제 03 이차함수 $y=x^2-2x-1$ 의 그래프와 직선 $y=2x+k$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 k 의 값의 범위를 구하여라.

실마리 이차방정식 $x^2-2x-1=2x+k$ 의 판별식 D 의 부호를 이용한다.

풀이 이차함수 $y=x^2-2x-1$ 의 그래프가 직선 $y=2x+k$ 와 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2-4x-k-1=0$ 의 판별식 D 는 $D>0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot(-k-1)=k+5>0$$

따라서 $k>-5$

답 $k>-5$

문제 05 이차함수 $y=-x^2+2x$ 의 그래프와 직선 $y=x+k$ 의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k 의 값 또는 범위를 구하여라.

- (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 한 점에서 만난다.
(3) 만나지 않는다.

2

이차함수의 최대, 최소

• 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

신기전은 1448년(세종 30년)에 만들어진 조선 시대의 로켓 추진 화살이다. 임진왜란 때 2천 3백 명의 군사로 일본군 3만여 명을 격퇴한 행주대첩의 승리도 신기전이란 뛰어난 무기가 있었기에 가능했다고 한다. 신기전의 최대 거리와 최대 높이는 이차함수를 이용하여 구할 수 있다.



이차함수의 최대, 최소

개 / 념 / 열 / 기

화차에서부터 날아간 화살의 수평 거리를 x m, 지면에서의 높이를 y m라고 하면 $y = -\frac{1}{150}x^2 + x + \frac{5}{2}$ 인 관계가 성립한다고 할 때, 화살의 최대 높이를 구하여라.

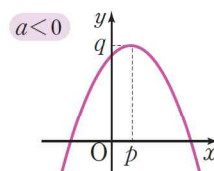
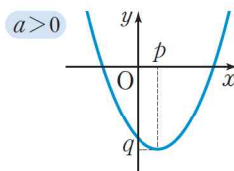
위의 개념 열기에서

$$y = -\frac{1}{150}x^2 + x + \frac{5}{2} = -\frac{1}{150}(x-75)^2 + 40$$

이므로 최댓값은 $x=75$ 일 때 40이다. 따라서 화살의 최대 높이는 40 m이다.

일반적으로 x 의 값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ 는

- ① $a>0$ 이면 최솟값은 $x=p$ 일 때 q 이고, 최댓값은 없다.
- ② $a<0$ 이면 최댓값은 $x=p$ 일 때 q 이고, 최솟값은 없다.

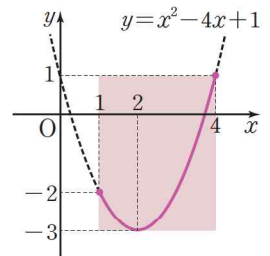


그러나 x 의 값의 범위가 제한된 경우에 그 범위의 모든 x 에 대한 함수값 중에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이 된다.

예제 01

$1 \leq x \leq 4$ 일 때, 이차함수 $y = x^2 - 4x + 1$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

풀이 $y = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3$ 이고, $1 \leq x \leq 4$ 이므로
그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서
최댓값은 $x=4$ 일 때 1
최솟값은 $x=2$ 일 때 -3
이다.



답 최댓값: 1, 최솟값: -3

문제 01

다음 주어진 범위에서 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

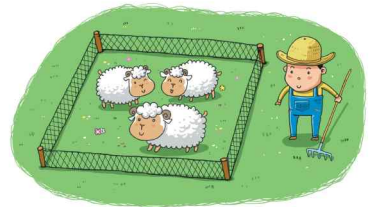
(1) $y = x^2 - 2x$ ($-1 \leq x \leq 2$)

(2) $y = -2x^2 - 4x + 1$ ($0 \leq x \leq 1$)

이차함수의 최댓값과 최솟값의 활용

예제 02

길이가 40 m인 철망을 이용하여 직사각형 모양의 가축우리를 가능한 한 넓게 만들려고 할 때, 가축우리의 최대 넓이를 구하여라.
(단, 철망의 두께와 폭은 고려하지 않는다.)



풀이 가로의 길이를 x 라고 하면 세로의 길이는 $20-x$ 이고, $x > 0$, $20-x > 0$ 이므로 $0 < x < 20$
따라서 가축우리의 넓이를 y 라고 하면

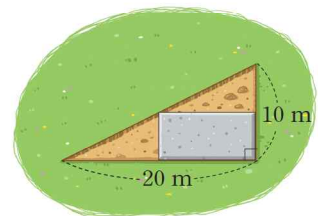
$$y = x(20-x) = -x^2 + 20x = -(x-10)^2 + 100$$

이때 $0 < x < 20$ 이므로 가축우리의 최대 넓이는 $x=10$ 일 때 100 m^2 이다.

답 100 m^2

문제 02

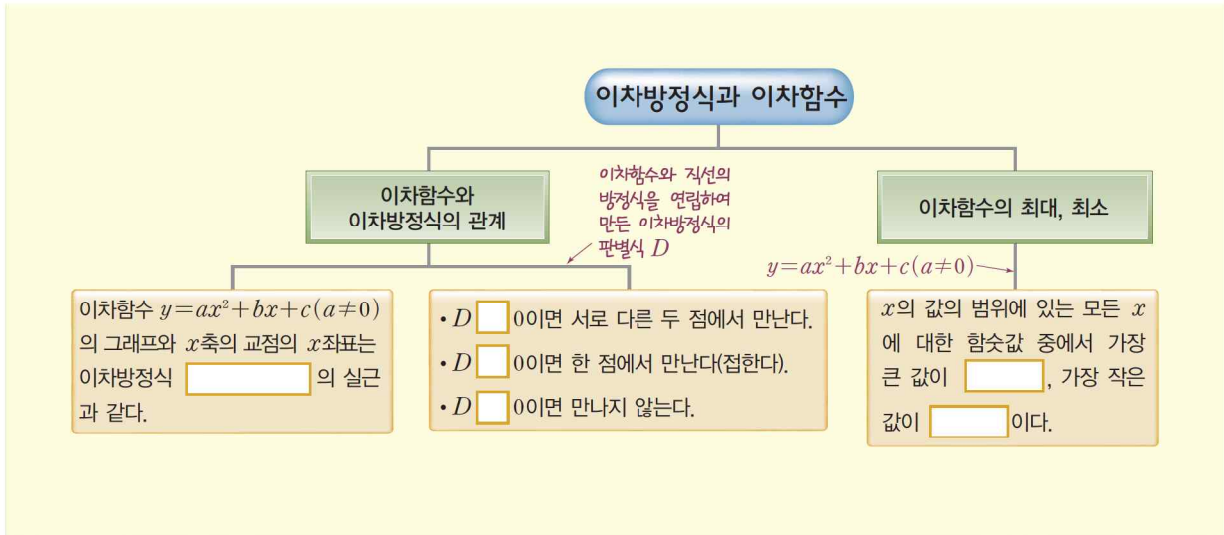
오른쪽 그림과 같이 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 10 m, 20 m인 직각삼각형 모양의 땅이 있다. 이 땅에 밑면이 직사각형 모양인 창고를 지으려고 할 때, 창고 밑면의 최대 넓이를 구하여라.





개념 정리

다음 빈칸을 알맞게 채워 보자.



확인문제

다음 문제를 풀어 보자.

[㉠ 보충 · 심화 학습 231쪽]

이차함수와 이차방정식의
관계 >> 67쪽



1 다음 이차함수의 그래프와 x 축의 교점의 개수를 구하여라.

(1) $y = x^2 - 5x + 1$ (2) $y = x^2 - 4x + 4$ (3) $y = 2x^2 + 3x + 5$

이차함수의 그래프와 직선
의 위치 관계 >> 70쪽



2 다음 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 말하여라.

(1) $y = x^2 + 3x + 4$, $y = -2x - 2$

(2) $y = x^2 + 2x + 3$, $y = 4x + 2$

(3) $y = 2x^2 - 3x + 5$, $y = x + 2$

이차함수의 최대, 최소
>> 72쪽



3 다음 주어진 범위에서 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $y = x^2 - 3x + 5$ ($2 \leq x \leq 4$)

(2) $y = -x^2 - 2x + 5$ ($-2 \leq x \leq 1$)

이차함수와 이차방정식의
관계 >> 67쪽

이차함수와 이차방정식의
관계 >> 67쪽

이차함수의 그래프와 직선
의 위치 관계 >> 70쪽

이차함수의 최대, 최소
>> 72쪽

이차함수의 최대, 최소
>> 72쪽



- 4** 이차함수 $y = x^2 - 2(a - 2k)x + a^2 - 2k + 4k^2$ 의 그래프가 실수 k 의 값에 관계없이 항상 x 축에 접할 때, 실수 a 의 값을 구하여라.



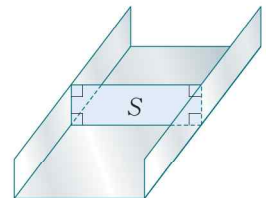
- 5** 이차함수 $y = x^2 - ax + 3$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{6}$ 일 때, 실수 a 의 값을 모두 구하여라.



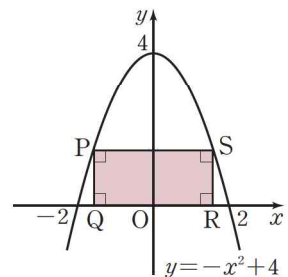
- 6** 이차함수 $y = 3x^2 - 4x + 1$ 의 그래프와 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하여라.



- 7** 오른쪽 그림과 같이 폭이 16 cm인 양철판을 구부려서 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 물받이를 수직으로 자른 단면의 넓이 S 를 최대로 하려면 양 끝에서 얼마만큼 구부려야 하는지 구하여라.



- 8** 오른쪽 그림에서 직사각형 PQRS의 꼭짓점 P, S는 이차함수 $y = -x^2 + 4$ 의 그래프 위에 있고 꼭짓점 Q, R는 x 축 위에 있다. 이 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.
(단, 점 S는 제1사분면 위의 점이다.)



추론 능력
기르기

함수 $y = \begin{cases} x(x-3) & (x < 0 \text{ 또는 } x > 3) \\ -x(x-3) & (0 \leq x \leq 3) \end{cases}$ 의 그래프와 직선 $y = m(x-4)$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

1 두 이차함수 $y = x(x-3)(x < 0 \text{ 또는 } x > 3)$, $y = -x(x-3)(0 \leq x \leq 3)$ 의 그래프가 각각 직선 $y = m(x-4)$ 와 한 점에서 만날 때, 실수 m 의 값을 구하여라.

2 함수 $y = \begin{cases} x(x-3) & (x < 0 \text{ 또는 } x > 3) \\ -x(x-3) & (0 \leq x \leq 3) \end{cases}$ 의 그래프와 직선 $y = m(x-4)$ 의 교점의 개수를 실수 m 의 값의 범위에 따라 구하여라.

사고
확장하기

함수 $y = \begin{cases} (x+1)(x-4) & (x < -1 \text{ 또는 } x > 4) \\ -(x+1)(x-4) & (-1 \leq x \leq 4) \end{cases}$ 의 그래프와 직선 $y = x + m$ 의 교점의 개수를 실수 m 의 값의 범위에 따라 구하여라.

.....

.....

.....

.....



/모바일 세상의 견인차/

애플리케이션 개발자

스마트 폰은 우리의 생활, 문화, 사회를 빠르게 변화시키고 있다. 사람들은 언제 어디서나 인터넷에 접속할 수 있는 ‘모바일’ 세상 속에서 살고 있고, 새롭게 개발되는 ‘애플리케이션’을 탐색하고 활용하고 있다.

21세기 모바일 세상에서 가장 잘 나가는 직업 중 하나를 꼽자면 스마트 폰 애플리케이션 개발자라고 할 수 있다. 지구촌 이용자들이 손쉽게 사용할 수 있는 잘 만든 애플리케이션 하나면 돈과 명예 모두를 한 손에 질 수 있는 좋은 기회가 될 수 있다.

애플리케이션 개발에 필요한 지식은 기본적으로 Object-C 또는 JAVA와 같은 컴퓨터 프로그래밍 언어이다. 거기에 더하여 애플리케이션의 캐릭터들이 걷고, 뛰고, 점프하고, 회전하는 수많은 움직임을 화면에 실감나게 구현하기 위한 3차원 그래픽스, 물리법칙, 수학적 지식들이 필요하다.

예를 들어 한 동안 최다 다운로드를 기록했던 인기 스마트 폰 게임인 새 잡기 게임은 새총으로 총알을 날려 보내 쌓여 있는 나무나 돌, 새장 등을 무너뜨리는 게임이다. 이 게임에서 새총의 각도와 총알의 속도, 높이 등에 대한 수학 공식을 탄도 방정식이라고 하는데 이 방정식은 이차함수 식으로 나타내어진다.





주어진 정육면체의 두 배의 부피를 가지는 정육면체를 만들 수 있을까?
이 문제를 ‘정육면체의 배적 문제’라고 하는데 그 유래에는 다음과 같은 전설이 있다. “기원전 5세기 무렵 그리스의 델로스 섬에 무서운 전염병이 돌고 있었다. 사람들은 이것을 신의 재앙으로 생각하고 아폴로 신전에서 병마를 쫓아달라고 기도를 올렸다. 아폴로 신은 그 응답으로 정육면체 모양의 제단의 부피를 두 배로 늘리면 재앙이 사라질 것이라고 계시하였다.” 그러나 그리스 사람들은 제단의 부피를 정확히 두 배로 늘리지 못하였다. 정육면체 모양의 제단의 한 모서리의 길이를 a 라고 할 때, 제단의 부피를 2배로 늘리려면 $x^3=2a^3$ 과 같은 삼차방정식의 해 x 를 구해야 하는데 그 당시에는 그 해를 구할 수 없었기 때문이다.

3

여러 가지 방정식

1. 삼차방정식과 사차방정식 2. 연립방정식

준비학습

1 다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^3+3x^2+3x+1

(2) x^3+8

(3) x^4-81

(4) x^4+x^2-2

2 다음 연립방정식을 풀어라.

(1)
$$\begin{cases} x=-2y \\ 3x+y=5 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} 2x-y=8 \\ x+y=1 \end{cases}$$

1

삼차방정식과 사차방정식

- 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다.

삼차방정식의 일반적인 해법은 카르다노(Cardano, G. ; 1501~1576)가 쓴 책 “위대한 술법”에 처음으로 나타났다. 그러나 그는 이 책에서 삼차방정식의 해법이 원래 타르탈리아(Tartaglia, N. F. ; 1499~1557)의 것임을 시사하고 있다. 사차방정식의 해법은 카르다노의 제자인 페라리(Ferrari, L. ; 1522~1565)에 의하여 발견되었다.



삼차방정식과 사차방정식의 풀이

개 / 념 / 열 / 기

한 모서리의 길이가 x cm인 정육면체 모양의 상자에서 가로와 세로의 길이를 각각 3 cm, 2 cm만큼 늘리고, 높이를 1 cm만큼 줄여서 만든 새로운 상자의 부피가 60 cm^3 라고 할 때, x 의 값을 구하기 위한 방정식을 세워라.



위의 개념 열기에서 x 의 값을 구하기 위한 방정식은

$$(x+3)(x+2)(x-1)=60$$

$$x^3+4x^2+x-66=0$$

이다.

다항식 $P(x)$ 가 x 에 대한 삼차식, 사차식일 때, 방정식

$$P(x)=0$$

을 각각 x 에 대한 삼차방정식, 사차방정식이라고 한다.

열린 문제 01

우리 생활 주변에서 삼차방정식 또는 사차방정식으로 나타내어지는 예를 찾아라.

일반적으로 삼차 이상의 방정식을 푸는 것은 쉽지 않다. 그러나 방정식이 인수 분해되는 경우에는 그 해를 쉽게 구할 수 있다.

|문제| 02 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3 - 9x = 0$

(2) $x^4 - 4x^2 = 0$

인수분해를 이용하여 삼차, 사차방정식 풀기

예제 01 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3 - 8 = 0$

(2) $x^4 - x^2 - 6 = 0$

풀이 (1) 주어진 방정식의 좌변을 인수분해하면

$$(x-2)(x^2+2x+4)=0$$

$$x-2=0 \text{ 또는 } x^2+2x+4=0$$

따라서 주어진 삼차방정식의 근은

$$x=2 \text{ 또는 } x=-1 \pm \sqrt{3}i$$

(2) $x^2=X$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$X^2 - X - 6 = 0$$

좌변을 인수분해하면

$$(X-3)(X+2)=0$$

$$X=3 \text{ 또는 } X=-2$$

즉, $x^2=3$ 또는 $x^2=-2$

따라서 주어진 사차방정식의 근은

$$x = \pm\sqrt{3} \text{ 또는 } x = \pm\sqrt{2}i$$

답 (1) $x=2$ 또는 $x=-1 \pm \sqrt{3}i$ (2) $x = \pm\sqrt{3}$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}i$

|문제| 03 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3 + 27 = 0$

(2) $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$

(3) $2x^4 + 5x^2 - 3 = 0$

(4) $(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$

예제 02

다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3 - 3x^2 - 2x + 4 = 0$

(2) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4 = 0$

실마리 인수정리를 이용하여 좌변의 인수를 구한 다음 조립제법을 이용한다.

풀이

(1) $P(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 4$ 라고 하면 $P(1) = 0$ 이므로 인수정리에 의하여 $x - 1$ 은 $P(x)$ 의 인수이다.

조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하면

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 4)$$

따라서 주어진 방정식은

$$(x - 1)(x^2 - 2x - 4) = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 1 \pm \sqrt{5}$$

1	1	-3	-2	4
		1	-2	-4
	1	-2	-4	0

(2) $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4$ 라고 하면 $P(-1) = 0$ 이므로 인수정리에 의하여 $x + 1$ 은 $P(x)$ 의 인수이다.

조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하면

$$P(x) = (x + 1)(x^3 - 4x^2 + 6x - 4)$$

이때 $Q(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$ 라고 하면

$Q(2) = 0$ 이므로 인수정리에 의하여 $x - 2$ 는 $Q(x)$ 의 인수이다.

조립제법을 이용하여 $Q(x)$ 를 인수분해하면

$$Q(x) = (x - 2)(x^2 - 2x + 2)$$

따라서 주어진 방정식은

$$(x + 1)(x - 2)(x^2 - 2x + 2) = 0$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 2 \text{ 또는 } x = 1 \pm i$$

-1	1	-3	2	2	-4
		-1	4	-6	4
	1	-4	6	-4	0

2	1	-4	6	-4
		2	-4	4
	1	-2	2	0

답 (1) $x = 1$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{5}$ (2) $x = -1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 1 \pm i$

문제 04

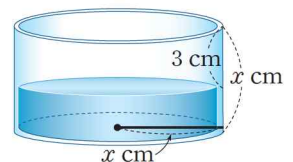
다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

(2) $x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 3x - 10 = 0$

문제 05

오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이와 높이가 모두 x cm인 원기둥 모양의 그릇에 50π cm³의 물을 부었더니 그릇의 위에서부터 3 cm만큼이 남았다. 이때 x 의 값을 구하여라. (단, 그릇의 두께는 고려하지 않는다.)



삼차방정식과 사차방정식에서 한 근이 주어지면 나머지 근을 구할 수 있다.

한 근이 주어질 때, 나머지 근 구하기

예제 03 삼차방정식 $x^3 - (a+1)x^2 + 4x - a = 0$ 의 한 근이 $1+i$ 일 때, 실수 a 의 값과 나머지 두 근을 구하여라.

풀이 주어진 방정식에 $x=1+i$ 를 대입하면

$$(1+i)^3 - (a+1)(1+i)^2 + 4(1+i) - a = 0$$

 이 식을 정리하면 $2 - a + (4 - 2a)i = 0$
 이때 $2 - a = 0$, $4 - 2a = 0$ 이므로 $a = 2$
 따라서 주어진 방정식은 $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$
 인수정리를 이용하여 좌변을 인수분해하면 $(x-1)(x^2 - 2x + 2) = 0$
 $x = 1$ 또는 $x = 1 \pm i$
 따라서 나머지 두 근은 $x = 1$ 또는 $x = 1 - i$

다른 풀이 계수가 모두 실수이므로 $1+i$ 가 근이면 $1-i$ 도 근이다.
 $1+i$, $1-i$ 를 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 - 2x + 2 = 0$
 나머지 한 근을 α 라고 하면 주어진 삼차방정식은 $(x-\alpha)(x^2 - 2x + 2) = 0$, 즉

$$x^3 - (2+\alpha)x^2 + (2+2\alpha)x - 2\alpha = 0$$

 이때 $a+1=2+\alpha$, $4=2+2\alpha$, $-a=-2\alpha$ 이므로 $\alpha=1$, $a=2$
 따라서 나머지 두 근은 $x=1$ 또는 $x=1-i$

답 $a=2$, $x=1$ 또는 $x=1-i$

문제 06 삼차방정식 $x^3 - 3x^2 + (a+2)x - 5 = 0$ 의 한 근이 $1+2i$ 일 때, 실수 a 의 값과 나머지 두 근을 구하여라.

문제 07 사차방정식 $x^4 + ax^3 + ax^2 + 11x + b = 0$ 의 두 근이 -2 , 3 일 때, 실수 a , b 의 값과 나머지 두 근을 구하여라.



토의하기

삼차방정식 $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라고 할 때, 이 삼차방정식의 다른 허근은 ω^2 이다. 그 이유에 대하여 토의하여라.

2

연립방정식

- 미지수가 3개인 연립일차방정식과 미지수가 2개인 연립이차 방정식을 풀 수 있다.

방정식은 기원전 1세기 무렵 중국의 수학 책인 “구장산술”에서 유래하였다. 이 책의 제8장에서 나오는 ‘방정’이라는 단어는 연립방정식을 풀 때 사용한 나뭇가지 모양이 정방형(정사각형)이었다고 해서 붙여진 이름이라고 한다.



미지수가 3개인 연립일차방정식의 풀이

개 / 념 / 열 / 기

다음은 “구장산술”의 제8장 방정에 있는 문제이다.

상품 3다발, 중품 2다발, 하품 1다발의 벼는 알곡 39말이 된다.
 상품 2다발, 중품 3다발, 하품 1다발의 벼는 알곡 34말이 된다.
 상품 1다발, 중품 2다발, 하품 3다발의 벼는 알곡 26말이 된다.
 그러면 상품, 중품, 하품 1다발의 벼는 각각 알곡 몇 말이 되는가?

말은 부피의 단위로서 곡식, 액체, 가루 따위의 부피를 잴 때 쓴다.

상품, 중품, 하품 1다발의 벼에서 나는 알곡의 양을 각각 x , y , z 말이라고 할 때, x , y , z 의 값을 구하기 위한 식을 세워라.

위의 개념 열기에서 식을 세우면

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

과 같이 미지수가 3개인 연립일차방정식이 된다.

미지수가 3개인 연립일차방정식은 미지수 중에서 어느 하나를 없애고 미지수가 2개인 연립일차방정식으로 만들어서 풀 수 있다.

예제 01 다음 연립방정식을 풀어라.

$$(1) \begin{cases} x+y+z=5 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2x-y+z=10 & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 3x-2y-z=1 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x+y=3 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ y+z=4 & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ z+x=5 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

실마리 3개의 미지수 x, y, z 중에서 하나를 없애고 미지수가 2개인 연립방정식으로 만든다.

풀이 ○ (1) ①-②를 하면 $-x+2y=-5 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$
 ②+③을 하면 $5x-3y=11 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$
 ④, ⑤를 연립하여 풀면 $x=1, y=-2$
 이것을 ①에 대입하면 $z=6$
 따라서 $x=1, y=-2, z=6$

(2) ①-②를 하면 $x-z=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$
 ③, ④를 연립하여 풀면 $x=2, z=3$
 $x=2$ 를 ①에 대입하면 $y=1$
 따라서 $x=2, y=1, z=3$

다른 풀이 ○ (2) ①+②+③을 하면 $2x+2y+2z=12$
 즉, $x+y+z=6 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$
 ①을 ④에 대입하면 $z=3$
 ②를 ④에 대입하면 $x=2$
 ③을 ④에 대입하면 $y=1$
 따라서 $x=2, y=1, z=3$

답 ① $x=1, y=-2, z=6$ ② $x=2, y=1, z=3$

|문제| 01 다음 연립방정식을 풀어라.

$$(1) \begin{cases} x+y+z=2 \\ x+3y+4z=1 \\ 2x+y-z=-6 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x+y+2z=6 \\ x+2y+z=10 \\ 2x+y+z=12 \end{cases}$$

|문제| 02 세 자리의 자연수가 있다. 각 자리의 숫자의 합은 6이고, 백의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자의 합은 십의 자리의 숫자의 2배와 같다. 또 각 자리의 숫자를 거꾸로 나열하면 처음 수보다 198만큼 크다. 처음 세 자리의 자연수를 구하여라.

미지수가 3개인 연립일차방정식 중에는 해가 무수히 많은 경우와 해가 없는 경우가 있다.

해가 무수히 많거나 없는 경우

예제 02 다음 연립방정식을 풀어라.

$$(1) \begin{cases} x+2y+z=1 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2x+y-z=2 & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 3x+4y+z=3 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x+y-z=3 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x-2y+3z=1 & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 2x-y+2z=1 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

풀이 ○

(1) ①+②를 하면 $3x+3y=3$

즉, $x+y=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$

②+③을 하면 $5x+5y=5$

즉, $x+y=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$

④와 ⑤는 일치하므로 이를 동시에 만족하는 x, y 의 값은 하나로 정해지지 않는다.

이때 $x=k$ (k 는 임의의 실수)라고 하면 ④에서

$$y=-k+1$$

$x=k, y=-k+1$ 을 ①에 대입하면

$$z=k-1$$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$$x=k, y=-k+1, z=k-1 \quad (k \text{는 임의의 실수})$$

의 꼴이므로 무수히 많다.

(2) ① $\times$ 2+②를 하면 $3x+z=7 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$

③ $\times$ 2-②를 하면 $3x+z=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$

이때 ④와 ⑤를 동시에 만족하는 x, z 의 값은 없다.

따라서 주어진 연립방정식의 해는 없다.

답 (1) 해는 무수히 많다. (2) 해는 없다.

문제 03 다음 연립방정식을 풀어라.

$$(1) \begin{cases} x+y+2z=3 \\ 2x-y+z=0 \\ x+2y+3z=5 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x-3y+2z=3 \\ -x+2y-z=5 \\ 2x-y-z=-1 \end{cases}$$

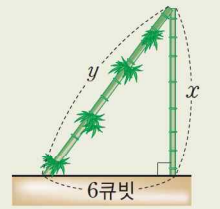
미지수가 2개인 연립이차방정식의 풀이

개 / 념 / 열 / 기

1큐빗은 사람의 손끝에서 팔꿈치까지의 길이를 나타낸다.

다음은 인도의 수학자 브라마굽타(Brahmagupta ; 598~670)가 제시한 문제이다. 이 문제를 해결하여라.

오른쪽 그림과 같이 높이가 18큐빗인 대나무가 바람에 부러져서 그 끝이 대나무가 처음 나온 부분으로부터 6큐빗 떨어진 곳에 닿았다. 이때 대나무가 부러져서 생기는 두 부분의 길이 x, y 를 구하기 위한 식을 세워라.



위의 개념 열기에서 식을 세우면 $\begin{cases} x+y=18 \\ -x^2+y^2=36 \end{cases}$ 이다.

이와 같이 미지수가 2개인 연립방정식에서 차수가 가장 높은 방정식이 이차방정식일 때, 이 연립방정식을 연립이차방정식이라고 한다.

일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식은 일차방정식을 한 미지수에 대하여 정리하고, 이것을 이차방정식에 대입하여 한 미지수에 대한 이차방정식으로 만들어서 풀 수 있다.

연립이차방정식 풀기 (1)

예제 03 다음 연립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} x+y=3 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x^2+xy-y^2=5 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

풀이 ○ ①에서 $y=3-x$ $\cdots \cdots \textcircled{3}$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } & x^2+x(3-x)-(3-x)^2=5 \\ & x^2-9x+14=0 \end{aligned}$$

따라서 $x=2$ 또는 $x=7$

이것을 ③에 각각 대입하면 $x=2$ 일 때 $y=1$, $x=7$ 일 때 $y=-4$

따라서 주어진 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=7 \\ y=-4 \end{cases}$

답 풀이 참조

| 문제 | **04** 다음 연립방정식을 풀어라.

$$(1) \begin{cases} x-2y=1 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3x-y=1 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$$

두 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식에서 한 이차방정식이 두 일차식의 곱으로 인수분해되는 경우에는 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 두 개의 연립방정식으로 만들어서 풀 수 있다.

연립이차방정식 풀기 (2)

예제 04 다음 연립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x^2+xy+y^2=13 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

실마리 ①의 좌변을 인수분해하여 얻은 두 개의 일차방정식과 ②를 각각 연립하여 푼다.

풀이 ①의 좌변을 인수분해하면 $(x+y)(x-3y)=0$

따라서 $x=-y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=-y$ 를 ②에 대입하면

$$(-y)^2+(-y)\cdot y+y^2=13, y^2=13$$

$$y=\pm\sqrt{13}$$

따라서 $y=\sqrt{13}$ 일 때 $x=-\sqrt{13}$, $y=-\sqrt{13}$ 일 때 $x=\sqrt{13}$

(ii) $x=3y$ 를 ②에 대입하면

$$(3y)^2+3y\cdot y+y^2=13, y^2=1$$

$$y=\pm 1$$

따라서 $y=1$ 일 때 $x=3$, $y=-1$ 일 때 $x=-3$

(i), (ii)에 의하여 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=\sqrt{13} \\ y=-\sqrt{13} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-\sqrt{13} \\ y=\sqrt{13} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$$

답 풀이 참조

| 문제 | **05** 다음 연립방정식을 풀어라.

$$(1) \begin{cases} x^2-4xy+3y^2=0 \\ x^2-3xy+4y^2=8 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x^2-5xy+2y^2=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$$

두 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식에서 인수분해되는 이차방정식이 없는 경우에는 상수항을 없앤 식을 두 일차식의 곱으로 인수분해하여 풀 수 있다.

연립이차방정식 풀기 (3)

예제 05

다음 연립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} x^2 + xy - 3y^2 = -3 & \cdots \cdots ① \\ x^2 - xy + y^2 = 3 & \cdots \cdots ② \end{cases}$$

실마리 상수항을 없앤 식을 일차식의 곱으로 인수분해한다.

풀이 ○

①+②를 하여 정리하면 $x^2 - y^2 = 0$

이를 인수분해하면 $(x+y)(x-y) = 0$

따라서 $x = -y$ 또는 $x = y$

(i) $x = -y$ 를 ②에 대입하면

$$(-y)^2 - (-y) \cdot y + y^2 = 3, y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

따라서 $y = 1$ 일 때 $x = -1$, $y = -1$ 일 때 $x = 1$

(ii) $x = y$ 를 ②에 대입하면

$$y^2 - y \cdot y + y^2 = 3, y^2 = 3$$

$$y = \pm \sqrt{3}$$

따라서 $y = \sqrt{3}$ 일 때 $x = \sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}$ 일 때 $x = -\sqrt{3}$

(i), (ii)에 의하여 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$$

답 풀이 참조

문제 06

다음 연립방정식을 풀어라.

$$(1) \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x^2 + 3xy - y^2 = 1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 4 \\ x^2 - xy + 2y^2 = 2 \end{cases}$$



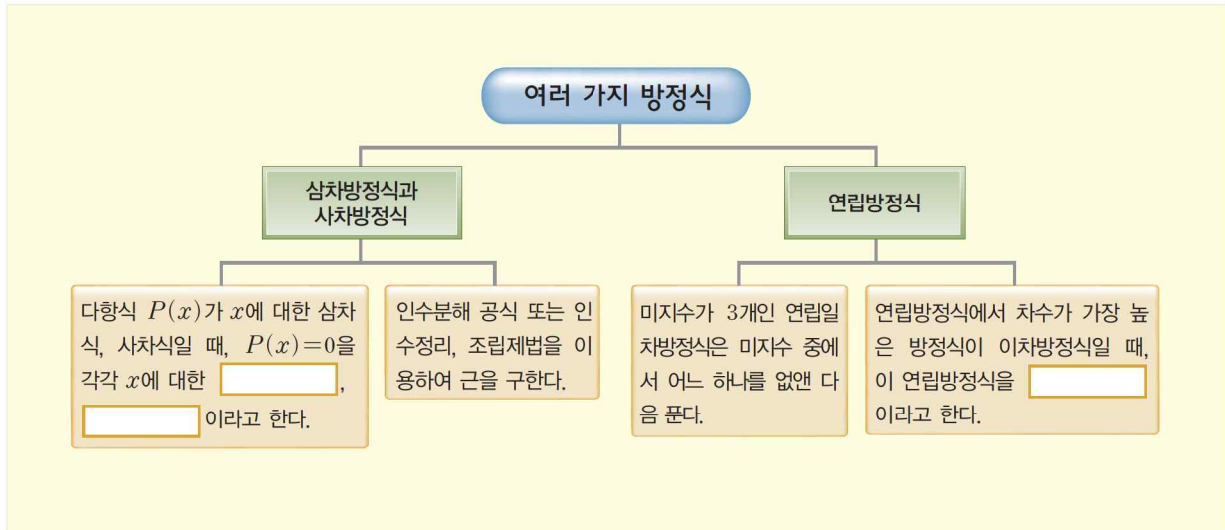
소통과
나눔

토의하기

연립방정식 $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-3 \end{cases}$ 을 푸는 방법에 대하여 토의하여라.



개 념 정 리 다음 빈칸을 알맞게 채워 보자.



확 인 문 제 다음 문제를 풀어 보자.

[㉠ 보충 · 심화 학습 234쪽]

삼차방정식과 사차방정식의 풀이 >> 79쪽

◆◆◆ **1** 다음 방정식을 풀어라.

(1) $8x^3 - 1 = 0$

(2) $x^3 - 2x^2 + 2x + 5 = 0$

(3) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4 = 0$

(4) $(x^2 - x)^2 - 2(x^2 - x) - 8 = 0$

미지수가 3개인 연립일차 방정식의 풀이 >> 83쪽

◆◆◆ **2** 다음 연립방정식을 풀어라.

(1)
$$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ x + 2y + z = 7 \\ x + y + 2z = 12 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = 6 \\ z + x = 7 \end{cases}$$

미지수가 2개인 연립이차 방정식의 풀이 >> 86쪽

◆◆◆ **3** 연립방정식 $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$ 를 풀어라.



중단원 마무리

삼차방정식과 사차방정식의 풀이 >> 79쪽



4 방정식 $x(x+1)(x+2)(x+3)=48$ 을 풀어라.

삼차방정식과 사차방정식의 풀이 >> 79쪽



5 삼차방정식 $x^3-2ax^2+(b+1)x+2=0$ 의 한 근이 $1+i$ 일 때, 실수 a , b 의 값을 구하여라.

미지수가 2개인 연립이차방정식의 풀이 >> 86쪽



6 연립방정식 $\begin{cases} x^2-2xy+y^2=1 \\ x^2-3xy+5y^2=3 \end{cases}$ 을 풀어라.

미지수가 3개인 연립이차방정식의 풀이 >> 83쪽

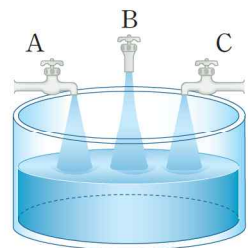


7 연립방정식 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ 2x+5y+8z=k \end{cases}$ 의 해가 무수히 많을 때, 실수 k 의 값을 구하여라.

미지수가 3개인 연립이차방정식의 풀이 >> 83쪽



8 세 개의 수도꼭지 A, B, C에서 나오는 물로 비어 있는 물통을 가득 채우려고 한다. 세 개의 수도꼭지를 모두 틀어서 채우면 60분이 걸리고, A, C 두 개의 수도꼭지를 틀어서 채우면 90분, B, C 두 개의 수도꼭지를 틀어서 채우면 120분이 걸린다고 한다. 수도꼭지 C만 틀어서 물통을 채울 때 걸리는 시간은 몇 분인지 구하여라.



추론 능력
기르기

삼차방정식 $x^3-1=0$ 의 한 허근을 ω 라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

- 1 $\omega^{13}+\omega^{12}+\omega^{11}+\cdots+\omega+1$ 을 간단히 하여라.
- 2 $\omega^{14}+\omega^{13}+\omega^{12}+\cdots+\omega+1$ 을 간단히 하여라.
- 3 $\omega^{15}+\omega^{14}+\omega^{13}+\cdots+\omega+1$ 을 간단히 하여라.
- 4 $\omega^n+\omega^{n-1}+\omega^{n-2}+\cdots+\omega+1$ 의 값이 n 의 값에 따라 어떻게 변하는지 추론하고, 그 규칙을 찾아라. (단, $n \geq 3$ 인 자연수)

사고
확장하기

삼차방정식 $x^3+1=0$ 의 한 허근을 ω 라고 할 때,

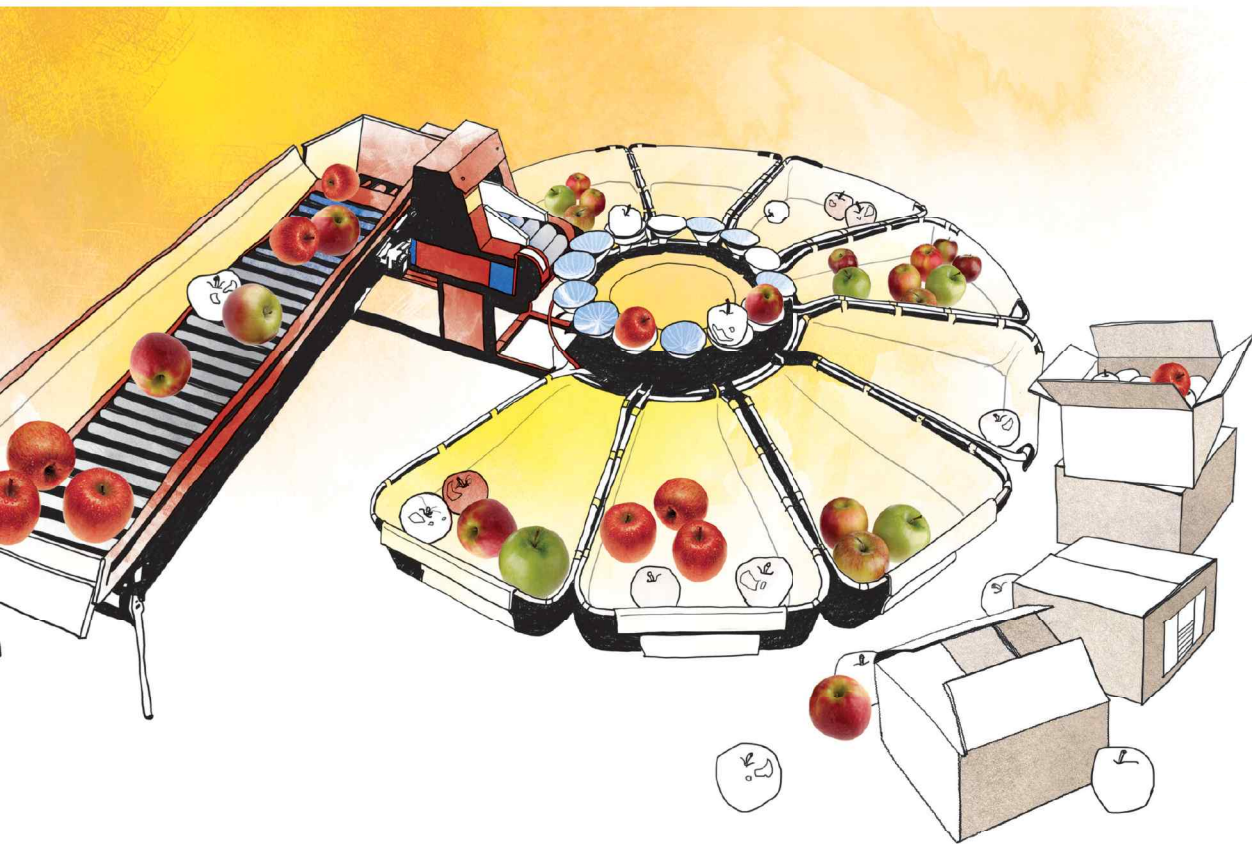
$\omega^n+\omega^{n-1}+\omega^{n-2}+\cdots+\omega+1$
을 간단히 하여라. (단, $n \geq 6$ 인 자연수)

.....

.....

.....

.....



과 수 농가에서 수확한 과일들은 그 크기나 무게 또는 외형 상태 등에 따라 몇 개의 등급으로 분류되어 판매된다. 이때 과일의 표피 손상 방지와 인건비 절감 등의 목적으로 자동선별기를 사용한다. 자동선별기는 과일의 무게를 센서로 인식하여 미리 설정한 무게 범위에 따라 단계별로 자동 선별하는데 그 원리 속에는 부등식의 성질이 숨어 있다.

4

여러 가지 부등식

1. 절댓값을 포함한 일차부등식
2. 이차부등식과 연립이차부등식

준비 학습

1 다음 일차부등식을 풀어라.

(1) $x+3 > -2$

(2) $2(x+1)-3x \leq 1$

2 다음 연립부등식을 풀어라.

(1)
$$\begin{cases} -2x+1 < 7 \\ 3x-3 \leq 2x-5 \end{cases}$$

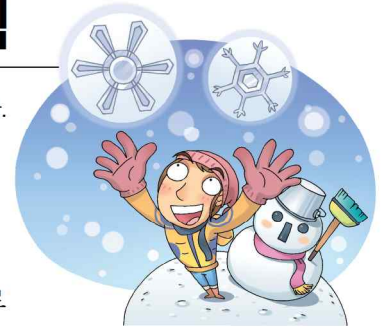
(2)
$$\begin{cases} -x+1 \leq 5 \\ 2(4-x) < x+5 \end{cases}$$

1

절댓값을 포함한 일차부등식

- 부등식의 성질을 이해하고, 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다.

눈송이를 이루고 있는 눈의 결정은 기온과 공기에 포함된 수증기의 양에 따라 그 모양이 다르다. 기온이 $x^{\circ}\text{C}$ 일 때, $-16 < x < -10$, $-4 < x < 0$ 이면 주로 정육각형 모양이고, $-10 < x < -4$ 이면 주로 바늘 모양이거나 육각기둥 모양이다. 이때 $-10 < x < -4$ 는 $|x+7| < 3$ 과 같이 절댓값을 포함한 일차부등식으로 나타낼 수 있다.



부등식의 성질

개 / 념 / 열 / 기

벨기에의 수학자 케틀레(Quetelet, L. A. J. ; 1796~1874)는 비만의 정도를 나타내 주는 체질량지수(Body Mass Index, BMI)를 개발하였다. BMI는 $(\text{체질량지수}) = \frac{(\text{체중})}{(\text{키})^2} (\text{kg/m}^2)$ 과 같이 계산된다. 대한비만학회는 체질량지수가 18.5 kg/m^2 이상 22.9 kg/m^2 이하인 사람을 정상으로 구분한다. 이때 정상인 사람의 체질량지수의 범위를 부등호를 사용하여 나타내어라.



부등호를 사용하여

$$2x - 3 \geq 1, x < 5$$

와 같이 수 또는 식의 값의 대소 관계를 나타낸 식을 부등식이라고 한다.

이때 허수에 대해서는 대소 관계를 생각하지 않으므로 부등식에 포함된 문자는 모두 실수를 나타내는 것으로 한다.

부등식은 부등식의 기본 성질을 이용하여 풀 수 있다.

일반적으로 부등식은 다음과 같은 기본 성질을 만족한다.



수평을 이루고 있는 양팔저울의 양쪽 접시에 무게가 같은 물체를 올려놓아도 수평은 유지된다.

부등식의 기본 성질

세 실수 a, b, c 에 대하여

- ① $a > b, b > c$ 일 때, $a > c$ 이다.
- ② $a > b$ 일 때, $a + c > b + c, a - c > b - c$ 이다.
- ③ $a > b, c > 0$ 일 때, $ac > bc, \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ 이다.
- ④ $a > b, c < 0$ 일 때, $ac < bc, \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ 이다.

부등식의 기본 성질을 이용하여 그 밖의 여러 가지 부등식의 성질을 알아보자.

여러 가지 부등식의 성질

예제 01

다음이 성립함을 보여라.

- (1) $a > b, c > d$ 이면 $a + c > b + d$ 이다.
- (2) $a > b > 0$ 이면 $a^2 > b^2$ 이다.

실마리 부등식의 기본 성질을 이용한다.

풀이

- | | |
|--------------------------------|-----------|
| (1) $a > b$ 에서 $a + c > b + c$ | ← 기본 성질 ② |
| $c > d$ 에서 $b + c > b + d$ | ← 기본 성질 ② |
| 따라서 $a + c > b + d$ | ← 기본 성질 ① |
| (2) $a > b > 0$ 에서 $a^2 > ab$ | ← 기본 성질 ③ |
| $a > b > 0$ 에서 $ab > b^2$ | ← 기본 성질 ③ |
| 따라서 $a^2 > b^2$ | ← 기본 성질 ① |

답 풀이 참조

I 문제 01

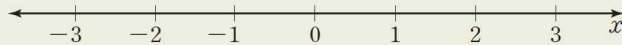
다음이 성립함을 보여라.

- (1) $a > b, c > d$ 이면 $a - d > b - c$ 이다.
- (2) $b < a < 0$ 이면 $a^2 < b^2$ 이다.

절댓값을 포함한 일차부등식의 풀이

개 / 념 / 열 / 기

수직선에서 원점으로부터 거리가 2보다 작은 점에 대응하는 수를 x 라고 할 때, x 의 값의 범위를 다음 수직선에 나타내고, 절댓값 기호를 사용하여 부등식으로 나타내어라.



위의 개념 열기에서 x 의 값의 범위는 $|x| < 2$, 즉 $-2 < x < 2$ 이다.

Math Note

실수 x 의 절댓값 $|x|$ 는 수직선 위의 원점에서 x 에 대응하는 점까지의 거리를 나타낸다. 즉,

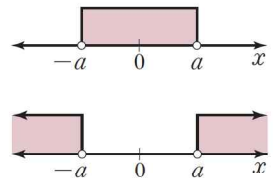
$$|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

일반적으로 $a > 0$ 이면 절댓값의 정의에 의하여

$$|x| < a \text{ 일 때, } -a < x < a$$

$$|x| > a \text{ 일 때, } x < -a \text{ 또는 } x > a$$

가 성립한다.

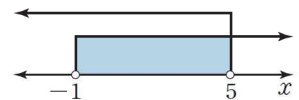


절댓값을 포함한 일차부등식 풀기 (1)

예제 02 부등식 $|x-2| < 3$ 을 풀어라.

풀이 $|x-2| < 3$ 에서 $-3 < x-2 < 3$
 $-3 < x-2$ 에서 $x > -1$
 $x-2 < 3$ 에서 $x < 5$
 따라서 $-1 < x < 5$

다른 풀이 $|x-2| < 3$ 에서 $-3 < x-2 < 3$
 각 변에 2를 더하면 $-1 < x < 5$



답 $-1 < x < 5$

문제 02 다음 부등식을 풀어라.

(1) $|2x-1| \leq 3$

(2) $|x+1| > 5$

절댓값을 포함한 부등식은 다음과 같이 미지수의 범위를 나누어 절댓값 기호를 없애고 푼다.

$$|x-a| = \begin{cases} x-a & (x \geq a) \\ -(x-a) & (x < a) \end{cases}$$

절댓값을 포함한 일차부등식 풀기 (2)

예제 03 부등식 $|x| + |x-2| \leq 4$ 를 풀어라.

풀이 주어진 부등식에서

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}, \quad |x-2| = \begin{cases} x-2 & (x \geq 2) \\ -x+2 & (x < 2) \end{cases}$$

이므로 x 의 값의 범위를

$$x < 0, 0 \leq x < 2, x \geq 2$$

의 세 경우로 나누어 푼다.

(i) $x < 0$ 일 때, $|x| + |x-2| = -x + (-x+2) = -2x+2$ 이므로 주어진 부등식은

$$-2x+2 \leq 4$$

이 부등식을 풀면 $x \geq -1$

그런데 $x < 0$ 이므로 $-1 \leq x < 0$ ①

(ii) $0 \leq x < 2$ 일 때, $|x| + |x-2| = x + (-x+2) = 2$ 이므로 주어진 부등식은

$$2 \leq 4$$

로 항상 성립한다.

따라서 주어진 조건에 맞는 x 의 값의 범위는

$$0 \leq x < 2$$
 ②

(iii) $x \geq 2$ 일 때, $|x| + |x-2| = x + x-2 = 2x-2$ 이므로 주어진 부등식은

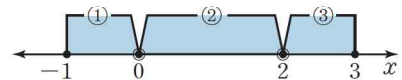
$$2x-2 \leq 4$$

이 부등식을 풀면 $x \leq 3$

그런데 $x \geq 2$ 이므로 $2 \leq x \leq 3$ ③

①, ②, ③에 의하여 주어진 부등식의 해는

$$-1 \leq x \leq 3$$



답 $-1 \leq x \leq 3$

문제 03 다음 부등식을 풀어라.

(1) $|x+2| < 2 + |x-3|$

(2) $|x+3| + |2x-1| \leq 10$

2

이차부등식과 연립이차부등식

- 이차함수와 이차부등식의 관계를 이해하고, 이차부등식과 연립 이차부등식을 풀 수 있다.

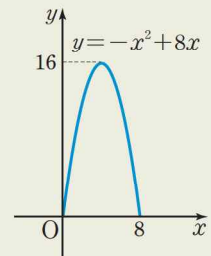
클레이사격은 방출기에서 발사된 조그만 표적을 총으로 사격하여 맞히는 올림픽 종목이다. 표적은 시속 80 km~90 km의 매우 빠른 속도로 포물 선을 그리며 날아가는데 사격수는 이 표적을 공중에 떠 있는 동안 맞혀야 한다. 이때 표적이 공중에 떠 있는 시간은 이차부등식을 이용하여 구할 수 있다.



이차부등식의 풀이

개 / 념 / 열 / 기

방출기에서 발사된 표적의 x 초 후의 높이를 y m라고 하면 $y = -x^2 + 8x$ 인 관계가 성립한다고 한다. 이 이차함수의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 표적이 공중에 떠 있는 시간의 범위를 구하여라.



위의 개념 열기에서 표적이 공중에 떠 있는 시간은 $y > 0$, 즉 $-x^2 + 8x > 0$ 일 때이므로 x 의 값의 범위는 $0 < x < 8$ 이다.

부등식에서 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하였을 때,

$$ax^2 + bx + c > 0, ax^2 + bx + c < 0$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0, ax^2 + bx + c \leq 0 \quad (a \neq 0)$$

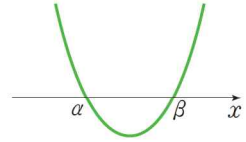
과 같이 좌변이 x 에 대한 이차식으로 나타내어지는 부등식을 x 에 대한 이차부등식이라고 한다.

이차부등식은 이차함수의 그래프를 이용하여 풀 수 있다.

이때 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)의 그래프와 x 축이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 한 점에서 만날 때, 만나지 않을 때의 세 가지 경우로 나누어 생각한다.

- ① 이차함수의 그래프가 x 축과 두 점 $(\alpha, 0), (\beta, 0) (\alpha < \beta)$ 에서 만날 때:

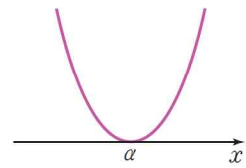
이차부등식 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프에서 $y>0$ 인 x 의 값의 범위이므로 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$ 이다.



또 이차부등식 $ax^2+bx+c<0(a>0)$ 의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프에서 $y<0$ 인 x 의 값의 범위이므로 $\alpha<x<\beta$ 이다.

- ② 이차함수의 그래프가 x 축과 한 점 $(\alpha, 0)$ 에서 만날 때:

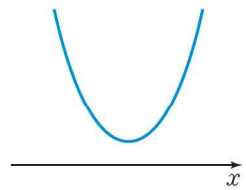
이차부등식 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프에서 $y>0$ 인 x 의 값의 범위이므로 $x\neq\alpha$ 인 모든 실수이다.



또 이차부등식 $ax^2+bx+c<0(a>0)$ 의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프에서 $y<0$ 인 x 의 값의 범위이므로 해는 없다.

- ③ 이차함수의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때:

이차부등식 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프에서 $y>0$ 인 x 의 값의 범위이므로 모든 실수이다.



또 이차부등식 $ax^2+bx+c<0(a>0)$ 의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프에서 $y<0$ 인 x 의 값의 범위이므로 해는 없다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

Math Note

$a<0$ 일 때는 부등식의 양변에 -1 을 곱하여 이차항의 계수를 양수로 만든다. 이때 부등호의 방향이 바뀌므로 주의한다.

이차함수의 그래프와 이차부등식의 해

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

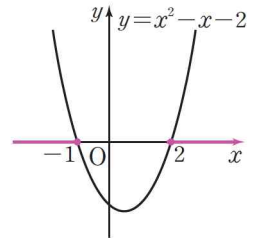
$a>0$	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$ 의 그래프			
$ax^2+bx+c>0$ 의 해	$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$	$x\neq\alpha$ 인 모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c\geq 0$ 의 해	$x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$	모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c<0$ 의 해	$\alpha<x<\beta$	없다.	없다.
$ax^2+bx+c\leq 0$ 의 해	$\alpha\leq x\leq\beta$	$x=\alpha$	없다.

예제 01 이차부등식 $x^2 - x - 2 \geq 0$ 을 풀어라.

풀이 이차함수 $y = x^2 - x - 2$ 에서

$$y = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$

 이므로 이 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 두 점 $(-1, 0)$, $(2, 0)$ 에서 만난다.
 따라서 이 그래프에서 $y \geq 0$ 인 x 의 값의 범위는
 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$ 이므로 구하는 이차부등식의 해는
 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$



답 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$

|문제| 01 다음 이차부등식을 풀어라.

- | | |
|-----------------------|-----------------------------|
| (1) $x^2 - x - 6 > 0$ | (2) $2x^2 \geq -x + 6$ |
| (3) $4 - x^2 > 0$ | (4) $-2x^2 + 5x - 3 \geq 0$ |

예제 02 이차부등식 $-x^2 - 6x \geq 9$ 를 풀어라.

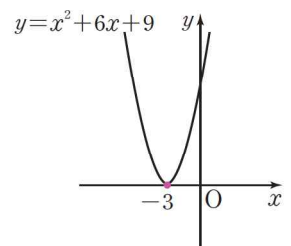
풀이 주어진 부등식의 양변에 -1 을 곱하여 정리하면

$$x^2 + 6x + 9 \leq 0$$

 이차함수 $y = x^2 + 6x + 9$ 에서

$$y = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$$

 이므로 이 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 한 점 $(-3, 0)$ 에서 만난다.
 따라서 이 그래프에서 $y \leq 0$ 인 x 의 값의 범위는 $x = -3$ 이므로 구하는 이차부등식의 해는
 $x = -3$



답 $x = -3$

|문제| 02 다음 이차부등식을 풀어라.

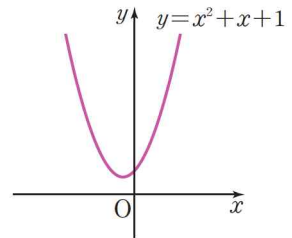
- | | |
|--------------------------|-----------------------------|
| (1) $x^2 + 2x + 1 > 0$ | (2) $9x^2 - 6x + 1 \geq 0$ |
| (3) $-x^2 + 8x - 16 > 0$ | (4) $-4x^2 + 4x - 1 \geq 0$ |

예제 03 이차부등식 $x^2 + x + 1 \leq 0$ 을 풀어라.

풀이 이차함수 $y = x^2 + x + 1$ 이라고 하면 이차방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 에서

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$$

 이므로 $y = x^2 + x + 1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 만나지 않는다.
 따라서 이 그래프에서 $y \leq 0$ 인 x 의 값의 범위는 없으므로
 구하는 이차부등식의 해는 없다.



답 해는 없다.

문제 03 다음 이차부등식을 풀어라.

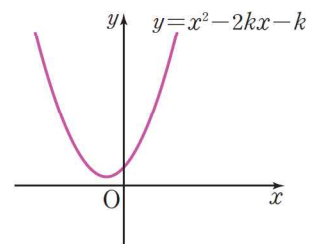
- | | |
|------------------------|---------------------------|
| (1) $x^2 - 3x + 4 > 0$ | (2) $3x^2 - x + 1 \geq 0$ |
| (3) $-x^2 + x - 3 > 0$ | (4) $x(1 - 2x) \geq 5$ |

이차부등식 응용하기

예제 04 이차부등식 $x^2 - 2kx - k > 0$ 의 해가 모든 실수가 되도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하여라.

풀이 이차함수 $y = x^2 - 2kx - k$ 라고 하면 이 그래프는 아래로 볼록한 모양이다.
 이때 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 2kx - k > 0$ 이 성립하려면 이차방정식 $x^2 - 2kx - k = 0$ 의 판별식 D 가
 $D < 0$ 이어야 하므로 $\frac{D}{4} = k^2 + k < 0$
 이차부등식 $k^2 + k < 0$ 을 풀면

$$-1 < k < 0$$



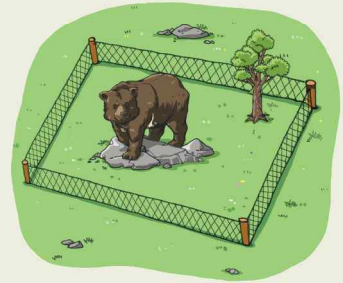
답 $-1 < k < 0$

문제 04 이차부등식 $x^2 + kx - (k - 3) < 0$ 의 해가 없도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하여라.

연립이차부등식의 풀이

개 / 념 / 열 / 기

국립공원관리공단 종복원기술원에서는 부상을 입은 반달곰을 보호하기 위하여 둘레의 길이가 20 m이고, 넓이가 24 m^2 이상인 직사각형 모양의 임시 보호소를 만들려고 한다. 가로 길이 $x \text{ m}$ 가 세로 길이보다 길 때, x 의 값의 범위를 구하기 위한 식을 세워라.



위의 개념 열기에서 식을 세우면 $\begin{cases} x > 10 - x \\ x(10 - x) \geq 24 \end{cases}$ 이다.

이와 같이 연립부등식에서 치수가 가장 높은 부등식이 이차부등식일 때, 이 연립부등식을 연립이차부등식이라고 한다.

연립이차부등식을 풀 때는 연립부등식을 이루는 각 부등식을 풀어 공통부분을 구한다.

연립이차부등식 풀기 (1)

예제 05 다음 연립부등식을 풀어라.

$$\begin{cases} 3x + 1 < x + 3 & \dots\dots ① \\ 2x^2 - 3x - 2 < 0 & \dots\dots ② \end{cases}$$

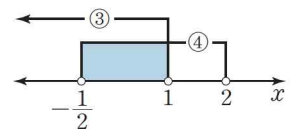
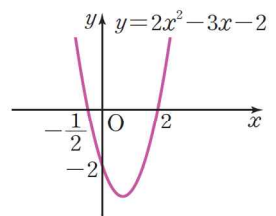
풀이 ①을 풀면 $x < 1$ $\dots\dots ③$

②에서 이차함수 $y = 2x^2 - 3x - 2 = (2x + 1)(x - 2)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $y < 0$ 인 x 의 값의 범위는

$$-\frac{1}{2} < x < 2 \quad \dots\dots ④$$

따라서 ③, ④를 동시에 만족하는 x 의 값의 범위는

$$-\frac{1}{2} < x < 1$$



답 $-\frac{1}{2} < x < 1$

문제 05 다음 연립부등식을 풀어라.

$$(1) \begin{cases} -x-5 > 0 \\ x^2+4x-21 > 0 \end{cases}$$

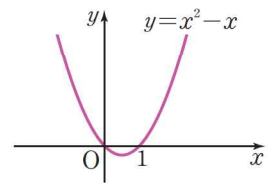
$$(2) \begin{cases} |x| \geq 1 \\ -x^2+2x < 0 \end{cases}$$

연립이차부등식 풀기 (2)

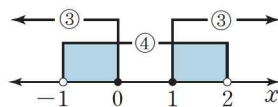
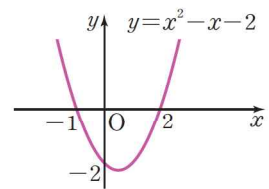
예제 06 다음 연립부등식을 풀어라.

$$\begin{cases} x^2-x \geq 0 & \dots\dots ① \\ x^2-x-2 < 0 & \dots\dots ② \end{cases}$$

풀이 ○ ①에서 이차함수 $y=x^2-x=x(x-1)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $y \geq 0$ 인 x 의 값의 범위는 $x \leq 0$ 또는 $x \geq 1$ $\dots\dots ③$



②에서 이차함수 $y=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $y < 0$ 인 x 의 값의 범위는 $-1 < x < 2$ $\dots\dots ④$



따라서 ③, ④를 동시에 만족하는 x 의 값의 범위는 $-1 < x \leq 0$ 또는 $1 \leq x < 2$

답 $-1 < x \leq 0$ 또는 $1 \leq x < 2$

문제 06 다음 연립부등식을 풀어라.

$$(1) \begin{cases} x^2-3x > 0 \\ x^2-4x-5 \leq 0 \end{cases}$$

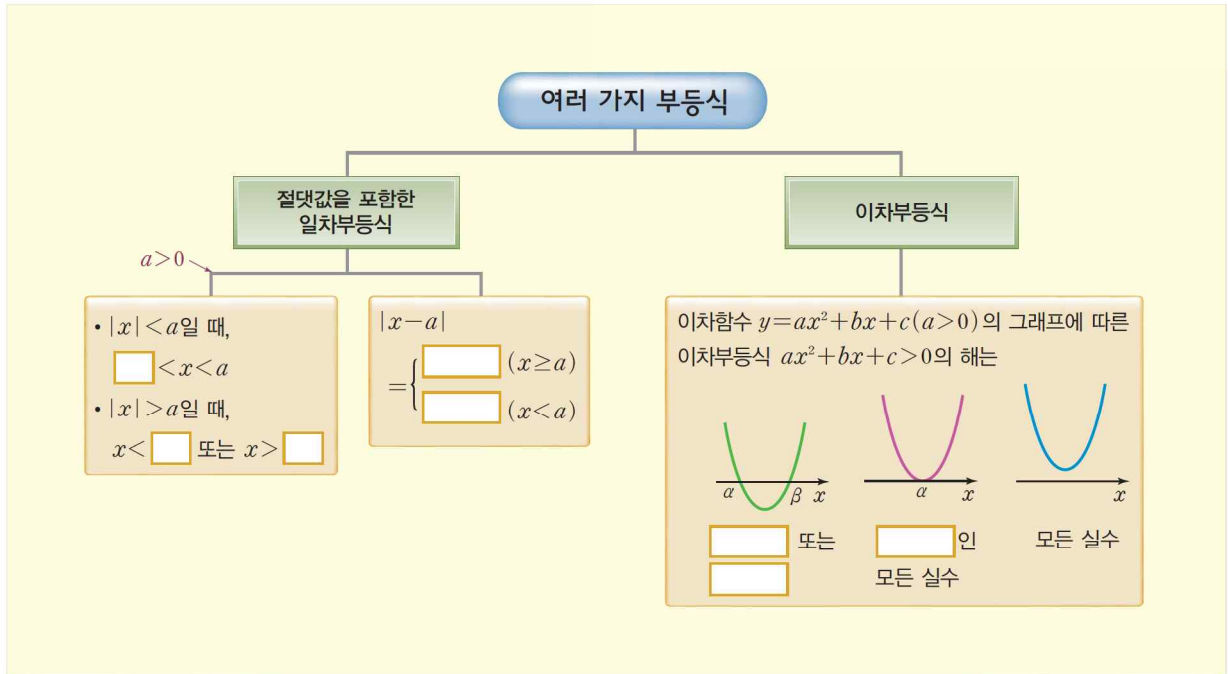
$$(2) \begin{cases} x^2-5x-24 \leq 0 \\ 3x^2-14x-5 < 0 \end{cases}$$

경제 + 수학

문제 07

어느 회사가 그릇 세트 x 개를 생산하는 데 필요한 비용이 $\left(5x + \frac{x^2}{100}\right)$ 만 원이라고 한다. 이 회사에서 1400만 원 이상 2400만 원 이하의 비용을 투자하여 생산할 수 있는 그릇 세트의 개수를 구하여라.

개 념 정 리 다음 빈칸을 알맞게 채워 보자.



확 인 문 제 다음 문제를 풀어 보자.

[CQ 보충 · 심화 학습 238쪽]

절댓값을 포함한 일차부등식의 풀이 >> 95쪽

◆◆◆ **1** 다음 부등식을 풀어라.

(1) $|x-2| > 4$

(2) $|5-x| \leq 3$

이차부등식의 풀이 >> 97쪽

◆◆◆ **2** 다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $x^2 - 6x + 5 \geq 0$

(2) $x^2 - 10x + 25 > 0$

(3) $-x^2 + 16x - 64 > 0$

(4) $x^2 + 4x + 6 \geq 0$

연립이차부등식의 풀이 >> 101쪽

◆◆◆ **3** 연립부등식 $\begin{cases} 3x-5 > x+3 \\ x^2-8x+15 \leq 0 \end{cases}$ 을 풀어라.



중단원 마무리

절댓값을 포함한 이차부등식의 풀이 >> 95쪽

이차부등식의 풀이 >> 97쪽

이차부등식의 풀이 >> 97쪽

연립이차부등식의 풀이 >> 101쪽

이차부등식의 풀이 >> 97쪽

연립이차부등식의 풀이 >> 101쪽



4 부등식 $|x-1| > 4-2|x|$ 를 풀어라.



5 이차부등식 $x^2-ax-b \leq 0$ 의 해가 $-3 \leq x \leq 2$ 일 때, 실수 a, b 의 값을 구하여라.



6 이차부등식 $x^2-2ax+2a+3 > 0$ 의 해가 모든 실수일 때, 실수 a 의 값의 범위를 구하여라.



7 연립부등식 $\begin{cases} 3x^2-8x-16 < 0 \\ -2x^2+7x-6 \leq 0 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x 의 값의 합을 구하여라.



8 어느 디지털카메라 매장에서 A 상품의 월평균 판매량을 조사한 결과 한 대의 가격이 20만 원일 때는 70대가 팔렸고, 한 대의 가격을 x 만 원 인상하면 판매량이 $2x$ 대 줄어든 것으로 나타났다. 가격을 인상하여 한 달 총 판매액이 1500만 원 이상이 되도록 하려면 한 대의 가격을 얼마로 해야 하는지 구하여라.



9 실수 a, b, c ($a < b < c$)에 대하여 연립부등식

$$\begin{cases} x^2-(a+b)x+ab > 0 \\ x^2-(b+c)x+bc > 0 \end{cases}$$

의 해가 $x < -3$ 또는 $x > 2$ 일 때, 이차부등식 $x^2-ax+c < 0$ 의 해를 구하여라.

1 이차함수 $y=x^2-2ax+a+2$ 의 그래프에서 꼭짓점의 좌표를 구하여라.

2

.....

.....

.....

.....



대단원 마무리

01 $i^{101} + i^{102} + i^{103} + i^{104}$ 의 값을 구하여라.

02 두 복소수 $\alpha = -2 + 2i$, $\beta = 3 - i$ 에 대하여 $\alpha\beta + \bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\bar{\beta}$ 의 값은?

- ① -24 ② -18 ③ 0
④ 12 ⑤ 16

03 이차방정식 $x^2 - 2x + 3k - 2 = 0$ 의 두 근의 차가 5일 때, 실수 k 의 값은?

- ① $-\frac{25}{13}$ ② $-\frac{13}{12}$ ③ $-\frac{12}{13}$
④ $\frac{12}{13}$ ⑤ $\frac{25}{12}$

04 이차함수 $y = x^2 - 6x + 12$ 의 그래프가 직선 $y = 2x + k$ 와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하여라.

05 $-2 \leq x \leq 2$ 일 때, 이차함수

$y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

06 삼차방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라고 할 때, 다음 식을 간단히 하여라.

- (1) $(1 + \omega)(1 + \omega^2)$
(2) $\omega^4 + \omega^2 + 1$

07 다음 연립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - y - 2z = 3 \\ x + 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

08 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ 의 근을

$x = a$, $y = b$ 라고 할 때, 다음 중 $a + b$ 의 값이 될 수 없는 것은?

- ① $-2\sqrt{5}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ 0
④ $\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

09 다음 부등식을 풀어라.

$$|x-1| < 6-2|x+2|$$

10 이차방정식 $x^2+ax+a+3=0$ 의 서로 다른 두 실근이 모두 양수가 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구하여라.

11 이차부등식 $x^2+4kx-8k+5\geq 0$ 의 해가 모든 실수가 되도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?

① $-\frac{5}{2}\leq k\leq \frac{1}{2}$ ② $-\frac{5}{2}\leq k\leq 2$

③ $-\frac{1}{2}\leq k\leq \frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{2}\leq k\leq \frac{5}{2}$

⑤ $-\frac{5}{2}\leq k\leq -\frac{1}{2}$

12 다음 연립부등식을 풀어라.

$$\begin{cases} x^2-5x-14\leq 0 \\ x^2-x-6>0 \end{cases}$$

서술형

[13~18] 다음 문제의 풀이 과정을 자세히 써 보자.

13 이차방정식 $x^2+(m+1)x+2m-1=0$ 이 중근을 가질 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 실수 m 의 값을 모두 구하여라. [4점]

풀이

(2) 이 이차방정식의 근을 구하여라. [2점]

풀이

14 이차방정식 $x^2-5x-4=0$ 의 두 근을 α , β 라고 할 때, $\frac{\alpha-1}{\beta}$, $\frac{\beta-1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식을 구하여라. [7점]

풀이

15 둘레의 길이가 16 cm인 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하여라. [5점]

풀이



- 16 사차방정식 $x^4 + 2x^3 - 7x^2 + px + q = 0$ 의 두 근이 2, -3일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 실수 p , q 의 값을 구하여라. [2점]

풀이

(2) 나머지 두 근을 구하여라. [4점]

풀이

- 17 삼차방정식 $x^3 - (1+k)x^2 + k^2 = 0$ 이 허근을 가질 때, 실수 k 의 값의 범위를 구하여라.

[6점]

풀이

- 18 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 4x > 0 \\ x^2 - x - 6 \leq 0 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x 의 값을 모두 구하여라. [6점]

풀이



자 기 평 가

학습 내용 성취 기준을 달성한 것은 ○표, 달성하지 못한 것은 ×표를 하여라.

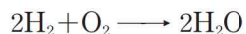
- 1 복소수의 뜻과 그 성질을 이해하고, 사칙계산을 할 수 있는가?
- 2 이차방정식에서 판별식, 근과 계수의 관계를 이해하였는가?
- 3 이차함수와 이차방정식의 관계, 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해하였는가?
- 4 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용할 수 있는가?
- 5 여러 가지 방정식을 풀 수 있는가?
- 6 이차함수와 이차부등식의 관계를 이해하고, 여러 가지 부등식을 풀 수 있는가?

* 달성하지 못한 성취 기준은 다시 한번 학습 내용을 확인하세요.



다음 문장을 읽고, 물음에 답하여라.

수소 기체와 산소 기체가 반응하면 물이 생성된다. 물은 수소 기체나 산소 기체와는 성질이 매우 다른 물질이다. 이와 같이 물질이 반응하여 새로운 물질을 만드는 과정을 화학 반응이라고 한다. 이 화학반응을 식으로 나타내면 다음과 같다.



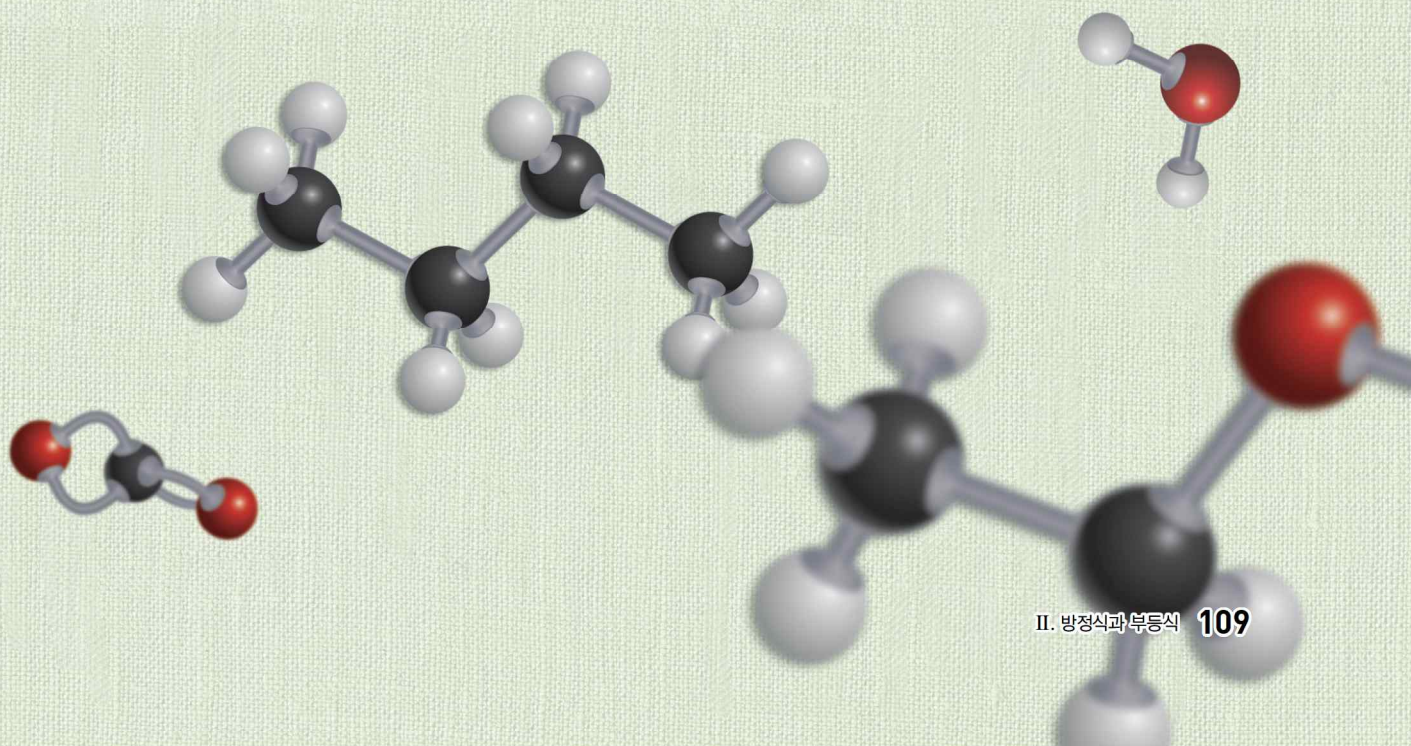
분자는 물질의 화학적 성질을 갖는 가장 작은 단위로서 원자로 구성되어 있다. 화학반응으로 새로운 물질이 생성될 때, 화학반응 전과 후의 원자는 그 배열만 달라질 뿐 원자의 개수에는 변함이 없다. 즉, 위의 화학반응식에서 반응 전과 후의 수소 원자 H의 개수는 4개, 산소 원자 O의 개수는 2개로 변함이 없다.

1. 휴대용 가스레인지의 연료인 부탄가스(C_4H_{10})는 공기 중의 산소(O_2)와 반응하여 이산화탄소(CO_2)와 물(H_2O)을 생성한다. 이때 산소 분자, 이산화탄소 분자, 물 분자의 개수를 각각 p , q , r 라고 하면 다음과 같은 화학반응식이 성립한다.



위의 화학반응식에서 p , q , r 를 연립방정식을 이용하여 구하여라.

2. 에탄올($\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$)과 산소(O_2)가 반응하면 물(H_2O)과 이산화탄소(CO_2)가 생성된다. 이 반응에서 각 분자의 개수를 구하여 화학반응식을 나타내어라.



수준별 문제
219

정답과 해설
260

보충·심화 학습



기 초 문 제

1 복소수의 뜻과 사칙계산

01 다음 복소수를 실수, 허수로 구분하여라.

$$\begin{array}{cccc} \sqrt{2}+i, & 7i, & \sqrt{9}, & 5i-3, \\ i, & 1+\sqrt{3}, & \pi & \end{array}$$

02 다음 복소수의 실수부분과 허수부분을 구하여라.

- (1) $-5+2i$ (2) 7
(3) $3i$ (4) $i-\sqrt{3}$

03 다음 등식이 성립하도록 하는 실수 x, y 의 값을 구하여라.

- $$\begin{aligned} (1) \quad (3x+2) + (6-x)i &= -1 + yi \\ (2) \quad (2x-6) + (3-4x)i &= 3(y-1)i \end{aligned}$$

04 다음 복소수의 켈레복소수를 구하여라.

- (1) $\sqrt{2}+3i$ (2) $1-2i$
(3) $4i$ (4) 3

05 다음을 계산하여라.

- (1) $(1+3i) + (2-2i)$
- (2) $(2+5i) - (-2+3i)$
- (3) $(2+3i)(3-i)$
- (4) $\frac{-1+2i}{1-i}$

06 다음을 계산하여라.

- $$\begin{aligned} (1) & (1-i)(5+4i)(1+i) \\ (2) & (-1+4\sqrt{5}i)(1-\sqrt{5}i) \\ & \quad + (2-3\sqrt{5}i)(1-\sqrt{5}i) \end{aligned}$$

07 다음을 허수단위 i 를 사용하여 나타내어라.

- (1) $\sqrt{-6}$ (2) $\sqrt{-9}$
 (3) $-\sqrt{-27}$ (4) $-\sqrt{-64}$

2 이차방정식의 판별식

08 다음 이차방정식을 풀고, 그 근이 실근인지 허근인지를 말하여라.

- (1) $9x^2 - 4 = 0$
 (2) $x^2 - 8x + 16 = 0$
 (3) $x^2 + 8x + 13 = 0$
 (4) $3x^2 - 5x + 4 = 0$

09 다음 이차방정식의 근을 판별식을 이용하여 판별하여라.

- (1) $x^2 - 3x - 2 = 0$
 (2) $16x^2 - 8x + 1 = 0$
 (3) $4x^2 + 3 = 0$
 (4) $2x^2 - x - 3 = 0$

10 다음 이차방정식의 두 근의 합과 곱을 구하여라.

- (1) $x^2 - x + 7 = 0$
 (2) $5x^2 + 3x + 1 = 0$
 (3) $2x^2 + 3x - 2 = 0$
 (4) $3x^2 - 5x - 2 = 0$

11 다음 두 수를 근으로 하고, [] 안의 수를 x^2 의 계수로 하는 이차방정식을 구하여라.

- (1) 3, 5 [1]
 (2) $2 + 3\sqrt{5}$, $2 - 3\sqrt{5}$ [1]
 (3) $3 + 2i$, $3 - 2i$ [2]
 (4) 1, -5 [-1]

12 다음 이차식을 복소수의 범위에서 인수분해하여라.

- (1) $x^2 + 2x + 5$
 (2) $2x^2 - 3x - 1$

기본문제

1 복소수의 뜻과 사칙계산

- 13 복소수 $z = (x^2 - 25) + (x^2 - 4x - 5)i$ 가 실수일 때, 실수 x 의 값을 모두 구하여라.

- 14 다음 등식이 성립하도록 하는 실수 x, y 의 값을 구하여라.

$$(2+3i)x + (-1+i)y = 4+11i$$

- 15 다음을 계산하여라.

$$1+i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{20}$$

- 16 다음을 계산하여라.

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50}$$

- 17 다음 등식이 성립하도록 하는 복소수 z 를 구하여라.

$$(1-i)z + 5i\bar{z} = 5-3i$$

- 18 복소수 $z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에 대하여

$z^3 + z^2 + z + 2$ 의 값을 구하여라.

- 19 복소수 $i(x+3i)^2$ 이 실수가 되도록 하는 실수 x 의 값을 모두 구하여라.

- 20 등식

$$\frac{\sqrt{-6}\sqrt{-5}}{\sqrt{-3}} + \frac{\sqrt{-25}}{\sqrt{-5}} - \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{-5}} = a+bi$$

를 만족하는 실수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값을 구하여라.

2 이차방정식의 판별식

21 x 에 대한 이차방정식

$x^2 - 2(a+2)x + a^2 = 0$ 이 서로 다른 두 허근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구하여라.

22 이차방정식 $x^2 + (k-1)x + k+1 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 실수 k 의 값의 합을 구 하여라.

23 이차방정식 $4x^2 + 2x - 1 = 0$ 의 두 근을 α , β 라고 할 때, $\alpha^3 + \beta^3$ 의 값을 구하여라.

24 이차방정식 $x^2 + 4x - a = 0$ 의 두 근의 차가 6일 때, 실수 a 의 값을 구하여라.

25 이차방정식 $x^2 - mx + 18 = 0$ 의 한 근이 다른 근의 2배일 때, 실수 m 의 값을 모두 구하여라.

26 이차방정식 $x^2 + ax - (a-3) = 0$ 의 두 근 의 합과 곱을 두 근으로 하는 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 에 대하여 실수 a , b 의 값을 구하여라.

27 이차방정식 $x^2 + 2x - 5 = 0$ 의 두 근을 α , β 라고 할 때, $\alpha - 1$, $\beta - 1$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식을 구하여라.

발 전 문 제

28 z 가 허수이고 $z + \frac{1}{z}$ 이 실수일 때, $z\bar{z}$ 의 값을 구하여라.

29 제곱해서 $-3+4i$ 가 되는 복소수를 z 라고 할 때, $z^4 + z^3 + 2z^2 + 6z + \frac{25}{z}$ 의 값을 구하여라.

30 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 푸는데 선민이는 x 의 계수를 잘못 보고 풀어서 $x=2$ 또는 $x=-3$ 이라는 해를 얻었고, 형노는 상수항을 잘못 보고 풀어서 $x=-1 \pm \sqrt{3}$ 이라는 해를 얻었다. 주어진 이차방정식의 옳은 해를 구하여라.

31 자연수 a 에 대하여 이차방정식

$$x^2 - (3 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}a - 4 = 0$$

의 한 근이 정수일 때, 다른 한 근을 구하여라.

32 이차방정식 $P(x)=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\alpha + \beta = 18$, $\alpha\beta = 9$ 이다. 이때 이차방정식 $P(3x)=0$ 의 두 근을 구하여라.

기 초 문 제

1 이차함수와 이차방정식의 관계

01 다음 이차함수의 그래프와 x 축의 위치 관계를 말하여라.

- (1) $y = x^2 - 2x - 5$
- (2) $y = -x^2 - 3x + 7$
- (3) $y = 4x^2 - 4x + 1$
- (4) $y = -2x^2 + 4x - 5$

02 다음 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 말하여라.

- (1) $y = x^2 + 3x - 4$, $y = -2x + 1$
- (2) $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 4x - 6$
- (3) $y = 2x^2 - x + 5$, $y = x + 3$
- (4) $y = -3x^2 + x + 2$, $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

2 이차함수의 최대, 최소

03 다음 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

- (1) $y = x^2 - 8x + 5$
- (2) $y = 3x^2 - 6x - 2$
- (3) $y = -x^2 - 2x + 1$
- (4) $y = -2x^2 + 3x - 1$

04 다음 주어진 범위에서 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

- (1) $y = 2x^2 - 4x + 1$ ($1 \leq x \leq 3$)
- (2) $y = -x^2 - 2x + 3$ ($-2 \leq x \leq 1$)
- (3) $y = x^2 - 2x + 3$ ($-3 \leq x \leq -1$)
- (4) $y = -3x^2 + 6x - 7$ ($2 \leq x \leq 3$)

기 본 문 제

1 이차함수와 이차방정식의 관계

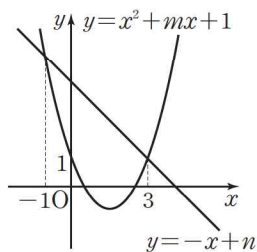
05 이차함수 $y = -x^2 + 6x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위를 구하여라.

06 이차함수 $y = x^2 - (k-3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 한 점에서 만날 때, 실수 k 의 값을 모두 구하여라.

- 07 이차함수 $y=x^2-2x+a$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점 사이의 거리가 5일 때, 실수 a 의 값을 구하여라.

- 08 이차방정식 $x^2-4x-k=0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 1보다 크도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하여라.

- 09 이차함수 $y=x^2+mx+1$ 의 그래프와 직선 $y=-x+n$ 이 다음 그림과 같을 때, 실수 m, n 의 값을 구하여라.



- 10 이차함수 $y=kx^2-4x+k-1$ 의 그래프와 직선 $y=2x+1$ 이 접할 때, 실수 k 의 값을 모두 구하여라.

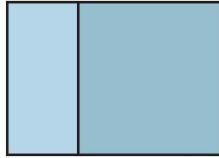
2 이차함수의 최대, 최소

- 11 꼭짓점의 좌표가 $(-1, 3)$ 이고 점 $(2, 0)$ 을 지나는 이차함수의 그래프가 있다.
 $-4 \leq x \leq 0$ 일 때, 이 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

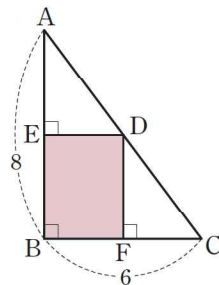
- 12 $1 \leq x \leq 4$ 일 때, 이차함수 $y=-x^2+2x+k$ 의 최댓값이 5이다. 이 이차함수의 최솟값을 구하여라. (단, k 는 실수)

- 13 직각을 낀 두 변의 길이의 합이 8인 직각삼각형이 있다. 이 삼각형의 넓이가 최대가 될 때, 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 구하여라.

- 14 길이가 40 m인 철사를 이용하여 오른쪽 그림과 같이 두 개의 직사각형으로 이루어진 직사각형을 만들려고 한다. 이때 직사각형 전체 넓이의 최댓값을 구하여라.



- 15 오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC의 변 AC 위의 한 점 D에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 각각 E, F라고 하자. $\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=6$ 일 때, 사각형 DEBF의 넓이의 최댓값을 구하여라.



발전문제

- 16 이차함수 $y=x^2+ax-a-2$ 의 그래프는 a 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점이 이차함수의 그래프의 꼭짓점일 때, 이 이차함수의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 모두 구하여라.

- 17 $x \geq 0$, $y \geq 0$ 이고 $x+y=1$ 일 때, x^2+2y^2 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

- 18 어느 공원의 입장료는 1인당 3000원이고, 하루 입장객은 5000명이다. 시장 조사에 의하면 입장료를 100원씩 내릴 때마다 하루 입장객이 500명씩 증가한다고 한다. 하루 입장료 수입이 최대일 때, 1인당 입장료를 구하여라.

3 여러 가지 방정식

II. 방정식과 부등식

정답과 해설 · 267쪽

기 초 문 제

1 삼차방정식과 사차방정식

01 다음 방정식을 풀어라.

- (1) $x^3 + 64 = 0$
- (2) $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$
- (3) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$
- (4) $(x^2 + 1)^2 + 3(x^2 + 1) - 10 = 0$

02 다음 방정식을 풀어라.

- (1) $x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$
- (2) $3x^3 + 4x^2 - 5x - 2 = 0$
- (3) $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$
- (4) $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8 = 0$

2 연립방정식

03 다음 연립방정식을 풀어라.

$$(1) \begin{cases} x + 2y = -3 \\ 2x - y + z = 7 \\ x + 3y - 2z = -11 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x + y + z = 5 \\ x + 2y + 5z = 7 \\ 2x + 3y + 2z = 12 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = 3 \\ z + x = 10 \end{cases}$$

04 다음 연립방정식을 풀어라.

$$(1) \begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$$

기본문제

1 삼차방정식과 사차방정식

05 다음 방정식을 풀어라.

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3$$

06 정육면체의 가로 길이 1 cm만큼 줄이고, 세로 길이와 높이를 각각 1 cm, 2 cm만큼 늘여서 직육면체를 만들었더니 그 부피가 처음 정육면체의 부피의 1.5배가 되었다. 처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 구하여라.

07 삼차방정식 $x^3+2x^2+(a+5)x+b-6=0$ 의 한 근이 $-2+i$ 일 때, 실수 a, b 의 값을 구하여라.

08 사차방정식 $x^4+ax^3-bx^2+x+6=0$ 의 두 근이 $-1, -2$ 일 때, 나머지 두 근을 구하여라. (단, a, b 는 실수)

09 삼차방정식 $x^3-1=0$ 의 한 허근을 ω 라고 할 때, $\omega^{100}+\omega^{101}+\omega^{102}$ 을 간단히 하여라.

2 연립방정식

10 다음 연립방정식을 풀어라.

$$(1) \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ 2x+5y+8z=5 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3x+2y-z=3 \\ 2x+y-z=2 \\ x+2y+z=4 \end{cases}$$

11 다음 방정식을 풀어라.

$$\frac{3x-y}{4} = \frac{-y+z}{2} = \frac{6z-x}{5} = 3$$

- 12 준호는 총 30문항이 출제되는 어느 시험에 응시하였다. 채점 방법 A로는 89점, 채점 방법 B로는 82점을 받았다고 할 때, 준호가 응시한 시험에서 정답, 오답, 무응답의 개수를 각각 구하여라.

	기본 점수(점)	문항당 배점(점)		
		정답	오답	무응답
채점 방법 A	0	5	0	2
채점 방법 B	30	4	-1	0

- 13 연립방정식 $\begin{cases} x+y-4 \\ xy=-5 \end{cases}$ 를 풀어라.

- 14 연립방정식 $\begin{cases} x+y=a \\ 2x^2+y^2=6 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 근을 갖도록 하는 양수 a 의 값을 구하여라.

- 15 직사각형의 둘레의 길이가 42이고 대각선의 길이가 15일 때, 이 직사각형의 이웃하는 두 변의 길이를 구하여라.

- 16 연립방정식 $\begin{cases} ax-y=5 \\ x+y=3 \end{cases}$ 의 근이 연립방정식 $\begin{cases} x+y=b \\ x^2+y^2=29 \end{cases}$ 를 만족할 때, 양수 a, b 의 값을 구하여라.

- 17 다음 연립방정식을 풀어라.

$$(1) \begin{cases} 2x^2+5xy-3y^2=0 \\ x^2+xy-6=0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x^2-5xy+2y^2=0 \\ x^2+2xy-y^2=7 \end{cases}$$

- 18 연립방정식 $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7 \\ 4x^2-9xy+y^2=-14 \end{cases}$ 의 근을 $x=\alpha, y=\beta$ 라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2$ 의 값을 모두 구하여라.

- 19 다음 연립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x=0 \\ x^2+y^2+x+y=2 \end{cases}$$

발 전 문 제

- 20 연립방정식
$$\begin{cases} x-y+z=3 \\ 3x-2y+z=5 \\ 2x-5y-kz=1 \end{cases}$$
의 해가 없을 때, 실수 k 의 값을 구하여라.

- 21 x^4 의 계수가 1인 사차 다항식 $P(x)$ 에 대하여 $P(1)=1$, $P(2)=2$, $P(3)=3$, $P(4)=4$ 가 성립할 때, $P(5)$ 의 값을 구하여라.

- 22 삼차방정식 $x^3=1$ 의 두 허근을 α , β 라 하고, $f(n)=\alpha^n+\beta^n$ (n 은 자연수)이라고 할 때, $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$ 의 값을 구하여라.

- 23 두 이차방정식

$$x^2+(3a-1)x-a+2=0$$

$$x^2+(2a-1)x+2a+2=0$$

이 오직 하나의 공통인 해를 갖도록 하는 실수 a 의 값과 이때의 공통인 해를 구하여라.

4 여러 가지 부등식

II. 방정식과 부등식

정답과 해설 · 270 쪽

기 초 문 제

1 절댓값을 포함한 일차부등식

01 실수 a, b 에 대하여 $a > b$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $a - \frac{1}{2} > b - \frac{1}{2}$
- ② $a - b > 0$
- ③ $5a - 1 > 5b - 1$
- ④ $3 - a < 3 - b$
- ⑤ $-\frac{1}{2}a + 1 > -\frac{1}{2}b + 1$

02 다음 부등식을 풀어라.

- (1) $|x - 3| > 5$
- (2) $|2x + 1| < 5$
- (3) $|9 - x| \leq 11$
- (4) $|4x - 3| \geq 2x + 7$

2 이차부등식과 연립이차부등식

03 다음 이차부등식을 풀어라.

- (1) $x^2 - 5x - 14 < 0$
- (2) $-2x^2 - 5x + 12 \leq 0$
- (3) $-x^2 + 12x - 36 < 0$
- (4) $x^2 + 6x + 10 \geq 0$

04 다음 연립부등식을 풀어라.

- (1) $\begin{cases} x - 1 < 3 \\ x^2 - 4x - 5 < 0 \end{cases}$
- (2) $\begin{cases} 4x + 1 < x - 5 \\ 3x^2 - 4x + 1 \geq 0 \end{cases}$

05 다음 연립부등식을 풀어라.

- (1) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 < 0 \\ 2x^2 - 5x - 3 \geq 0 \end{cases}$
- (2) $\begin{cases} x^2 - 2x + 5 \geq 3x + 1 \\ 2x^2 - 5x + 2 > 0 \end{cases}$

기 본 문 제

1 절댓값을 포함한 일차부등식

- 06 실수 a, b, c, d 에 대하여 $a > b > 0$, $c > d > 0$ 일 때, 다음 보기 중에서 옳지 않은 것을 모두 골라라.

• 보기 •

$$\begin{array}{ll} \neg. \frac{a}{c} > \frac{b}{c} & \neg. \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \\ \neg. c^2 > d^2 & \neg. ac < bd \end{array}$$

- 07 다음 부등식을 풀어라.

$$\begin{array}{l} (1) |x+1| > 4 - |x-2| \\ (2) |x-1| + |3x+1| \geq 8 \end{array}$$

2 이차부등식과 연립이차부등식

- 08 x 에 대한 이차방정식 $-x^2 + (k+1)x - k^2 = 0$ 이 허근을 갖도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하여라.

- 09 이차부등식 $ax^2 + 2bx - 24 > 0$ 의 해가 $-4 < x < -3$ 일 때, 이차부등식 $x^2 + 3ax + b < 0$ 의 해를 구하여라.

- 10 이차부등식 $x(x+1) < a(x+1) - 1$ 의 해가 없도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구하여라.

- 11 이차함수 $y = -(k+1)x^2 - 2kx - 3$ 의 그래프가 직선 $y = x - 2$ 와 만나지 않도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하여라.

12 x 에 대한 이차방정식

$x^2+3kx+2k^2-3=0$ 의 서로 다른 두 근 사이에 1이 있도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하여라.

13 연립부등식 $\begin{cases} |x-3|<2 \\ x^2-8x+12<0 \end{cases}$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하여라.

14 이차방정식 $2x^2-kx-3k=0$ 은 허근을 갖고, 이차방정식 $x^2+5x-2k=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 k 의 개수를 구하여라.

15 이차방정식 $x^2+kx+2k+5=0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 양수가 되도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하여라.

16 연립부등식 $\begin{cases} x^2-3x>0 \\ x^2-6x-4\leq 0 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x 의 값의 합을 구하여라.

17 길이가 20 cm인 끈으로 직사각형을 만들려고 한다. 넓이가 16 cm^2 이상 24 cm^2 이하가 되도록 할 때, 짧은 변의 길이의 범위를 구하여라.

발 전 문 제

- 18 이차부등식 $(k-1)x^2 - 2(k-1)x - 2 > 0$ 의 해가 없도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하여라.

- 19 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $-2 < x < 3$ 일 때, 다음 연립부등식의 해를 구하여라. (단, a, b, c 는 실수)

$$\begin{cases} ax^2 - bx + c > 0 \\ cx^2 - bx + a \geq 0 \end{cases}$$

- 20 두 이차부등식

$$x^2 - x - 2 > 0$$

$$2x^2 + (5+2a)x + 5a < 0$$

을 동시에 만족하는 x 의 값 중에서 정수는 -2 뿐일 때, 실수 a 의 값의 범위를 구하여라.

- 21 연립부등식 $\begin{cases} 2[x] - 1 > 0 \\ [x]^2 + [x] - 12 \leq 0 \end{cases}$ 의 해를 구하여라.

(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)